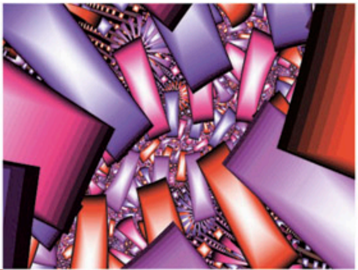
С. Лавров

bhv
www.bhv.ru
www.bhv.kiev.ua

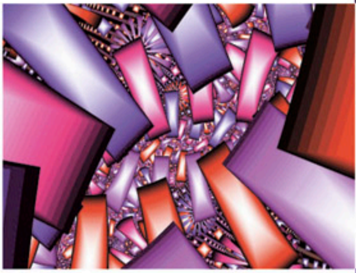
ПРОГРАММИРОВАНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, СРЕДСТВА, ТЕОРИЯ

МАСТЕР

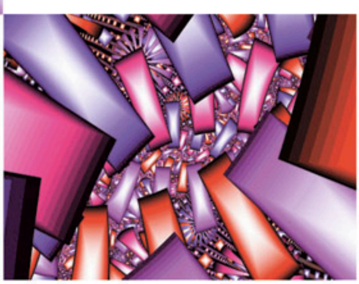
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Математическая логика
Теория множеств
Теория вычислимости



Основные понятия и
конструкции языков
программирования



Анализ свойств
программ

Святослав Лавров

Программирование. Математические основы, средства, теория

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2002

УДК 681.3.06

Современное программирование излагается как искусство заставить компьютер решить задачу, возникшую перед человеком. Даны единые основания математики и программирования, краткие сведения из области графов, теории вероятностей и информации (в ее математическом толковании). Приведены основные понятия и конструкции современных языков программирования. Рассмотрен ряд вопросов теории программирования с упором на математическую семантику языковых конструкций.

Для студентов и преподавателей вузов

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зав. редакцией	*Наталья Таркова*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Ангелины Лужиной*
Зав. производством	*Николай Тверских*
Фото на обложке	*Адама Бартоса*

Оригинал-макет подготовлен С. С. Лавровым

Лавров С. С.
Программирование. Математические основы, средства, теория. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 320 с.: ил.

ISBN 5-94157-069-4

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.02.02.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,51.
Доп. тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар, № 77.99.1.953.П.950.3.99 от 01.03.1999 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН.
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

Содержание

Введение

Современное программирование, понимаемое как искусство описать задачу, возникшую перед человеком, и заставить машину (компьютер) ее решить, остро нуждается как в средствах описания способа решения задачи, так и в средствах формализации понятий и связей между ними в различных областях. Как и многие другие виды человеческой деятельности, оно может быть уподоблено сооружению, нуждающемуся в солидном фундаменте, надежных стенах и, хотя бы легкой, крыше. Каждому из этих элементов в книге выделено по главе, их краткие заголовки вынесены в ее название.

Под фундаментом программирования понимаются его математические основы — глава 1. На самом деле математика и программирование выстроены на общем фундаменте, складывающемся из таких дисциплин, как математическая логика, теория множеств и теория вычислений. Их дополняют краткие сведения из области графов, вероятностей и информации (в ее математическом смысле).

Фундамент оставляет, как ему и положено, впечатление чего-то солидного и незыблемого. В какой-то степени так оно и есть. Но покоится этот фундамент не на скальном основании, а на зыбком грунте естественного языка, общечеловеческих представлений и здравого смысла. Грунтовые воды делают свое дело, заставляя все возведенное на нем пошатываться, а временами — разрушаться. Об особенностях и последствиях этого процесса также рассказывается в книге. Однако у автора (как, по-видимому, у всех пишущих на эти темы) нет ответа на некоторые возникающие по ходу изложения вопросы. Иногда это оговаривается явно, иногда сомнительные высказывания, оценки или эпитеты берутся в кавычки, иногда автор обходит такие темы молча.

А в какой мере математика вообще способна послужить основой для чего бы то ни было? Р. Фейнман в своем знаменитом курсе физики, говоря о связи физики с другими науками, выразился так: «...на замечательной связи, объединяющей физику с математикой, мы не задержимся. (Математика, с нашей точки зрения, не наука в том смысле, что она не относится к *естественным* наукам. Ведь мерило ее справедливости отнюдь не опыт.) Кстати, не все то, что не наука, уж обязательно плохо. Любовь, например, тоже не наука.»

Стены программирования со встроенным в них оборудованием — это сложившиеся в нем понятия и конструкции — глава 2. Вместе взятые, они для множества людей создают условия для выпуска весьма разнообразной продукции. По бокам постоянно вырастают новые корпуса. А в старом центральном здании трудятся люди, которые хранят проверенные жизнью традиции и в меру сил передают молодежи свой опыт и знания. Но хорошо хранить верность традициям, лишь пока они не окостенели, не начали мешать творчеству, не стали бедствием сродни оголтелому новаторству.

Крыша над зданием призвана защитить людей, в нем находящихся и работающих, хотя бы от непогоды. При стихийных бедствиях ни крыша, ни стены не помогают. Ураганы срывают крыши над корпусами, при наводнениях вода заливает низко расположенные помещения, землетрясения разрушают здания целиком, особенно если они возведены недобросовестными строителями, к тому же — наспех.

Люди ищут защиту в науке (по Фейнману — не естественной), в теории — глава 3, придающей их деятельности солидность или хотя бы видимость солидности. Но с наукой временами случаются казусы, при которых ее служителям приходится объяснять не то, чему была посвящена их деятельность, а причины ее неудач. Крыши, увы, имеют обыкновение протекать.

В этих заметках местами ведется довольно длинный разговор вокруг хорошо известных, классических, формул. При всем почтении к формулам следует придавать гораздо большее значение понятийному контексту, в котором те или иные формулы получены и могут быть применены. Сами формулы легко найти в справочнике. Контекст же в работах, написанных в «академическом» стиле, часто лишь скупо проговаривается, а то и подразумевается (принимаем такую-то систему аксиом или такие-то допущения — и все). А его надо знать и понимать. Использование формул вне породившего их контекста приводит, как говорится, к непредсказуемым последствиям.

Если после всего сказанного читатель не утратил желание поближе познакомиться с книгой, то — Бог в помощь.

Книга написана по материалам курсов лекций, читавшихся в 70-х – начале 80-х годов на математико-механическом факультете Ленинградского (в то время) государственного университета. Раздел (глава) 2 представляет собой существенную переработку работы [27]. Глава 3 — менее существенную переработку вышедшей небольшим тиражом книги [28].

Книга делится на разделы трех уровней. Разделы первого уровня часто называются главами, как это уже было сделано выше. Ссылки на формулы внутри разделов даются по их номерам. Ссылка вида (1.2.3–4) относится к формуле (4) из раздела 1.2.3.

Пунктуация во фрагментах программ и некоторых других формальных текстах следует правилам используемого языка, а не русской грамматики. Конец доказательства теоремы или леммы отмечен знаком $\lhd$.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить В. Тумасониса, чьи замечания помогли значительно улучшить изложение главы 2, Р. И. Подловченко за многочисленные полезные замечания по главе 3, членов кафедры МО ЭВМ мат.-мех ф-та СПбГУ, содействовавших своим интересом написанию этой книги, среди них особо — М. В. Дмитриеву за отчаянные попытки сломить сопротивление чиновников из издательства СПбУ к изданию главы 3 в виде отдельной книги, а также В. П. Котлярова и его сотрудников (СПбГТУ) за внимание к работе и за содействие к появлению в конце концов издания [28].

Но, может быть, более всего я должен благодарить терпеливых слушателей моих лекций. А у бывших студентов-первокурсников матмеха ЛГУ я, вероятно, должен просить прощения за все несовершенства курса математической логики, который я им читал из года в год.

1. Математические основы

Здесь охвачены лишь начальные сведения из некоторых математических дисциплин с некоторым уклоном в сторону математической логики (причины объяснены во Введении, в остальном учитывались потребности последующих глав).

1.1. Формальные языки

1.1.1. Неформальный взгляд на формализацию

Математика состоит из ряда математических дисциплин или *теорий*. Некоторые из них так и называются: «теория чисел», «теория вероятностей» и т. п. Примерами, более знакомыми читателю, могут служить элементарная арифметика и элементарная геометрия, изучаемые в средней школе. Их мы и будем использовать ниже в качестве источников иллюстративных примеров.

Математическую теорию можно строить с разной степенью формализации. Первоначально математические понятия возникают как абстракции явлений реального мира. Если у Иры, Оли и Кати в руках по яблоку, то всего яблок столько же, сколько девочек. Совокупность всех упомянутых здесь яблок имеет некоторое общее свойство с совокупностью девочек. Примерно так люди пришли к понятию числа «три» и вообще к понятию натурального (положительного) числа, а заодно и к (может быть, неявному) понятию совокупности.

Сходным образом можно пояснить понятие сложения натуральных чисел (переход от чисел, характеризующих две совокупности каких-либо реальных объектов, к числу, характеризующему объединенную совокупность) и другие арифметические понятия. В геометрии понятие точки возникло как идеализация колышка, забитого в землю, или следа ножки циркуля на листе бумаги. К понятию прямой можно прийти, отвлекаясь почти от всех реальных свойств натянутой веревки или луча света, попадающего от далекой звезды в глаз наблюдателя.

Между прочим, проверка того, насколько близка форма этого луча к идеальной прямой, отличается ли сумма углов реального треугольника космических размеров от 180°, короче — соблюдаются ли аксиомы геометрии в реальном мире, требует постановки сложнейших физических экспериментов. Не слишком ли суров был Фейнман в своих оценках? Любовь прекрасна — спора нет. Но, может быть, математика еще прекраснее? А программирование?..

Построение и истолкование математической теории, когда каждое понятие более или менее явно подразумевает некоторые явления окружающей нас действительности, называется *содержательным*.

При таком построении за любым математическим утверждением видится совокупность разнообразных, но в чем-то сходных ситуаций реального мира. Например, формуле «$3 + 2 = 5$» может соответствовать вопрос: «У Коли есть три книги, а у Саши — две, сколько книг у них вместе?» и ответ: «Пять книг». Ссылки на подобные примеры не только допустимы, но и весьма желательны.

В школьной математике мы знакомимся и с чисто формальными методами, например, с формальными приемами преобразования выражений на уроках алгебры.

Так, в цепочке равенств

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \tag{1}$$

использован, во-первых, целый ряд равенств, выражающих свойства чисел и операций над ними, как-то:

$$\begin{cases} (x+y)z = xz + yz, & (x+y)+z = x+(y+z), \\ x - y = x + (-1)\cdot y, & x+y = y+x, \\ x = 1\cdot x, & n + (-n) = 0, \\ xy = yx, & x\cdot 0 = 0, \\ xx = x^2, & x+0 = x, \end{cases} \tag{2}$$

где вместо x, y и z могут подразумеваться любые выражения, а вместо n — любое число. Во-вторых, применен общий принцип подстановки: если выражение A содержит в себе некоторое другое выражение C (в частности, A может совпадать с C), а выражение B получается из A заменой C на равное ему выражение D, то выражения A и B равны. В роли выражений C и D могут выступать левая и правая (или наоборот) части любого из равенств (2), а в роли A — любое правильно построенное выражение. В-третьих, цепочка равенств

$$K = L = M = N$$

представляет собой сокращенную запись совокупности равенств

$$K = L,\ L = M,\ M = N.$$

В-четвертых, неявно использован еще один принцип: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$. Его двукратное применение позволяет прийти к равенству

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \tag{3}$$

Упражнение 1.1.1. Опираясь на равенства (2), обосновать равенства:

а. $x(y+z) = xy + xz$,
б. $(x-y)z = xz - yz$,
в. $x - x = 0$.

Упражнение 1.1.2. Выписать опущенные шаги цепочки (1), связанные с применением равенств $(x+y)+z = x+(y+z)$ и $x+0 = x$.

Мы не зря так подробно остановились на этом простом примере — при построении и исследовании формальных теорий, чему посвящена бо́льшая часть главы 1, очень важно помнить о тех элементарных шагах преобразований формул, которые обычно подразумеваются, и уметь их восстанавливать. Кроме того, необходима именно такая степень детальности, хотя бы на некоторых шагах.

Формализация математической теории связана, прежде всего, с отказом от употребления естественного, русского или иного, языка, таящего в своих глубинах немало рифов. Например, слова «в руках по яблоку» можно понять и так: «в каждой руке по яблоку». Выбор между этими вариантами читатель должен был сделать на основе последовавшего за этим утверждения автора — для логики вещь чудовищная.

Вместо слов «от перемены мест слагаемых сумма не меняется» пишется $x + y = y + x$. Утверждение «две прямые, порознь параллельные третьей, параллельны между собой» записывается в виде $p\|r \wedge q\|r \Rightarrow p\|q$. Но и формализованный язык должен обладать своей структурой — системой и иерархией обозначений. Так, буквами (x, y, p, ...), возможно с индексами и штрихами (например, χ_1'), обычно обозначаются объекты (числа, прямые и пр.) теории. Некоторые знаки ('$+$', '$\cdot$', ...) обозначают операции над этими объектами, другие ('$=$', '$\|$' и т. п.) — отношения между ними, третьи ('$\wedge$', '$\Rightarrow$' и др.) помогают из простых утверждений образовывать более сложные. Выражения — последовательности символов — могут обозначать объекты, возникающие в результате применения операций к другим объектам ($x + y$ — сумма чисел x и y, $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B, AB — прямая, проведенная через точки A и B и т. д.), утверждения относительно этих объектов ($x = y$, $p \| q$, $n = 0$, ...), а также комбинации или последовательности таких утверждений. Пример цепочки равенств (1) показывает, что довольно длинная цепь рассуждений может быть представлена одним формальным выражением. Правило подстановки — это иллюстрация того, как некоторый способ рассуждения

> «Воспользуемся равенством $(x + y)z = xz + yz$ для случая, когда x обозначает объект a, y — объект b, а z — объект $(a - b)$. Получим $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$.»

заменяется правилом формального преобразования выражений.

Далее, на время проведения подобных преобразований можно забыть, что буквы x, y, p, q обозначают числа или прямые, и тем более — что в понятии числа или прямой отражаются какие-то свойства окружающего мира. Однако важно, что за каждой формальной теорией стоит ее содержательный прообраз. Его факты и закономерности, разумеется, должны отражаться как в выражениях, принимаемых за исходные, так и в правилах их преобразования. Да и сам этот прообраз должен обладать хоть какой-то научной ценностью — ведь совсем нетрудно, например, строго формализовать правила игры в домино.

Занимаясь формальным преобразованием выражений, мы вправе и даже обязаны не задумываться ни над смыслом исходных, промежуточных и окончательных выражений, ни над обоснованностью правил, по которым одни выражения получаются из других. Как только мы обращаемся к смыслу, мы рискуем внести в наши формальные преобразования что-то, не предусмотренное правилами формальной теории.

Так в многовековой истории попыток вывести аксиому параллельности из других аксиом геометрии Евклида известен ряд случаев, когда на основе «здравого смысла» в доказательствах использовались утверждения, эквивалентные этой аксиоме. Разумеется, такое «доказательство» — уже не формальное доказательство (нельзя даже сказать, что оно ошибочно, так как при формальном подходе нельзя говорить о правильности или ошибочности доказательства, можно лишь отличать доказательства от недоказательств).

В чистом виде ни содержательный, ни формальный подход в математике почти не встречаются. Чисто содержательны, пожалуй, лишь математические таблицы, вроде таблиц логарифмов или простых чисел (при всей их внешней бессодержательности и строго формальном виде). Если понятие логарифма уже освоено и воспринято, то информация «$\log 2 = 0.30103$» становится просто фактом реального мира. Чисто формальны некоторые кусочки этой книги, если извлечь их из контекста. В остальном же при построении математических теорий оба подхода сопутствуют друг другу.

Естественно, что математики тяготеют к формальному построению теории, ибо на замене содержательных понятий абстрактными и обозначении их символами основан весь путь развития математики и все достигнутые ею успехи. С другой стороны, любая фраза, начинающаяся словами «Легко видеть» или «Отсюда следует», апеллирует к пониманию читателя, к его навыкам во владении формальным аппаратом, а это уже не укладывается в рамки строгой формализации. Работы, формализованные до конца, были бы чрезвычайно раздуты и совершенно не читаемы. Наконец, математик обязан соотносить свои теории с действительностью (пусть эта действительность ограничивается кругом деятельности его коллег), если он не хочет уподобить занятие наукой раскладыванию пасьянсов.

Чем же все-таки полезна формализация, почему она плодотворна в математике? То, что проделано по формальным правилам, легко поддается проверке. Если все этапы последовательных формальных преобразований выдержали проверку, то достоверность связи между исходными и окончательными выражениями сомнений не вызывает. Споры между математиками не должны возникать, если только автор доказательства может сослаться на правила, по которым выполнены все шаги доказательства. Нельзя спорить и по поводу самих правил или исходных выражений теории, ибо формальный подход исключает необходимость ссылок на смысл или истинность этих правил и выражений. Обсуждать можно только применимость той или иной математической теории к конкретной ситуации реального мира (например, применимость планиметрии к вычислению площадей протяженных участков земной поверхности; см. также пример, приводимый несколько ниже). Но некоторые математики считают, что и это не должно их интересовать, и упрекнуть их в чем-нибудь трудно.

Ну и, наконец, — это уже аргументация второй половины XX века — без строжайшей формализации и регламентации было бы невозможно прибегнуть к помощи вычислительных машин ни в точных науках, ни во многих других областях человеческой деятельности.

Одной и той же формальной теории могут быть даны различные содержательные истолкования. Совсем тривиальный пример нам дает арифметика, в которой считать можно все, что угодно: яблоки, книги, звезды, ворон и т. д. Равенство (3) оказывается справедливым при любой содержательной интерпретации обозначений a и b и операций сложения и умножения, если только в этой интерпретации истинны все равенства (2). В частности, оно справедливо в области как целых, так и рациональных, действительных или комплексных чисел.

С некоторыми оговорками оно справедливо и при некоторых других интерпретациях.

Пример. В качестве объектов рассматриваются векторы и действительные числа, обозначаемые буквами. Под сложением и вычитанием понимаются сложение и вычитание векторов либо чисел (не допуская, конечно, сложения вектора с числом), а под умножением — либо умножение чисел, либо умножение числа на вектор (или наоборот), либо скалярное (но не векторное) умножение векторов (однако, в равенстве $(xy)z = x(yz)$ по крайней мере одна из букв x, y или z должна обозначать число). Знаки операций воспринимаются в зависимости от контекста, как и символ '0', обозначающий либо число, либо нулевой вектор. Можно убедиться, что любое из равенств (2) при этих соглашениях справедливо.

Упражнение 1.1.3. Доказать, что в параллелограмме с заданными диагоналями произведение сторон на косинус угла между ними не зависит от угла между диагоналями. (Указание: обозначить векторы-диагонали через $2a$ и $2b$).

Известно много примеров, когда разные физические явления описываются одинаковыми математическими уравнениями. Это означает, что одна и та же математическая теория (исследующая свойства решений этих уравнений) допускает разные физические интерпретации.

Но, может быть, еще чаще встречаются случаи интерпретации одной математической теории внутри другой. Так, вся аналитическая геометрия — это, по сути дела, геометрическая интерпретация теории алгебраических уравнений первого и второго порядка. Достойно внимания то, что сама геометрия, включая теорию конических сечений, возникла за много веков до ее аналитической сестры, где понятию конического сечения соответствует термин «кривая второго порядка». Не только в этом случае наглядные представления раньше становятся объектом научного исследования, чем эквивалентные им формальные средства, в конечном счете быстрее приводящие к цели. Методы математического анализа применяются в геометрии, теории чисел и других математических дисциплинах.

Некоторые дисциплины (например, функциональный анализ, а также теория множеств и математическая логика, с элементами которых мы будем знакомиться в этом разделе) первоначально и возникли ради возможности интерпретации их результатов в других разделах математики. Короче говоря, обнаружилось, что математические теории, допускающие лишь одну интерпретацию, составляют скорее исключение, чем правило (даже формализованная арифметика имеет нестандартные интерпретации, существенно отличающиеся от привычной арифметики натурального ряда). Все это стимулировало развитие математических дисциплин в XX веке именно как формальных теорий, не связанных с какой-либо содержательной интерпретацией.

Наконец, заменив математические утверждения и рассуждения выражениями — последовательностями символов, мы получаем возможность сделать сами эти рассуждения (доказательства) предметом математической теории и, как уже было сказано, предметом компьютерной обработки (автоматическое доказательство теорем и т. п.). Математическая логика — это и есть такая теория. Она исследует общие свойства формальных теорий, их возможности и ограничения, а также связи между формальными теориями и их содержательными интерпретациями, трактуя, впрочем, последние тоже достаточно абстрактно. Начиная со следующего раздела, наше изложение будет становиться все более формальным.

1.1.2. Алфавиты, слова, языки

Формальные теории, не пользуясь естественным языком, нуждаются в собственном формальном языке, на котором записываются встречающиеся в них выражения. Опишем простые средства, используемые для этой цели.

Алфавит — это конечное множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, элементы которого называются *буквами* или *символами*. Любая конечная последовательность букв $b_1 \ldots b_k$, где $b_i \in A$ для $i = 1, \ldots, k$ называется *словом* в алфавите A. Слово может состоять всего лишь из одной буквы, а может и вообще не содержать букв, тогда оно называется *пустым* и обозначается λ. Число букв в слове φ называется его *длиной* и обозначается $|\varphi|$. В частности, $|\lambda| = 0$.

Над словами определена операция *сцепления*. Результатом сцепления слов $\varphi = b_1 \ldots b_k$ и $\psi = c_1 \ldots c_m$ является слово $b_1 \ldots b_k c_1 \ldots c_m$. Его мы будем обозначать $\varphi\psi$ (другими словами, для операции сцепления не будем применять никакого специального знака, подобно тому, как в школьной алгебре произведение x на y обычно обозначается просто xy, а не $x \cdot y$ и не $x \times y$). Очевидно, что $|\varphi\psi| = |\varphi| + |\psi|$.

Слова $\varphi = b_1 \ldots b_k$ и $\psi = c_1 \ldots c_m$ будем называть *равными*, если $k = m$ и $b_i = c_i$ для $i = 1, \ldots k$, т. е. когда всюду на соответствующих местах в словах φ и ψ стоят одинаковые буквы. Равенство слов φ и ψ будем обозначать $\varphi = \psi$ (предполагая, что алфавит A не содержит буквы $=$, если это не так, то вместо нее здесь надо воспользоваться иной буквой). Слова $\varphi = b_1 \ldots b_k$ и $\psi = c_1 \ldots c_m$ не равны (обозначение $\varphi \neq \psi$), если условие их равенства не выполнено, т. е. если $k \neq m$, или $k = m$, но при некотором i $(1 \leq i \leq k)$ $b_i \neq c_i$.

Очевидно, что для любого слова φ справедливы равенства $\varphi\lambda = \varphi$ и $\lambda\varphi = \varphi$, и для любых трех слов φ, ψ и χ — равенство $(\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi)$, где скобки обозначают последовательность выполнения операций сцепления. Последнее свойство (ассоциативность операции сцепления) позволяет записывать результат двух и более сцеплений без скобок, например, $\varphi\psi\chi$ или $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_s$.

Множество всех слов в алфавите A (включая пустое слово) обозначается A^*. Любое подмножество множества A^* называется *языком* в алфавите A, а совокупность правил, позволяющих установить принадлежность слова языку, — *грамматикой* этого языка. Иногда такую грамматику называют *распознающей*, в отличие от *порождающей* грамматики, позволяющей выписывать произвольные слова данного языка и только их. Обычно требуется, чтобы как порождение, так и распознавание (задача более трудная) осуществлялись *эффективно*, т. е. за конечное (и желательно — не слишком большое, соразмерное длине слова) число шагов.

Если слово ψ представлено в виде $\psi = \varphi\chi$, то слово φ называется *началом*, а слово χ — *концом* слова ψ при данном представлении. Если слово ψ представлено в виде $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$, где χ_1 и χ_2 — произвольные (возможно, пустые) слова, то говорят, что слово φ *входит* в слово ψ, а само представление слова ψ в указанном виде называется *вхождением* слова φ в слово ψ. Вхождения $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$ *различны*, если $\chi_1 \neq \chi_1'$.

Упражнение 1.1.4. Доказать, что если вхождения $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$ различны, то $|\chi_1| \neq |\chi_1'|$.

Упражнение 1.1.5. Если $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$, то либо слово χ_1 — начало слова χ_1', либо слово χ_1' — начало слова χ_1 (либо то и другое вместе).

Упражнение 1.1.6. Сколько существует различных вхождений пустого слова в слово длины n?

Из утверждения упражнения 1.1.4 следует, что для задания вхождения слова φ в слово ψ (если оно существует) достаточно указать место вхождения, например, номер первой буквы слова φ в слове ψ или длину предшествующего этой букве начала слова ψ.

Вхождение $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ называется *более левым*, чем вхождение $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$, если $|\chi_1| < |\chi_1'|$. Вхождение φ в ψ называется *самым левым*, если не существует другого, более левого, вхождения φ в ψ. Говорят, что вхождения $\psi = \chi_1\varphi\chi_2$ и $\psi = \chi_1'\varphi\chi_2'$ слова φ в слово ψ *пересекаются*, если $|\chi_1| \leq |\chi_1'| < |\chi_1| + |\varphi|$ или $|\chi_1'| \leq |\chi_1| < |\chi_1'| + |\varphi|$ (иначе говоря, если $\big||\chi_1'| - |\chi_1|\big| < |\varphi|$). Например, слово РОКОКО содержит два пересекающихся вхождения слова ОКО — одно с $\chi_1 =$ Р, $\chi_2 =$ КО, второе — с $\chi_1' =$ РОК, $\chi_2' = \lambda$.

Вхождением буквы a в слово ψ называется вхождение слова φ, состоящего из одной буквы a, в ψ.

Упражнение 1.1.7. Доказать, что никакие два различные вхождения буквы a в слово ψ не пересекаются.

1.1.3. Структура формальных теорий

Формальная теория определяется заданием четырех ее элементов: *алфавита*, множества *формул*, множества *аксиом* и совокупности *правил вывода*. Мы начали описание формальной теории фразой, написанной на естественном языке. Нет ли здесь противоречия? Разумеется, нет. Теория — это аппарат, предназначенный, в частности, для использования человеком. Правила пользования этим аппаратом должны быть изложены на языке, хорошо понятном человеку. Такой язык называется *метаязыком* или *языком метатеории* по отношению к собственно теории. Метаязык и сам может быть формализован — люди, знакомые с описанием некоторых языков программирования, хорошо это знают. Но пока ограничимся простым русским языком, стараясь не прибегать к смысловым и лингвистическим изыскам и вывертам. О языке логических теорий речь пойдет в разд. 1.2, а сейчас изложим общие принципы действия аппарата.

Множество **F** формул формальной теории — это язык в алфавите **A** этой теории. Порождающая грамматика этого языка должна быть достаточно простой и эффективной, настолько простой, чтобы и распознавание слов, являющихся формулами, трудностей не представляло.

Фигурные буквы: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, ... используются в метаязыке для обозначения формул. Их можно снабжать индексами или иными пометками. Разумеется, эти буквы, как и любые обозначения метаязыка, не должны принадлежать алфавиту формальной теории, и когда говорится «формула $\mathcal{A}$», то имеется в виду не формула, состоящая из одной буквы $\mathcal{A}$, а формула теории, обозначенная этой буквой. В элементарной математике слова «число x», «точка A» понимаются аналогично.

Множество **G** аксиом формальной теории — это некоторое подмножество множества ее формул. Аксиомы, если их число конечно, задаются списком, если нет — то какими-либо схемами или правилами, позволяющими эффективно распознавать аксиомы среди прочих формул.

Правило вывода должно давать возможность по данному набору формул $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_m$ и формуле $\mathcal{B}$ установить, находятся ли эти $m + 1$ формула в определенной связи (в определенном отношении) между собой. Если да, то говорят, что формула $\mathcal{B}$ является *непосредственным следствием* формул $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_m$ (непосредственно *выводима* из них) по этому правилу. Число m этих формул, называемых *посылками* правила, обычно фиксировано для каждого правила, но иногда допускаются правила с произвольным числом посылок. Формула $\mathcal{B}$ называется *заключением* правила. Совокупность **R** правил вывода формальной теории должна быть конечной.

Правила вывода записывают в виде

$$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m \vdash \mathcal{B}$$

или же в виде

$$\frac{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m}{\mathcal{B}}.$$

При желании можно рассматривать аксиомы как частные случаи правил вывода — правила, у которых $m = 0$, и говорить, что аксиома — это непосредственно выводимая формула (из пустого набора посылок).

При содержательной интерпретации формальной теории формулы соответствуют утверждениям, аксиомы — исходным утверждениям, которые могут быть признаны содержательно истинными, правила вывода — схемам рассуждений, позволяющих из одних истинных утверждений получать другие, также истинные. Теперь нам надо определить понятие, которое в рамках формальной теории соответствует содержательному понятию доказательства — последовательности утверждений, приводящих от исходных утверждений, принимаемых за истинные, к их логическим следствиям. На каждом шаге доказательства используется либо одна из аксиом, либо один из приемов рассуждений, формально представленных в виде правил вывода. Утверждение, полученное в конце этого процесса, и является итогом доказательства — теоремой. Так мы приходим к следующему определению.

Выводом формулы $\mathcal{B}$ в формальной теории $\mathbf{T}$ называется конечная последовательность формул $\mathcal{B}_1$, ..., $\mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$, а каждая из формул $\mathcal{B}_i$ для $i = 1, \ldots n$ — это либо аксиома формальной теории, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул последовательности (т. е. формул, содержащихся среди $\mathcal{B}_1$, ..., $\mathcal{B}_{i-1}$) по одному из правил вывода.

Если рассматривать аксиомы как правила вывода с пустым набором посылок, то определение вывода можно сформулировать короче, требуя лишь, чтобы каждая из формул вывода была непосредственно выводима из каких-либо предшествующих ей в этом выводе формул.

Формула $\mathcal{B}$ формальной теории $\mathbf{T}$ называется *выводимой* (в этой теории), если существует ее вывод в теории $\mathbf{T}$. Выводимые формулы называются также *теоремами* рассматриваемой формальной теории.

Утверждение, что формула $\mathcal{B}$ выводима в теории $\mathbf{T}$, т. е. является ее теоремой, кратко записывается в виде

$$\vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{B}$$

или, если из контекста ясно, о какой теории идет речь, — в виде

$$\vdash \mathcal{B}.$$

Чтобы не возникали сомнения, идет ли речь о теоремах формальной теории или о теоремах метауровня, будем эти *метатеоремы* нумеровать, всегда использовать эти номера, ссылаясь на них, а заглавное слово «теорема» (а также «лемма» и «следствие») набирать вразрядку.

Пример. Рассмотрим формальную теорию $\mathbf{L}_1$ с алфавитом $\mathbf{A}=\{a, b\}$, формулами которой являются любые слова в этом алфавите, аксиомами — формулы $\mathcal{A}_1 = a$, $\mathcal{A}_2 = b$, $\mathcal{A}_3 = aa$ и $\mathcal{A}_4 = bb$, и в которой действуют два правила вывода:

$$\mathcal{A} \vdash a\mathcal{A}a \tag{4}$$

и

$$\mathcal{A} \vdash b\mathcal{A}b. \tag{5}$$

Легко убедиться, что теоремами этой теории являются любые непустые слова — палиндромы (перевертыши) в алфавите $\mathbf{A}$, одинаково читающиеся слева направо и справа налево, и только они. Например, формула, т. е. слово, $abbabba$ имеет вывод, состоящий из четырех формул (*шагов* вывода):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_1 = a && \text{(аксиома } \mathcal{A}_1\text{)},\\
&\mathcal{B}_2 = bab && \text{(правило (5) при } \mathcal{A} = \mathcal{B}_1\text{)},\\
&\mathcal{B}_3 = bbabb && \text{(правило (5) при } \mathcal{A} = \mathcal{B}_2\text{)},\\
&\mathcal{B}_4 = abbabba && \text{(правило (4) при } \mathcal{A} = \mathcal{B}_3\text{)}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем подобные выводы будем записывать в сокращенном виде, не прибегая к обозначениям вида $\mathcal{B}_i$, заменяя их в пояснениях к шагам номером i шага, на котором формула получена, и обходясь без слов «аксиома», «правило» и «при». Для данного примера:

1) a $(\mathcal{A}_1)$
2) bab $(1; (5))$

3) $bbabb$ $(2; (5))$

4) $abbabba$ $(3; (4))$

(список посылок правила предшествует номеру правила).

Этот пример может вызвать некоторые недоуменные вопросы. Какие утверждения изображают формулы теории $\mathbf{L}_1$? Почему утверждения, представленные аксиомами, следует считать истинными? Каким схемам рассуждений соответствуют правила этой теории?

Естественный ответ на первый вопрос таков — формула $\mathcal{A}$ изображает утверждение: «$\mathcal{A}$ — палиндром». При этом аксиомы, действительно, соответствуют истинным утверждениям: a — палиндром, ..., bb — палиндром и содержат полный список палиндромов длиной не свыше 2. В правилах вывода представлены простые умозаключения: если $\mathcal{A}$ — палиндром, то как $a\mathcal{A}a$, так и $b\mathcal{A}b$ — палиндромы.

Среди утверждений вида «$\mathcal{A}$ — палиндром», где $\mathcal{A}$ — слово в алфавите a, b, встречаются как истинные (например $aaaaa$ — палиндром), так и ложные ($aabb$ — палиндром). Если утверждение «$\mathcal{A}$ — палиндром» истинно, то, как уже отмечалось, формула $\mathcal{A}$ выводима в теории $\mathbf{L}_1$, и наоборот — если $\vdash_{\mathbf{L}_1} \mathcal{A}$, то это утверждение истинно.

Это важное свойство формальной теории — выводимость всех формул, изображающих содержательно истинные утверждения, и только таких формул — называется ее *полнотой.*

Итак, теория $\mathbf{L}_1$ из нашего примера полна (по отношению к интерпретации, которая была ей дана).

Упражнение 1.1.8. Построить полную формальную теорию $\mathbf{L}_2$ с алфавитом $\mathbf{A}_2 = \{x, y, z, `+', `\times', `(', `)'\}$, любая теорема $\mathcal{A}$ которой допускает интерпретацию: «$\mathcal{A}$ — правильно построенное арифметическое выражение, в котором числа обозначаются буквами x, y, z, в качестве операций используются лишь сложение и умножение, порядок исполнения операций определяется только скобками». Построить вывод формулы $((x + y) \times (y + z))$ в теории $\mathbf{L}_2$.

Теории, подобные $\mathbf{L}_1$ или $\mathbf{L}_2$, называются *формальными грамматиками*, поскольку их назначение — задать правила построения слов некоторого формального языка (языка палиндромов или языка термов). Роль формальных грамматик как в логике, так и в программировании очень существенна. Фрагменты грамматики некоего модельного языка программирования рассыпаны по главам 2 и 3, где они то дополняют, то сменяют друг друга.

Наряду с утверждениями, доказываемыми (в содержательном изложении теории) безусловно, часто проводятся условные доказательства, имеющие силу лишь в предположении истинности некоторых дополнительных утверждений (условий доказываемой теоремы). Формальным аналогом таких условных доказательств являются *выводы из гипотез.*

Списком (или *совокупностью*) *гипотез* называется некоторая конечная последовательность формул $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$. Такие списки обычно обозначаются прописными греческими буквами Γ, Δ, Ξ, ... В частности, список может быть пустым, т. е. не содержать ни одной формулы.

Выводом формулы $\mathcal{B}$ *из списка гипотез* Γ называется конечная последовательность формул $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$ и каждая из формул $\mathcal{B}_i$ для $i = 1, \ldots n$ является либо аксиомой, либо одной из гипотез (т. е. содержится в списке Γ), либо непосредственным следствием каких-либо предыдущих формул (из числа $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{i-1}$) по одному из правил вывода. Разумеется, всюду речь идет о формулах, аксиомах и правилах вывода одной и той же формальной теории.

Формула $\mathcal{B}$ называется *выводимой из списка гипотез* $\Gamma = \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$, если существует ее вывод из этого списка в рассматриваемой формальной теории $\mathbf{T}$. Обозначается это так

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{B},$$

или подробнее

$$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k \vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{B}.$$

И здесь индекс $_{\mathbf{T}}$ у знака '$\vdash$' можно опускать, если ясно, какая теория имеется в виду.

Из определения видно, что вывод из пустого списка гипотез — это просто вывод в данной формальной теории, так что обозначение

$$\vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{B}$$

не является двусмысленным.

Теорема 1.1.1. *Если* $\Gamma \vdash \mathcal{D}_1, \ldots, \Gamma \vdash \mathcal{D}_s$ *и* $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_s \vdash \mathcal{B}$, *то* $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_{i1}, \ldots, \mathcal{B}_{in_i}$ — вывод $\mathcal{D}_i$ из Γ, а $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ — вывод $\mathcal{B}$ из $\mathcal{D}_1, \ldots \mathcal{D}_s$. Выпишем последовательность формул

$$\mathcal{B}_{11}, \ldots, \mathcal{B}_{1n_1}, \ldots, \mathcal{B}_{s1}, \ldots, \mathcal{B}_{sn_s}, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n. \tag{6}$$

Покажем, что она представляет собой вывод формулы $\mathcal{B}$ из списка гипотез Γ. Действительно, $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$, так как $\mathcal{B}_n$ — это последняя формула вывода $\mathcal{B}$ из $\mathcal{D}_1, \ldots \mathcal{D}_s$. Каждая из формул $\mathcal{B}_{ik}$, где $1 \le i \le s, 1 \le k \le n_i$, принадлежит выводу формулы $\mathcal{D}_i$ из Γ и, следовательно, является либо аксиомой, либо гипотезой из списка Γ, либо непосредственным следствием некоторых формул, предшествующих ей в этом выводе. Но те же формулы предшествуют ей и в последовательности (6). Таким образом, любая из этих формул может быть включена в последовательность (6), рассматриваемую как вывод из списка Γ. В частности, это относится и к формулам $\mathcal{B}_{in_i}$ для $i = 1, \ldots, s$.

Каждая из формул $\mathcal{B}_j$ для $j = 1, \ldots, n$ является либо аксиомой, либо непосредственным следствием формул, предшествующих ей в последовательности $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, а следовательно, и в последовательности (6), либо, наконец, одной из гипотез $\mathcal{D}_1, \ldots \mathcal{D}_s$, например, $\mathcal{D}_i$. Но в последнем случае она совпадает с формулой $\mathcal{B}_{in_i}$, стоящей раньше ее в последовательности (6). Тогда она может быть включена в вывод на том же основании, на каком в нем содержится формула $\mathcal{B}_{in_i}$.

Итак, последовательность (6) удовлетворяет всем требованиям определения вывода формулы $\mathcal{B}$ из списка Γ, так что $\mathcal{B}$ выводима из этого списка. $\triangleleft$

Упражнение 1.1.9. Пусть каждая из формул списка Γ содержится в списке Δ. Доказать, что если $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, то $\Delta \vdash \mathcal{B}$.

Упражнение 1.1.10. Пусть $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k \vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{A}$. Построим формальную теорию $\mathbf{T}_1$ с теми же алфавитом, множеством формул и множеством аксиом, что у теории $\mathbf{T}$, и отличающуюся от нее лишь тем, что к совокупности правил вывода теории $\mathbf{T}$ добавлено правило $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k \vdash \mathcal{A}$. Доказать, что если $\vdash_{\mathbf{T}_1} \mathcal{B}$, то и $\vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{B}$.

Рассмотренный выше пример и упражнение 1.1.8 показывают, что в рамках нашего определения могут быть построены формальные теории, допускающие содержательную интерпретацию. И все же у читателя, безусловно знакомого с логическими знаками и их использованием в логических формулах, может остаться законное чувство неудовлетворенности. Например, схема рассуждений: если $\mathcal{A}$ — палиндром, то и $a\mathcal{A}a$ — палиндром, несомненно правильна, но это схема рассуждений о палиндромах. В математике же (как и в любой науке) применяются гораздо более общие и универсальные схемы утверждений, например: «если верно утверждение $\mathcal{A}$ и верно, что из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$, то и $\mathcal{B}$ должно быть верно», или «если из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$, но $\mathcal{B}$ ложно, то и $\mathcal{A}$ должно быть ложно». Желательно, чтобы рассуждения (или утверждения) такого и даже более общего типа, а вернее — их формальные эквиваленты, входили органической частью в любую формальную теорию, которую мы будем рассматривать. Для этого язык формальной теории должен включать подходящие изобразительные средства, и сами схемы рассуждений должны быть представлены в ней либо правилами вывода, либо в виде аксиом или, в крайнем случае, — в виде легко выводимых теорем, а в самом крайнем случае — в виде легко доказываемых метатеорем.

Мы уже говорили в разд. 1.1.1, что содержательные математические теории имеют дело с такими понятиями, как объекты, их свойства (типы), отношения между ними, операции, которые над ними можно выполнять. Хотелось бы, чтобы и эти понятия имели прямые эквиваленты в любой формальной теории. По этим причинам данное выше определение формальной теории следует конкретизировать, придав ему черты, отображающие понятийную и логическую структуру математических теорий.

1.2. Логические формальные теории

1.2.1. Язык

Собственно логика начинается лишь тогда, когда относительно рассматриваемых объектов делаются некоторые высказывания (утверждения). Понятие высказывания примерно соответствует понятию повествовательного предложения в обычном языке.

Но в повседневной жизни почти каждое высказывание несет на себе отпечаток желаний и чувств говорящего, его сомнений, ожиданий и надежд. Цель логики как науки — отвлечься от всего этого и сосредоточиться лишь на одном свойстве высказываний — их истинности, причем истинности непреходящей, что позволяет избавиться от категории времени. Например, высказывания: «$1{=}1$», «$2 < 5$», «$x^2 \geqslant 0$», «*все прямые углы равны друг другу*» — истинны, причем высказывание «$x^2 \geqslant 0$» истинно, какое бы значение ни принимала переменная x. Высказывания: «$0 \neq 0$», «$2 \geqslant 5$», «*любые две прямые, перпендикулярные третьей, перпендикулярны друг другу*», «$x = x + 1$» — ложны, причем последнее высказывание ложно при любом значении x. Высказывания: «$x > 1$», «*точка A лежит на прямой p*» могут быть как истинны, так и ложны, в зависимости от того, что обозначают переменные x, A и p.

На этих содержательных примерах мы познакомились с тремя типами высказываний: тождественно истинными, тождественно ложными и имеющими переменное значение истинности. Все тождественно истинные высказывания в грубом приближении эквивалентны, поскольку логика интересуется прежде всего истинностью или ложностью высказывания (хотя иногда отнести высказывание к одному из трех названных типов невозможно без анализа структуры высказывания и его связей с какими-либо иными высказываниями).

Введем символику (язык), к которому будем прибегать при построении формальных логических теорий. Тождественно истинное высказывание обозначим буквой T (от английского слова true — истина). Для тождественно ложного высказывания примем обозначение F (от false — ложь). Символы T и F называются *пропозициональными* (от латинского propositio — предложение, высказывание) или *логическими константами*. Для обозначения высказываний, способных принимать различные значения, будем использовать символы B_1, B_2, ..., называемые *пропозициональными переменными* или *пропозициональными буквами*.

Любые обозначения высказываний в логике называются *формулами*. Самые простые формулы — это введенные нами пропозициональные константы T и F и пропозициональные буквы (переменные) B_1, B_2, ... Эти формулы называются *элементарными*, *атомарными* или *первичными*. Впоследствии (с. 26) мы пополним этот класс еще одной разновидностью обозначений для высказываний.

Из уже имеющихся формул можно образовывать более сложные, пользуясь *логическими связками*: '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\supset$' и '$\equiv$', а также скобками '(' и ')'. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — формулы (первичные или уже построенные), то записи (слова)

$$\neg\mathcal{A},\ (\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}),\ (\mathcal{A}\vee\mathcal{B}),\ (\mathcal{A}\supset\mathcal{B}),\ (\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}), \qquad (1)$$

также являются формулами. Напомним, что здесь выписаны не сами формулы, а их *схемы* в метаязыке. Исходя из элементарных формул и многократно применяя эти схемы, можно построить обширный класс формул теории.

Можно считать, что логические связки — это знаки операций с логическими операндами и значением. Эти операции называются (в указанном порядке): *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация* и *эквивалентность* (реже *эквиваленция*). Иногда так же называются и соответствующие формулы из списка (1). В каждом случае формулы $\mathcal{A}$ и (кроме первого случая) $\mathcal{B}$ называются *частями* (или *членами*) формул (1). В формуле $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ формула $\mathcal{A}$ называется *посылкой*, а $\mathcal{B}$ — *заключением* импликации.

Каждая из частей может, в свою очередь, содержать другие связки, но связка, явно выписанная в формулах (1), называется *главной* в своей формуле. Например, в формуле

$$((B_1 \vee \neg B_2) \supset \neg(B_2 \equiv (B_3 \wedge B_1))) \tag{2}$$

главной связкой является '$\supset$', поскольку эта формула построена по схеме $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$, где $\mathcal{A}$ — это $(B_1 \vee \neg B_2)$, а $\mathcal{B}$ — $\neg(B_2 \equiv (B_3 \wedge B_1))$.

Подформулой данной формулы называется она сама, а также подформулы ее частей. Отсюда следует, что подформулами некоторой формулы, кроме ее самой, являются ее части (если они есть), части ее частей (с той же оговоркой), части этих частей и т. д. Части и подформулы формулы — это не просто формулы, которые в ней можно увидеть, а определенные вхождения этих формул.

Элементарные подформулы любой формулы не имеют частей и поэтому не содержат никаких подформул, кроме самих себя. По этой причине их называют также *минимальными* подформулами. *Собственными подформулами* формулы называются все ее подформулы, кроме нее самой.

Для примера построим так называемое дерево разбора (синтаксического) формулы (2) — рис. 1.

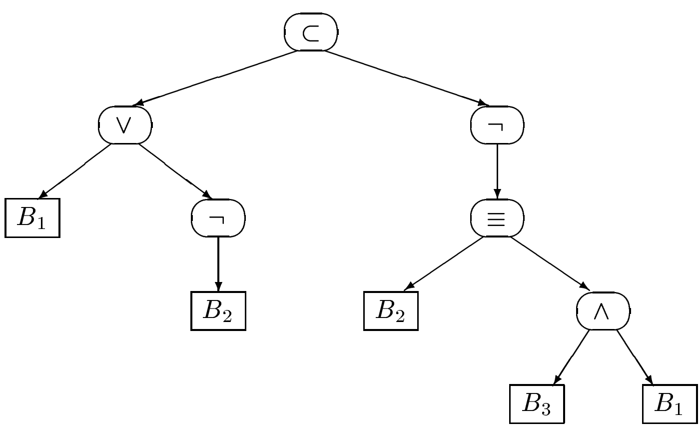


Рис. 1

Все это дерево, как и каждое его собственное поддерево, представляет одну из подформул данной формулы. Элементарным подформулам соответствуют

5 терминальных вершин дерева, неэлементарным — 6 поддеревьев с корнями в нетерминальных вершинах, каждая из них помечена главной связкой такой подформулы.

Назвав логические связки операциями, мы взяли на себя обязанность описать правила исполнения этих операций, вычисления их результатов. Эту сторону языка логических формальных теорий называют иногда *алгеброй высказываний.*

При этом термин «формула» заменяют, как это принято в алгебре, термином «(пропозициональная) форма». Эти правила сведены в следующую таблицу.

$V(\mathcal{A})$	$V(\neg\mathcal{A})$	$V(\mathcal{B})$	$V(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$	$V(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$	$V(\mathcal{A}\supset\mathcal{B})$	$V(\mathcal{A}\equiv\mathcal{B})$
T	F	T	T	T	T	T
T		F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F		F	F	F	T	T

В этой таблице, как и всюду в дальнейшем, $V(\mathcal{A})$ обозначает значение формулы $\mathcal{A}$ (а $V(\neg\mathcal{A})$, естественно, — значение формулы $\neg\mathcal{A}$ и т. д.).

Формула $\neg\mathcal{A}$ читается «не $\mathcal{A}$», «неверно, что $\mathcal{A}$» или «отрицание $\mathcal{A}$» и обозначает высказывание, противоположное по значению высказыванию $\mathcal{A}$.

Формула $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$ читается «$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$» и понимается как высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ оба истинны. Из различных смыслов, которые союз «и» имеет в русском языке, здесь выбран только один. Нельзя, например, обозначать через $a\wedge b$ совокупность, состоящую из элементов a и b.

Формула $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ читается «$\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$». Она обозначает высказывание, истинное, когда истинно хотя бы одно из высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, и ложное, когда они оба ложны. И здесь выбран только один из различных оттенков смысла союза «или» в русском языке.

Формула $(\mathcal{A}\supset\mathcal{B})$ может читаться как «$\mathcal{A}$ влечет $\mathcal{B}$», «если $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$», «из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$». Все эти обороты речи в русском языке (и их аналоги — в любом другом) имеют особенно много смысловых ассоциаций, обычно подразумевающих причинную связь между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Читателю надо отрешиться от подобных ассоциаций и запомнить, что формула $(\mathcal{A}\supset\mathcal{B})$ означает высказывание, истинное всегда, за исключением случая, когда $\mathcal{A}$ означает истинное, а $\mathcal{B}$ — ложное высказывание.

Значения в первых двух строчках столбца $V(\mathcal{A}\supset\mathcal{B})$ таблицы не должны вызывать сомнений. Странным может показаться то, что формуле $(\mathcal{A}\supset\mathcal{B})$ приписывается какое-то значение (более того — значение логической истины) и тогда, когда высказывание $\mathcal{A}$ ложно. Рассмотрим, однако, несомненно истинное высказывание «*если n делится на* 10*, то n делится на* 5». Но если истинно это общее высказывание, то истинны должны быть и его частные случаи. При $n = 25$ оно превращается в «*если* 25 *делится на* 10, *то* 25 *делится на* 5». Здесь посылка «25 *делится на* 10» ложна, а заключение «25 *делится на* 5» истинно. Этот случай предусмотрен третьей строкой таблицы. Примем $n = 12$: «*если* 12 *делится* *на* 10, *то* 12 *делится на* 5». Здесь и посылка и заключение ложны, что соответствует четвертой строке таблицы. Даже если кто-то и испытывает ощущение, что общее утверждение как бы не относится к подобным случаям, их все же нельзя воспринимать как опровержение этого общего утверждения.

Ну а как быть с ложным утверждением «*если* n *делится на* 5, *то* n *делится на* 10»? Не дают ли его частные случаи для $n = 12$ (посылка и заключение ложны) и $n = 20$ (посылка и заключение истинны) оснований для пересмотра таблицы (ее четвертой и первой строк)? Нет, из ложности общего утверждения логически не вытекает ложность его частных случаев. Скорее, наоборот, — это можно считать еще одним примером осмысленности третьей строки таблицы: истинные заключения могут быть получены и из ложной посылки.

В соответствии с таблицей истинности для формулы $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ должны считаться истинными и такие утверждения: «*если* $2 \times 2 = 5$, *то существуют такие целые числа* $n > 2$, $a > 0$, $b > 0$, c, *что* $a^n + b^n = c^n$» и «*если* $1 > 0$, *то* $x + y = y + x$» — отсутствие видимой смысловой связи между посылкой и заключением подобного утверждения не должно мешать приписать ему некоторое значение истинности (в обоих случаях T, даже если бы большая теорема Ферма еще не была доказана). Предмет логики — не смысл высказываний, а возможная связь между их логическими значениями.

Есть еще два способа прочтения формулы $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$: «$\mathcal{A}$ — *достаточное условие для* $\mathcal{B}$» и «$\mathcal{B}$ — *необходимое условие для* $\mathcal{A}$». В математике слова «достаточно» и «необходимо» всегда понимаются именно в таком смысле.

Наконец, формула $(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})$ имеет такие возможные прочтения: «$\mathcal{A}$ эквивалентно $\mathcal{B}$», «$\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$», «$\mathcal{A}$ — необходимое и достаточное условие для $\mathcal{B}$». Она обозначает высказывание, истинное, когда высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ оба истинны или оба ложны, и ложное, когда значения истинности этих высказываний различны.

Ряд интересных результатов, относящихся к области математической логики, можно получить, пользуясь для обозначения высказываний только пропозициональными константами T и F, переменными B_i, а также метаобозначениями $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... Многие из этих результатов будут рассмотрены в разд. 1.3. Но стоит еще раз взглянуть на примеры, приведенные на с. 11 и далее, и мы увидим, что глубинную структуру высказываний эти средства не раскрывают. Они не дают возможности связать значения высказываний со свойствами объектов, к которым эти высказывания относятся.

В расширенной символике для обозначения конкретных объектов будем применять символы a_1, a_2, ..., называемые *предметными константами*. Подразумевается, что предметная константа всегда обозначает один и тот же объект. В арифметике такой константой является, например, 0. В элементарной геометрии иногда используются константы: d — для обозначения величины прямого угла, π — для обозначения отношения длины окружности к ее диаметру. Для собственно геометрических объектов (точек, прямых и пр.) констант нет.

В логике мы стремимся сделать обозначения более стандартными, единообразными. Поэтому в качестве констант можно ограничиться лишь указанными символами a_1, a_2, ..., а их соответствие традиционным обозначениям задавать при описании интерпретации. Заметим, что обозначение a_i, в котором индексом у буквы a служит буква i, а не натуральное число, не является символом рассматриваемого языка. Довольно часто мы все же будем прибегать к обозначению a_i, но уже в качестве метаобозначения для какой-нибудь (произвольной) предметной константы, а не того объекта, который та обозначает.

Символы x_1, x_2, ..., называемые *предметными переменными*, также обозначают некоторые объекты, но, в отличие от предметных констант, каждая из предметных переменных может обозначать любой, совершенно произвольный, объект.

Для обозначения операций над объектами, порождающих новые объекты, служат так называемые *функциональные буквы*: f_1^1, f_2^1, ..., f_1^2, f_2^2, ... Верхний индекс k у буквы f_i^k указывает, сколько операндов (аргументов) должно быть у соответствующей операции. Нижний индекс i — это порядковый номер функциональной буквы в ряду обозначений f_1^k, f_2^k, ...

Требуемое число операндов у операции часто называют числом мест (для операндов) или ее вместимостью (хуже — местностью, еще хуже — арностью). Поэтому функциональные буквы f_1^1, $f_2^1, \ldots$ и соответствующие им операции называют *одноместными* (в латинизированной терминологии — *унарными*), буквы f_1^2, f_2^2, ... — *двухместными* (*бинарными*), буквы f_1^3, f_2^3, ... — *трехместными* (*тернарными*) и т. д.

В математической практике роль функциональных букв выполняют, во-первых, знаки операций: '$+$', '$-$', '$\times$', '$\sqrt{\ }$', '$|\ |$' (в обозначении $|\ x\ |$ для абсолютной величины числа x) и т. п., во-вторых, символы элементарных функций (обычно одноместных): exp, log, sin, ..., в-третьих, обозначения функций f, g, F, φ и т. д. Символы первых двух категорий связаны со вполне определенными функциональными объектами, их можно назвать функциональными константами. Примеры таких свойств мы видели в перечне равенств (1.1.1–2). Символы третьей категории, напротив, совершенно нейтральны и могут обозначать произвольные функции (операции). Для них напрашивается название функциональных переменных. Но в тех формальных теориях, которые мы будем изучать, функциональных переменных и обозначений для них не будет. В разд. 1.5 будет показано, что в рамках теории множеств эту роль могут исполнить обычные предметные переменные. У нас они могут иногда появляться вместо f_i^k в роли метапеременных для функциональных букв.

Обозначениями наиболее общего вида для объектов теории являются *термы*. Они строятся из предметных констант и переменных и функциональных букв с помощью *синтаксических символов*: '(', ')' и ',' по следующим правилам:

1) любая предметная константа — это терм,

2) любая предметная переменная — это терм,

3) если $t_1, \ldots, t_k$ — уже построенные термы, а f_i^k — k-местная функциональная буква, то выражение вида $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ — также терм.

Некоторые авторы к этим трем правилам добавляют четвертое:

4) никаких других термов не существует.

Но проще руководствоваться принципом: нет других правил — значит, нет и других термов.

Примеры термов:

$$a_1,\ x_{12},\ f_1^1(x_1),\ f_5^3(a_2, f_{10}^2(x_3, f_4^1(x_1)), f_2^1(f_7^1(f_4^2(a_1, x_2)))).$$

Заметим, что синтаксические символы в записи терма избыточны. Опустив их, мы получим в последнем случае запись

$$f_5^3 a_2 f_{10}^2 x_3 f_4^1 x_1 f_2^1 f_7^1 f_4^2 a_1 x_2,$$

которая (благодаря указанию вместимости каждой функциональной буквы) может быть расчленена на входящие в нее внутренние термы так же однозначно, как и с помощью этих символов. Включаем мы скобки и запятые в запись термов только ради простоты их прочтения.

Упражнение 1.2.1. Описать распознающую грамматику термов — способ проверки, является ли данное слово термом в бесскобочной записи.

Объект, соответствующий терму $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$, получается в результате применения операции, обозначенной буквой f_i^k, к объектам, представленными термами $t_1, \ldots, t_k$.

Напомним, что хотя мы и говорим «терм t_1», «терм $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$», сами записи «t_1», «$f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$» и т. п. термами не являются — это метаобозначения.

Упражнение 1.2.2. В развитие упражнения 1.1.2 построить порождающую грамматику термов — формальную теорию, теоремами которой были бы любые термы и только они.

В решении этого упражнения можно увидеть, как разрешается противоречие между требованием конечности алфавита формальной теории и использованием в ней бесконечного множества символов. В дальнейшем мы свободно будем пользоваться бесконечными алфавитами, не оговаривая, что нетрудно свести их к конечным. Впрочем, по существу бесконечный алфавит нужен лишь для предметных переменных и то лишь для того, чтобы иметь возможность писать сколь угодно сложные термы, а впоследствии и формулы. Любой терм или формула содержат лишь конечное число переменных.

Расширим, теперь уже окончательно, понятие элементарной формулы.

Предикатными буквами называются символы $P_1^1, P_2^1, \ldots, P_1^2, P_2^2, \ldots$ Как в случае функциональных букв, верхний индекс k у буквы P_i^k обозначает количество мест для аргументов, а нижний — i — служит порядковым номером.

Если P_i^k — k-местная предикатная буква, а $t_1, \ldots, t_k$ — термы, то запись вида $P_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ также представляет собой элементарную формулу. Элементарность понимается здесь в том смысле, что такая формула не содержит внутри себя других формул, хотя может содержать сколь угодно сложные термы — обозначения не высказываний, а объектов этих высказываний.

При содержательной интерпретации каждой предикатной букве P_i^k ставится в соответствие некоторое свойство, которым могут обладать или не обладать упорядоченные наборы из k объектов. Обычно такие свойства называются k-местными отношениями (иногда — *предикатами*), а термин «свойство» сохраняется за одноместными отношениями. Примеры отношений: «*быть положительным числом*», «*быть точкой*», «*быть прямой*» — одноместные отношения (свойства); «*быть меньше чем*», «*быть равным*», «*лежать на*» (отношение между точкой и прямой), «*проходить через*» (отношение между прямой и точкой, отличающееся от предыдущего лишь порядком аргументов) — двухместные отношения; «*давать в сумме*», «*лежать между*» (отношение между точками на прямой) — трехместные отношения.

Элементарная формула $P_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ содержательно понимается как запись утверждения, что объекты, являющиеся значениями термов t_1, …, t_k, находятся между собой в некотором определенном отношении. Когда мы хотим словами объяснить содержательный смысл отношения, обозначенного предикатной буквой P_i^k, то проще и точнее это можно сделать на примере формулы $P_i^k(x_1, \ldots, x_k)$, особенно при большом k. Например, лучше сказать, что формула $P_1^3(x_1, x_2, x_3)$ обозначает утверждение «*сумма чисел* x_1 *и* x_2 *равна* x_3», чем определить букву P_1^3 как обозначение для отношения «*давать в сумме*». В метаязыке никакие конкретные свойства предикатных букв P_i^k (как и функциональных букв f_i^k) не фиксируются — это должно быть сделано при построении каждой отдельной формальной теории с помощью ее аксиом.

Элементарные формулы вида $P_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ и любые формулы, которые могут быть из них получены с помощью только логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\equiv$, обозначают высказывания, истинность которых, вообще говоря, зависит от значений входящих в эти формулы переменных. В математике, да и не только в ней, часто возникает потребность сформулировать утверждение, истинность которого не зависит от конкретного выбора объекта или объектов, упоминаемых в нем. Примерами подобных утверждений могут быть тождества (1.1.1–2), или утверждение «*через две различные точки можно провести прямую и притом лишь одну*». В последнем случае, хотя речь и идет о единственной прямой, проходящей через две некоторые точки, фактически описывается свойство не какой-либо конкретной прямой, а всей совокупности точек и прямых, рассматриваемых в геометрии.

В нашей формальной символике должны найтись средства для записи и таких утверждений. Расширим понятие формулы, добавив к уже имеющимся еще одно правило построения формул: если x_i — предметная переменная, а $\mathcal{A}$ — формула, то $\forall x_i\, \mathcal{A}$ и $\exists x_i\, \mathcal{A}$ — тоже формулы. Выражения $\forall x_i$ и $\exists x_i$ называются *кванторными связками* или *кванторами* (по переменной x_i). Квантор $\forall x_i$ называется *квантором всеобщности*, а $\exists x_i$ — *квантором существования*. В формуле вида $\forall x_i\, \mathcal{A}$ (или $\exists x_i\, \mathcal{A}$) формула $\mathcal{A}$ называется ее *частью*, а связка $\forall x_i$ (соответственно $\exists x_i$) — *главной связкой*. Иногда говорят, что в этих формулах квантор «навешен» на формулу $\mathcal{A}$. Определение подформулы остается прежним, но область его применения расширяется на формулы вновь введенного вида. Формула $\mathcal{A}$ называется также *областью действия* квантора $\forall x_i$ в формуле $\forall x_i\, \mathcal{A}$ (квантора $\exists x_i$ — в формуле $\exists x_i\, \mathcal{A}$).

Формуле $\forall x_i\, \mathcal{A}$ приписывается следующий содержательный смысл: «утверждение $\mathcal{A}$ истинно, каково бы ни было значение переменной x_i (каков бы ни был объект, обозначенный этим символом)». Отсюда способ прочтения этой формулы: «для всех x_i $\mathcal{A}$» или «для любого x_i $\mathcal{A}$». Формула $\exists x_i\, \mathcal{A}$ читается: «существует x_i, такое что $\mathcal{A}$», подробнее — обозначает утверждение: «среди всех возможных значений переменной x_i найдется такое, при котором утверждение $\mathcal{A}$ истинно». В разд. 1.2.2 будут сформулированы более точные правила, по которым (в конкретных условиях) формуле $\forall x_i\, \mathcal{A}$ или $\exists x_i\, \mathcal{A}$ приписывается (если это вообще возможно) значение T или F (истина или ложь). А пока соберем воедино определение формулы и введем еще некоторые термины.

Элементарными формулами формальной теории $\mathbf{T}$ называются:

1) пропозициональные константы T и F,

2) пропозициональные буквы B_i, имеющиеся в теории $\mathbf{T}$,

3) слова вида $P_i^k(t_1, \ldots, t_k)$, где P_i^k — предикатная буква теории $\mathbf{T}$, а $t_1, \ldots, t_k$ — термы этой теории.

Формулы формальной теории $\mathbf{T}$ — это элементарные формулы данной теории, а также:

4) слова вида $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — ранее построенные формулы теории $\mathbf{T}$,

5) слова вида $\forall x_i\, \mathcal{A}$ и $\exists x_i\, \mathcal{A}$, где x_i — предметная переменная теории $\mathbf{T}$, а $\mathcal{A}$ — уже построенная формула этой теории.

Пункты 1) – 5) образуют полный набор правил построения формул. Пункты 1) – 3) выделены из этого перечня только для того, чтобы ввести термин «элементарная формула» для формул, не содержащих ни логических, ни кванторных связок.

Выражениями формальной теории будем называть ее термы и формулы.

Любое вхождение переменной x_i в формулу $\forall x_i\, \mathcal{A}$ или $\exists x_i\, \mathcal{A}$ называется *связанным.* Это относится и к случаю, когда формула $\forall x_i\, \mathcal{A}$ (или $\exists x_i\, \mathcal{A}$) является собственной подформулой некоторой формулы $\mathcal{B}$. Если вхождение переменной x_i в формулу $\mathcal{B}$ не связанно (т. е. не содержится ни в какой ее подформуле вида $\forall x_i\, \mathcal{A}$ или $\exists x_i\, \mathcal{A}$), то оно называется *свободным.* Подчеркнем, что эти определения относятся не к переменным, а к вхождениям переменных в формулу, т. е. к каждому отдельному появлению символа x_i в том или ином месте формулы. Говорят, что переменная *связана* в формуле, если последняя содержит хотя бы одно связанное вхождение этой переменной, и *свободна* в формуле, которая содержит свободное вхождение этой переменной. При этом оказывается, что переменная может быть как связанной, так свободной в одной и той же формуле.

Пример. В формуле

$$(P_1^2(x_1, x_2) \supset \forall x_1\, (P_3^2(x_2, x_1) \vee \exists x_3\, (P_2^3(x_1, x_3, x_2) \wedge P_5^1(x_3))))$$

содержатся 4 вхождения переменной x_1 и по 3 вхождения переменных x_2 и x_3. Все вхождения переменной x_3 связанны, так как все они содержатся в подформуле $\exists x_3\, (P_2^3(x_1, x_3, x_2) \wedge P_5^1(x_3))$ данной формулы. Все вхождения переменной

x_2 свободны, так как формула не содержит кванторов по этой переменной, а следовательно, и подформул вида $\forall x_2\, \mathcal{A}$ или $\exists x_2\, \mathcal{A}$. Первое вхождение переменной x_1 свободно, а остальные три — связанны, так как они содержатся либо в кванторе $\forall x_1$ (второе вхождение), либо в области действия этого квантора (третье и четвертое вхождения). Таким образом, можно сказать, что переменная x_2 свободна в данной формуле, переменная x_3 — связана, переменная x_1 — одновременно свободна и связана, а переменная x_4 — ни связана, ни свободна, так как данная формула вообще не содержит вхождений этой переменной.

Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется *замкнутой.*

1.2.2. Интерпретации

Уже не раз выше было сказано, что формальные теории интересны не столько сами по себе, сколько из-за возможности сопоставить символам и выражениям некоторые содержательные понятия. В общих чертах говорилось и о том, как это делается. Теперь в нашем изложении металогики настало время дать более точные определения.

Будем говорить, что задана *интерпретация* I некоторой формальной теории $\mathbf{T}$, если:

1) указано некоторое множество D (конечное или бесконечное, но не пустое), называемое *предметной областью* интерпретации I;

2) каждой предметной константе a_i теории $\mathbf{T}$ (если они есть) сопоставлен некоторый элемент a_i^* предметной области D;

3) каждой функциональной букве f_i^k теории $\mathbf{T}$ (с той же оговоркой) сопоставлена k-местная операция f_i^{k*} над элементами области D, т. е. функция, которая любой совокупности $u_1, \ldots, u_k$ объектов этой области ставит в соответствие один определенный элемент этой же области;

4) каждой пропозициональной букве B_i теории $\mathbf{T}$ сопоставлено одно из двух логических значений: «истина» или «ложь» (обозначаемых, как всегда, буквами T и F); значение, сопоставленное B_i, обозначим B_i^*;

5) каждой предикатной букве P_i^k теории $\mathbf{T}$ сопоставлено k-местное отношение P_i^{k*} между объектами из области D.

В этом определении ничего не говорится, что может быть сопоставлено предметным переменным x_i. Подразумевается, что каждая предметная переменная может обозначать (т. е. ей может быть сопоставлен) любой элемент предметной области D. Ввиду открывающегося здесь произвола бессмысленно говорить о значении переменной (а также о значении выражения, т. е. терма или формулы) в данной интерпретации. Понятие значения выражения приобретает смысл, когда, кроме интерпретации, заданы значения переменных, входящих в это выражение.

Назовем *набором* значений переменных $y_1, \ldots, y_m$ множество s пар: $s = \{(y_1, v_1), \ldots, (y_m, v_m)\}$, где $v_1, \ldots, v_m$ — элементы предметной области D рассматриваемой интерпретации. Все переменные $y_1, \ldots, y_m$, содержащиеся в наборе, должны быть попарно различны, а их значения $v_1, \ldots, v_m$ могут частично (или полностью) совпадать. Набор задает условия, в которых желательно знать значение отдельной переменной, а также терма или формулы.

Значение терма t или формулы $\mathcal{F}$ в интерпретации I на наборе s обозначим $V_{\mathrm{I},s}(t)$ или, соответственно, $V_{\mathrm{I},s}(\mathcal{F})$. Так как в большинстве случаев бывает ясно, о какой интерпретации идет речь, то индекс I можно не писать и пользоваться обозначениями $V_s(t)$ и $V_s(\mathcal{F})$. Если же из контекста ясно, какой набор имеется в виду, или это безразлично, то можно опускать и индекс s и писать $V(t)$ или $V(\mathcal{F})$, что мы фактически и делали в предыдущем разделе, когда определяли способ вычисления значений формул с различными главными связками с помощью соответствующих таблиц истинности (где предметные переменные явно не присутствовали в формулах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$).

Значения термов определяются по следующим правилам.

1) $V_s(a_i) = a_i^*$ для любого набора s, т. е. значение предметной константы зависит только от интерпретации, но не от набора.

2) Если переменная x_i совпадает с одной из переменных $y_1, \ldots, y_m$ набора s, например, с переменной y_j, то $V_s(x_i) = v_j$, в противном случае $V_s(x_i)$ не определено. Другими словами, если $s = \{(y_1, v_1), \ldots, (y_m, v_m)\}$, то $V_s(y_j) = v_j$, $j = 1, \ldots, m$, а значения остальных переменных на наборе s не определены.

3) $V_s(f_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = f_i^{k*}(V_s(t_1), \ldots, V_s(t_k))$, т. е. значение терма $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ получается применением операции f_i^{k*} к значениям термов $t_1, \ldots, t_k$. Если хотя бы одно из значений $V_s(t_1), \ldots, V_s(t_k)$ не определено, то и значение терма $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ на наборе s также не определено.

Теорема 1.2.1. *Если все переменные, входящие в терм t, содержатся в наборе s, то значение терма t на этом наборе определено и принадлежит предметной области D рассматриваемой интерпретации. В противном случае (когда в терм t входит хотя бы одна переменная, не содержащаяся в наборе s) значение $V_s(T)$ не определено.*

Справедливость теоремы вытекает из того, что: 1) каждому правилу построения термов соответствует правило вычисления их значений, 2) по определению интерпретации каждая предметная константа a_i^* — элемент предметной области D, 3) k-местная операция f_i^{k*} всюду определена над этой же областью, 4) по определению набора значений переменных все эти значения также принадлежат области D.

В дальнейшем будем считать подобные разъяснения достаточно полными доказательствами (для теорем сходного уровня сложности), а сейчас приведем более полное доказательство. Оно проводится индукцией по числу n вхождений функциональных букв в терм t.

Доказательство. База индукции — это случай $n = 0$. При этом терм не содержит функциональных букв, т. е. строится по одному из правил 1) или 2) разд. 1.2.1. Если терм образован по правилу 1), то он представляет собой предметную константу a_i, его значение a_i^* определено и принадлежит области D. Если терм образован по правилу 2), то он представляет собой предметную переменную x_i, которая либо содержится среди переменных набора s, тогда ее значение