М. М. Медынский

Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях

Книга 2: Числовые последовательности и прогрессии

Москва
Эдитус 2014

УДК 51
ББК 22.1
М42

ISBN 978-5-00058-180-3

М.М.Медынский.
Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях. Книга 2: Числовые последовательности и прогрессии. М.: Эдитус, 2015. - 208 с.

В книге изложены основные методы решения задач по разделу «Числовые последовательности и прогрессии». Дан необходимый теоретический материал, приведены примеры с решениями, задания и упражнения для самостоятельной работы.

Книга адресована школьникам старших классов, абитуриентам, учителям, преподавателям подготовительных отделений вузов и всем, кто любит математику.

ISBN 978-5-00058-180-3

Оглавление

Глава 1. Числовые последовательности

1.1. Понятие числовой последовательности

<u>Определение 1.1.</u> Совокупность чисел, написанных через запятую, каждое из которых снабжено своим номером, указывающим место этого числа в совокупности, называется ***<u>числовой последовательностью.</u>***

<u>Например:</u>
а) последовательность всех натуральных чисел 1, 2, 3, 4, … , расположенных в порядке возрастания;
б) последовательность всех чисел, обратных натуральным числам: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... , $\frac{1}{n}$, ... ;
в) последовательность квадратов натуральных чисел первой сотни 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, расположенных в порядке возрастания.

Каждое число, входящее в последовательность, называется *<u>членом последовательности.</u>*

Первый член обозначается a_1, второй член a_2, …, n-й член – a_n и т.д. Таким образом, индекс в обозначении члена последовательности показывает место этого члена в последовательности.

Вся числовая последовательность обозначается в общем виде так: a_1, a_2, a_3, …, a_n, … или знаком $\{a_n\}$, $n \in N$.

Последовательности могут быть как *бесконечными*, число членов которых бесконечно (например, последовательности а) и б) в примере), так и *конечными*, число членов которых конечно (например, последовательность в)).

Рассмотрим *способы задания* последовательностей.
1) *<u>Аналитический способ задания последовательности</u>*.

Этот способ подразумевает задание формулы, позволяющей вычислить любой член последовательности по его номеру n. Сама формула при этом называется *<u>формулой общего члена последовательности</u>*.

<u>Например,</u> если задано, что $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$, то вычисляя значения

$a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2+1} = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3+1} = \frac{5}{7}, \ldots$, получаем последовательность: $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \ldots, \frac{2n-1}{2n+1}, \ldots$.

2) <u>*Рекуррентный способ задания последовательности.*</u>

Иногда последовательность задается <u>*рекуррентным соотношением*</u> (от латинского слова *recurrens* – возвращающийся), выражающим следующие члены последовательности через предыдущие.

<u>Например.</u>

а) Рекуррентное соотношение $a_1=1$, $a_{n+1} = a_n + 1$, для $n = 1,2,3, \ldots$ задает последовательность <u>*натуральных чисел*</u>: 1, 2, 3, … .

б) Рекуррентное соотношение $a_0 =1$, $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, для $n = 2,3,4,\ldots$ задает последовательность <u>*чисел Фибоначчи:*</u> 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … (каждый последующий член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих).

3) <u>*Описательный (словесный) способ задания числовой последовательности.*</u>

Заметим, что в некоторых случаях для последовательности чисел не удается указать ни формулы общего члена последовательности, ни рекуррентного способа вычисления ее членов.

В таких случаях последовательность задается *описанием способа получения ее членов*.

<u>Например.</u>

а) Последовательность 2, 3, 5, 7, 11, … простых чисел состоит из натуральных чисел, делящихся только на 1 и само на себя.

б) Последовательность 3,1; 3,14; 3,142; 3,1416; 3,14159; … состоит из приближенных значений числа π с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т.д.

<u>**Замечание.**</u> Заметим, что написать формулу общего члена последовательности или указать рекуррентный способ вычисления ее членов зачастую непросто. Например, несмотря на усилия многих великих математиков, до настоящего времени для последовательности простых чисел неизвестна ни формула общего члена последовательности, ни рекуррентный способ ее задания. ▼

1.1.1. Задачи на понятие числовой последовательности

1.1. Найти первые семь членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = [\sqrt{n^2+n}]$.

Р е ш е н и е.

<u>**Замечание.**</u> Символ $[x]$ обозначает *целую часть действительного числа x*. По определению целая часть действительного числа x равна наибольшему целому числу, не превосходящему x.

<u>Например:</u> $[1]=1$, $[2{,}74]=2$, $[\sqrt{3}]=1$, $[-2{,}75]=-3$. ▼

Опираясь на данное понятие, последовательно вычисляем:

$a_1 = [\sqrt{1^2+1}] = \sqrt{2} = 1$, $a_2 = [\sqrt{2^2+2}] = \sqrt{6} = 2$, $a_3 = [\sqrt{3^2+3}] = \sqrt{12} = 3$,

$a_4 = [\sqrt{4^2+4}] = \sqrt{20} = 4$, $a_5 = [\sqrt{5^2+5}] = \sqrt{30} = 5$, $a_6 = [\sqrt{6^2+6}] = \sqrt{42} = 6$,

$a_7 = [\sqrt{7^2+7}] = \sqrt{56} = 7$.

О т в е т: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, $a_6 = 6$, $a_7 = 7$.

1.2. Написать первые пятнадцать членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, заданной рекуррентным соотношением $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, последовательно вычисляем:

$$a_3 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2,\quad a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{2} = 1,\quad a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2},\quad a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$

$$a_7 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1,\quad a_8 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,\quad a_9 = \frac{a_8}{a_7} = \frac{2}{1} = 2,\quad a_{10} = \frac{a_9}{a_8} = \frac{2}{2} = 1,$$

$a_{11}=\dfrac{a_{10}}{a_9}=\dfrac{1}{2}$, $a_{12}=\dfrac{a_{11}}{a_{10}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}$, $a_{13}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$, $a_{14}=\dfrac{a_{13}}{a_{12}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$,

$a_{15}=\dfrac{a_{14}}{a_{13}}=\dfrac{2}{1}=2\cdot$

О т в е т: 1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 2.

1.3. Найти 1224-й член последовательности $\{a_n\}$, $n\in N$:

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{если } n=3k-2,\\ -2, & \text{если } n=3k-1,\\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } n=3k,\ k\in N.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как $1224=3\cdot 408$, т.е. $1224=3\cdot k$, где $k=408$, то $a_{1224}=\dfrac{1}{1224}$.

О т в е т: $a_{1224}=\dfrac{1}{1224}$.

1.4. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, $n\in N$, если известны следующие ее первые члены: 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{11}$, … .

Р е ш е н и е. Отметим особенности построения данной числовой последовательности.

Знаменатели дробей представляют собой последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, … . Знаки членов последовательности чередуются: члены с нечетными индексами – положительны, а члены с четными индексами – отрицательны.

Откуда заключаем, что общий член данной последовательности имеет вид: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{2n-1}$, $n \in N$.

О т в е т: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{2n-1}$, $n \in N$.

1.5. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ задана рекуррентным соотношением $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$ при $n \geq 1$. Найти формулу общего члена этой последовательности.

Р е ш е н и е. Найдем все последовательности вида $a_n = q^n$, $n \in N$, где q – некоторое число, которое удовлетворяют соотношению: $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$ при $n \geq 1$.

Так как $a_{n+2} = q^{n+2}$, $a_{n+1} = q^{n+1}$, $a_n = q^n$, то получаем равенство: $q^{n+2} = 7q^{n+1} - 12q^n \quad \Leftrightarrow \quad q^n \cdot q^2 = 7q^n \cdot q - 12q^n \quad \Leftrightarrow$ $q^n \cdot (q^2 - 7 \cdot q + 12) = 0$.

Так как $q \neq 0$, то получаем уравнение $q^2 - 7 \cdot q + 12 = 0$, откуда получаем два значения $q_1 = 3$, $q_2 = 4$.

Таким образом, последовательности $a_n = 3^n$ и $a_n = 4^n$ удовлетворяют заданному рекуррентному соотношению.

Но тогда последовательность вида $a_n = b_1 \cdot 3^n + b_2 \cdot 4^n$, где b_1 и b_2 - некоторые числа, удовлетворяет этому же рекуррентному соотношению.

Действительно, $a_{n+2} = b_1 \cdot 3^{n+2} + b_2 \cdot 4^{n+2} = 9b_1 \cdot 3^n + 16b_2 \cdot 4^n$ и $7a_{n+1} - 12a_n = 7(b_1 \cdot 3^{n+1} + b_2 \cdot 4^{n+1}) - 12(b_1 \cdot 3^n + b_2 \cdot 4^n) = 21b_1 \cdot 3^n +$ $+28b_2 \cdot 4^n - 12b_1 \cdot 3^n - 12b_2 \cdot 4^n = 9b_1 \cdot 3^n + 16b_2 \cdot 4^n.$

Найдем b_1 и b_2. Используя условия $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \cdot 3^1 + b_2 \cdot 4^1, \\ a_2 = b_1 \cdot 3^2 + b_2 \cdot 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = b_1 \cdot 3 + b_2 \cdot 4, \\ 1 = b_1 \cdot 9 + b_2 \cdot 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = b_1 \cdot 9 + b_2 \cdot 12, \\ 1 = b_1 \cdot 9 + b_2 \cdot 16. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2 = -4 \cdot b_2$, откуда находим $b_2 = -\frac{1}{2}$. Подставляя в первое уравнение, получаем $1 = b_1 \cdot 3 + 4 \cdot (-\frac{1}{2})$, откуда находим $b_1 = 1$.

Итак, формула общего члена данной последовательности имеет вид: $a_n = 3^n - \frac{1}{2} \cdot 4^n$ или $a_n = 3^n - 2^{2n-1}$, $n \geq 1$.

О т в е т: $a_n = 3^n - 2^{2n-1}$, $n \geq 1$.

Замечание. Заметим, что определить особенности построения числовой последовательности и на их основе найти формулу общего члена последовательности, часто бывает непросто. В этих случаях применяется метод математической индукции, и соответствующие примеры приведены ниже в разделе 1.3. ▼

Упражнения.

1. Найти первые пять членов последовательности $\{a_n\}, n \in N$, с общим членом $a_n = n^4 + 1$.
2. Найти первые семь членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = n^{(-1)^n}$.
3. Найти первые восемь членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = \frac{1}{n+3}$.
4. Найти первые пять членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n-1}}{2}$.
5. Найти первые четыре члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = \frac{1}{n!}$.
6. Найти первые шесть членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

7. Найти первые пять членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, с общим членом $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

8. Найти первые семь членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, задаваемой рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$.

9. Найти первые пять членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, задаваемой рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

10. Найти первые шесть членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, задаваемой рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $a_1 = 1$.

11. Найти первые четыре члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, задаваемой рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$.

12. Найти первые пять членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, задаваемой рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

13. Найти первые четыре члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, задаваемой рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 5 \cdot 2^n$, $a_1 = 7$.

14. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, если известны следующие ее первые члены 1, $\frac{4}{2}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{25}{120}$, $\frac{36}{720}$, … .

15. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, если известны следующие ее первые члены 3, −3, 3, −3, 3, −3, ….

16. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, если известны следующие ее первые члены $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \dots$.

17. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, если известны следующие ее первые члены 2, 10, 26, 82, 242, 730, … .

18. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$, если известны следующие ее первые члены 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{8}, \dots$.

19. Найти 1734-й член последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, если:

$$a_n = \begin{cases} 2n+1, & \text{если } n = 2k, \\ 3n-1, & \text{если } n = 2k-1, \ k \in N \end{cases}$$

20. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ задана рекуррентным соотношением $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 3a_n + 5 \cdot 2^n$, $n \ge 1$. Найти формулу общего члена этой последовательности.

21. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ задана рекуррентным соотношением $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n \ge 1$. Найти формулу общего члена этой последовательности.

1.2. Свойства числовых последовательностей

1.2.1. Монотонные последовательности

Определение 1.2. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, называется *возрастающей*, если для любого номера n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ и *убывающей*, если для любого номера n выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$.

Последовательность $\{a_n\}, n \in N$, называется *неубывающей*, если $a_{n+1} \geq a_n$, и *невозрастающей*, если $a_{n+1} \leq a_n$, для любого номера n.

Например: 1, 2, 3, 4, 5, … - последовательность возрастающая; 1, 0, −1, −2, −3, −4, −5…- последовательность убывающая; 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6,… - последовательность неубывающая; 11, 10, 10, 9, 8, 8, 7, 6,… - последовательность невозрастающая.

Все такие последовательности называются *монотонными.*

Возрастающие и убывающие последовательности называют *строго монотонными.*

Замечание. Заметим, что в некоторых случаях важна монотонность последовательности не вообще, а начиная с некоторого (не обязательно первого) члена. Иными словами, рассматриваются последовательности – монотонные, начиная с некоторого номера. В этих случаях используется более общее определение «монотонной последовательности».▼

Определение 1.3. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*), если найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$, выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

Приведем без доказательства основные теоремы о свойствах монотонных числовых последовательностей, используемые при решении задач.

<u>Теорема 1.1.</u> Если последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ *возрастающая* (*убывающая*) и c - некоторое число, то:
1) $\{a_n + c\}$, $n \in N$ - *возрастающая* (*убывающая*) последовательность;
2) $\{ca_n\}, n \in N$ -*возрастающая* (*убывающая*) последовательность при $c > 0$;
3) $\{ca_n\}, n \in N$ -*убывающая* (*возрастающая*) последовательность при $c < 0$.

В частности, если последовательность $\{a_n\}, n \in N$ - *возрастающая* (*убывающая*), то последовательность $\{-a_n\}$, $n \in N$ - *убывающая* (*возрастающая*).

<u>Например.</u> Последовательность $\{n^2\}$, $n \in N$ - *возрастающая*. Тогда последовательности $\{n^2 + 7\}$ и $\{7n^2\}$, $n \in N$ - *возрастающие*, а последовательности $\{-7n^2\}$ и $\{-n^2\}, n \in N$ - *убывающие*.

<u>Теорема 1.2.</u> Если одна из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n \in N$ - *возрастающая*, а другая *неубывающая*, то:
1) $\{a_n + b_n\}, n \in N$ - *возрастающая* последовательность;
2) $\{a_n b_n\}, n \in N$ -*возрастающая* последовательность, если $a_n > 0$, $b_n > 0$ при любых *n*;
3) $\{a_n b_n\}, n \in N$ - *убывающая* последовательность, если $a_n < 0$, $b_n < 0$ при любых *n*.

<u>Например</u>. Последовательность $\{n^2\}$, $n \in N$ - возрастающая, а последовательность $\{[\sqrt{n}]\}$, $n \in N$, где $[\sqrt{n}]$ - целая часть числа $\sqrt{n}$, - неубывающая. Тогда последовательности $\{n^2 + [\sqrt{n}]\}$ и $\{n^2 \cdot [\sqrt{n}]\}, n \in N$ - *возрастающие*. Последовательность $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$, $n \in N$ - возрастающая, а последовательность $\left\{-\frac{1}{[\sqrt{n}]}\right\}$, $n \in N$ - неубывающая. Члены последовательностей – отрицательные

числа. Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{n[\sqrt{n}]}\right\}, n \in N$ - убывающая.

<u>Теорема 1.3.</u> Если одна из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n \in N$ - *убывающая*, а другая *невозрастающая*, то:
1) $\{a_n + b_n\}, n \in N$ - *убывающая* последовательность;
2) $\{a_n b_n\}, n \in N$ - *убывающая* последовательность, если $a_n > 0$, $b_n > 0$ при любых *n*;
3) $\{a_n b_n\}, n \in N$ - *возрастающая* последовательность, если $a_n < 0$, $b_n < 0$ при любых *n*.

<u>Например.</u> Последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, n \in N$ - убывающая, а последовательность $\left\{\frac{1}{[\sqrt{n}]}\right\}, n \in N$, где $[\sqrt{n}]$ - целая часть числа $\sqrt{n}$, - невозрастающая.

Тогда последовательности $\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{[\sqrt{n}]}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{n^2[\sqrt{n}]}\right\}$, $n \in N$ - *убывающие*.

Последовательность $\{-n\}$, $n \in N$ - убывающая, а последовательность $\{-[\sqrt{n}]\}$, $n \in N$ - невозрастающая. Члены последовательностей – отрицательные числа. Тогда последовательность $\{(-n)\cdot(-[\sqrt{n}])\} = \{n \cdot [n]\}$, $n \in N$ - *возрастающая*.

<u>Теорема 1.4.</u> Если последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ - *возрастающая* (*убывающая*), то последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}, n \in N$ - *убывающая* (*возрастающая*).

<u>Например,</u> последовательность $\{n^2\}, n \in N$ - возрастающая;
последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, n \in N$ - убывающая; последователь-

ность $\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}, n \in N$ - возрастающая; последовательность $\{-n^2\}$, $n \in N$ - убывающая.

1.2.2. Ограниченные последовательности

Определение 1.4. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, называется *ограниченной*, если существуют такие два числа a и b, что для всех номеров n выполняется неравенство $a \le a_n \le b$, где $a \ne b$.

Например, последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ заданная формулой $a_n = \frac{1}{n}$, то есть последовательность 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... , $\frac{1}{n}$, ... ограничена, так как $0 < a_n \le 1$ при любом $n \in N$.

Определение 1.5. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, называется *ограниченной сверху*, если существуют такое число b, что для всех номеров n выполняется неравенство $a_n \le b$.

Например, последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, заданная формулой $a_n = 2 - n^2$, то есть последовательность $1, -2, -7, -14, \ldots$ ограничена сверху, так как $a_n \le 1$ при любом $n \in N$.

Определение 1.6. Последовательность $\{a_n\}, n \in N$, называется *ограниченной снизу*, если существуют такое число a, что для всех номеров n выполняется неравенство $a_n \ge a$.

Например, последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, заданная формулой $a_n = n^2 - 4$, то есть последовательность –3, 0, 5, 12, … ограничена снизу, так как $a_n \ge -3$ при любом $n \in N$.

Из данных определений следует, что *последовательность, ограниченная сверху и снизу, является ограниченной последовательностью*.

<u>Например</u>. Последовательность $\{a_n\}, n\in N$, задаваемая формулой $a_n = \frac{5n-2}{n+1} = 5 - \frac{7}{n+1}$, т.е. последовательность $\frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{13}{4}, \ldots$, ограничена снизу и сверху, так как $a_n \geq \frac{3}{2}$ и $a_n < 5$ при любом $n\in N$. Откуда заключаем, что последовательность $\{a_n\}, n\in N$ ограничена, так как $\frac{3}{2} \leq a_n < 5$ при любом $n\in N$.

Последовательность может быть не ограничена ни сверху, ни снизу, то есть может быть <u>неограниченной</u>.

<u>Например:</u> последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$, заданная формулой $a_n = (-1)^n \cdot n$, то есть последовательность –1, 2, –3, 4, –5, … - неограниченная, так как для любых двух чисел a и b ($a < b$), очевидно, всегда найдется такой член последовательности, который больше b или меньше a.

<u>**Определение 1.7.**</u> Последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$, называется <u>*постоянной*</u>, если все ее члены равны между собой.

<u>Например:</u> последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$, заданная формулой $a_n = 5$, то есть последовательность 5, 5, 5, … - постоянная.

1.2.3. Задачи на свойства числовых последовательностей

1.6. Доказать, что последовательность $a_n = \frac{6-n}{5n-1}$, $n\in N$ является убывающей последовательностью.

Р е ш е н и е. Требуется доказать, что $a_{n+1} < a_n$ при всех $n\in N$.

Определим знак разности:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6-(n+1)}{5(n+1)-1} - \frac{6-n}{5n-1} = \frac{5-n}{5n+4} - \frac{6-n}{5n-1} = \frac{(5-n)(5n-1)-(6-n)(5n+4)}{(5n+4)(5n-1)} =$$

$$= \frac{-29}{(5n+4)(5n-1)} < 0 \text{ при всех } n\in N.$$

Следовательно, $a_{n+1} < a_n$ при всех $n \in N$ и данная последовательность – убывающая, что и требовалось доказать.

1.7. Является ли монотонной последовательность $a_n = \dfrac{2^n}{n!}, n \in N$?

Р е ш е н и е. Решим задачу двумя способами.

<u>1-*й способ*</u>. Последовательность $\{a_n\}$ является монотонной, если для любого номера n (то есть для всех $n \ge 1$) выполняются неравенства $a_{n+1} \ge a_n$ или $a_{n+1} \le a_n$.

Определим знак разности:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n}{n!} \cdot \left(\frac{2}{n+1} - 1 \right) = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1-n}{n+1} \le 0$$

при всех $n \ge 1$, причем $a_{n+1} - a_n < 0$ при $n > 1$.

Таким образом, последовательность является монотонной (невозрастающей).

<u>Замечание.</u> Заметим, что иногда факт монотонности последовательности удобнее определять не по знаку разности последующего и предыдущего членов, а по их отношению. ▼

<u>2-*й способ*</u>. Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{n!(n+1) \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

При $n=1$ получаем $\dfrac{a_2}{a_1} = 1$, значит, $a_2 = a_1$, при $n \ge 2, n \in N$, имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, значит, $a_{n+1} < a_n$.

Следовательно, последовательность является невозрастающей, так как $a_1 = a_2$, $a_2 > a_3 > a_4 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$.

О т в е т: последовательность монотонная (невозрастающая).

1.8. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ с общим членом $a_n = \dfrac{-1}{n^2 + 2n + 3}$ является возрастающей последовательностью.

Р е ш е н и е. Воспользуемся свойствами монотонных последовательностей.

Последовательность $\{n^2\}$, $n \in N$, является возрастающей как квадрат последовательности $\{n\}$, $n \in N$, с положительными членами. Последовательность $\{n^2 + 2n + 3\}$, $n \in N$, является возрастающей как сумма двух возрастающих последовательностей $\{n^2\}$ и $\{2n + 3\}$, $n \in N$.

Следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{1}{n^2 + 2n + 3}\right\}, n \in N$ - убывающая. Но тогда последовательность $\left\{\dfrac{-1}{n^2 + 2n + 3}\right\}, n \in N$ является возрастающей в силу теоремы 1.1, что и требовалось доказать.

1.9. Исследовать на монотонность последовательность, задаваемую формулой общего члена: $a_n = n^2 - 10n + 25$, $n \in N$.

Р е ш е н и е. Определим знак разности:

$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 10(n+1) + 25 - (n^2 - 10n + 25) = n^2 + 2n + 1 - 10n -$
$-10 + 25 - n^2 + 10n - 25 = 2n - 9$.

Полученная разность отрицательна при n = 1, 2, 3, 4 и положительна при всех $n \geq 5$. Следовательно, рассматриваемая последовательность является немонотонной.

О т в е т: последовательность немонотонная.

Замечание. Заметим, однако, что рассмотренная последовательность чисел является монотонно возрастающей, начиная с пятого члена. ▼

1.10. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ с общим членом $a_n = \dfrac{n^2 + 48}{n + 4}$ является монотонной, начиная с некоторого номера.

Р е ш е н и е. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ является моно-