И. В. Ященко
С. А. Шестаков
А. С. Трепалин

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Подготовка к ЕГЭ по математике

15 16 17 18 19 20 21

21 задача

2015

Базовый и профильный уровни

ФГОС

Методические указания

УДК 373.167.1
ББК 22.141я721
Я97

Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С.
Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году.
Базовый и профильный уровни. Методические указания
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2015
287 с.
ISBN 978-5-4439-2102-0

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике, для организации и проведения итогового повторения, диагностики проблемных зон в знаниях старшеклассников и их последующей коррекции.

Пособие написано в соответствии с утвержденными демоверсиями и спецификациями ЕГЭ по математике 2015 года. Оно содержит подробный разбор структуры экзамена, а также позадачные комментарии, тренинги и диагностические работы в формате ЕГЭ. Материалы пособия апробированы в сотнях школ различных регионов России при организации подготовки к Единому государственному экзамену. Пособие позволяет проверить навыки решения задач, качество усвоения материала, выстроить индивидуальные траектории повторения и эффективно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

Пособие адресовано учащимся старших классов и их родителям, учителям математики и методистам.

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги: *Ященко И. В. и др.* Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году. Базовый и профильный уровни. Методические указания / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, А. С. Трепалин. — М.: МЦНМО, 2015. — 288 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

© Ященко И.В., Шестаков С.А.,
Трепалин А.С., 2015
© МЦНМО, 2015.

ISBN 978-5-4439-2102-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЕГЭ-2015 по математике и как к нему готовиться **3**

Диагностические работы за курс 10 класса **53**
Диагностическая работа №1 55
Диагностическая работа №2 59

Подготовка к части 1 ЕГЭ по математике. Задачи 1—9 **63**
Диагностическая работа №3 65
Диагностическая работа №4 67
Задача 1 69
Задача 2 71
Задача 3 76
Задача 4 84
Задача 5 89
Задача 6 92
Задача 7 93
Задача 8 95
Задача 9 105
Диагностическая работа №5 110
Диагностическая работа №6 113

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 10—14 **115**
Диагностическая работа №7 117
Диагностическая работа №8 118
Задача 10 119
Задача 11 120
Задача 12 125
Задача 13 128
Задача 14 131
Диагностическая работа №9 133
Диагностическая работа №10 134

Задания с кратким ответом (задачи 1—14). Диагностические работы **135**
Диагностическая работа №11 136
Диагностическая работа №12 139
Диагностическая работа №13 142
Диагностическая работа №14 145
Диагностическая работа №15 148
Диагностическая работа №16 152

Подготовка к части 2 ЕГЭ по математике. Задачи 15—21 **155**
Диагностическая работа №17 157
Диагностическая работа №18 159

Задача 15 161
Задача 16 164
Задача 17 167
Задача 18 169
Задача 19 173
Задача 20 178
Задача 21 181
Диагностическая работа №19 185
Диагностическая работа №20 187

Тренировочные варианты ЕГЭ по математике 189
Диагностическая работа №21 191
Диагностическая работа №22 195
Диагностическая работа №23 199
Диагностическая работа №24 203
Диагностическая работа №25 208
Диагностическая работа №26 212
Диагностическая работа №27 217
Диагностическая работа №28 221
Диагностическая работа №29 225
Диагностическая работа №30 230

Приложение 235
Итоги ЕГЭ-2014 по математике 237
Реальные (открытые) варианты ЕГЭ по математике 255
2014 год 256
Вариант 103 256
Вариант 357 261
2013 год 266
Вариант 202 266
Вариант 303 271

Ответы 275

ЕГЭ-2015 по математике и как к нему готовиться (методические рекомендации с разбором задач)

В 2015 году Единый государственный экзамен по математике претерпит существенные изменения по сравнению с экзаменом 2014 года. Эти изменения касаются, прежде всего, структуры КИМов и экзамена в целом: предполагается, что выпускник сможет выбрать один из двух вариантов экзамена — на базовом уровне (для выпускников, которым не требуется высокий балл — к ним относятся те, кто не собирается продолжать образование и те, кто собирается делать это в университетах гуманитарного направления; вариант состоит из 20 заданий с кратким ответом, продолжительность экзамена — 3 часа) или на профильном уровне (структура КИМов здесь аналогична — с некоторыми изменениями — структуре прошлых лет, продолжительность экзамена — 3 часа 55 минут).

Форма и содержание экзамена требуют более полного описания типов и особенностей заданий каждой из двух новых демоверсий и открытого банка задач (именно на его основе формируются задания с кратким ответом). Такому описанию, снабженному примерами решения задач, аналогичных задачам демоверсий, и посвящена эта часть пособия. Надеемся, что она окажется полезной как выпускникам, так и учителям старшей школы, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Настоящее пособие предназначено для организации итогового повторения и завершающего этапа подготовки к экзамену; оно включает как задания, которые несколько проще возможных задач ЕГЭ, так и задания, которые несколько сложнее этих задач. Все задания сгруппированы в 30 диагностических работ и 21 тематический тренинг (по одному тренингу на каждую задачу профильного варианта экзамена). Для подготовки к экзамену базового уровня рекомендуется использовать те же тренинги, ограничившись заданиями 1–14 (задания с кратким ответом).

Каждый тренинг состоит из 20 заданий: 10 подготовительных и 10 зачетных. Уровень сложности подготовительных задач нарастает, пока в последних заданиях не достигает уров-

ня сложности реальных заданий экзамена; уровень сложности зачетных заданий в целом соответствует уровню сложности реальных заданий ЕГЭ.

Первые две диагностические работы предназначены для завершающего этапа традиционного осеннего повторения материала 10-го класса. Они составлены по образцу демоверсии и состоят из 21 задачи каждая. При этом одна из работ не содержит задач с логарифмами, другая — задач с производной, что позволяет выбрать работу в соответствии с используемым учебником.

Следующие 4 диагностические работы содержат по 9 задач, аналогичных заданиям части 1 ЕГЭ (т. е. заданиям 1–9); за ними следуют 4 диагностические работы, содержащие по 5 задач, аналогичных заданиям 10–14 второй части ЕГЭ и 6 диагностических работ, содержащих весь спектр заданий с кратким ответом (задания 1–14). Далее идут 4 диагностические работы, содержащие по 7 заданий части 2 ЕГЭ; завершают пособие 10 диагностических работ, составленных в соответствии со спецификацией и демоверсией профильного ЕГЭ по математике 2015 года (тренировочные варианты). При подготовке к решению заданий с кратким ответом следует вначале решить первые диагностические работы соответствующего раздела для выявления проблемных зон в знаниях и навыках решения задач, затем повторить вызвавший затруднения материал по учебнику, решить последовательно соответствующие тренинги (подготовительные и зачетные) и перейти к следующим диагностическим работам для оценки успешности повторения и закрепления навыков решения задач с кратким ответом. Аналогичный алгоритм можно рекомендовать и для подготовки к решению задач с развернутым решением, но при этом необходимо наряду с данным пособием использовать учебники для специализированных классов, учебники профильного уровня и проверенные временем пособия для поступающих в вузы.

Экзамен профильного уровня

В экзамене профильного уровня задач с кратким ответом станет на одну меньше (задания B2 пополнят банк заданий B1; т. е. задание 1 в варианте 2015 года — это задание вида B1 или

B2 в варианте 2014 года), а задач с развернутым решением — на одну больше: после планиметрической задачи 18 (бывшая C4), добавляется текстовая задача с экономическим содержанием. Кроме того, убрана маркировка заданий буквами: теперь задания маркируются только номером, означающим позицию в варианте. Таким образом, как и 2014 году, экзаменационная работа 2015 года состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 9 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 5 заданий повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий высокого уровня сложности с развернутым ответом. Правильное решение каждого из заданий 1–14 оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий 15, 16 и 17 оценивается 2 баллами; 18 и 19 — 3 баллами; 20 и 21 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 34 балла.

Задания с кратким ответом

Общие рекомендации

Ответом к заданиям 1–14 является число или конечная десятичная дробь. При решении этих задач и проверке решений важно помнить следующее.

- Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем, чтобы, например, 1 и 7, или 8 и B распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому, если выпускник уверен в задаче, за которую получил минус, ему нужно идти на апелляцию.
- Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан, как неправильный. Поэтому, если результатом решения задачи явилась обыкновенная дробь, например $\frac{1}{8}$, перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,125.

- Единицы измерения (в каких именно единицах должен быть дан ответ, указывается в условии задачи) в бланке ответов писать не нужно, в противном случае сканер, вероятно, распознает ответ как неправильный.

Часть 1

Задание 1

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах.

Характеристика задания Несложная арифметическая текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями, делать прикидку и оценку.

Пример задания Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9 % активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте четырех месяцев и весом 8 кг в течение суток?

РЕШЕНИЕ. Поскольку процент — это одна сотая часть числа, активного вещества в каждой таблетке содержится

$$20 \cdot 0{,}09 = 1{,}8 \text{ мг}.$$

Ребенку указанного в условии задачи возраста и весом 8 кг требуется $8 \cdot 1{,}35 = 10{,}8$ мг активного вещества в сутки. Искомое число таблеток будет равно

$$10{,}8 : 1{,}8 = 6.$$

ОТВЕТ. 6.

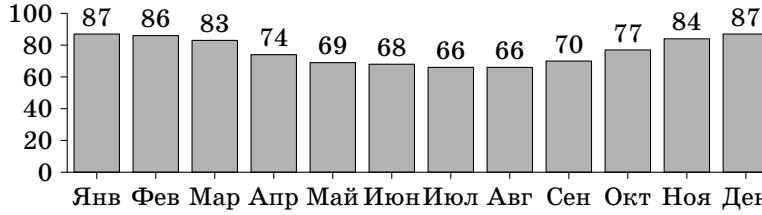
Задание 2

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; определение значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описание поведения и свойств функции по ее графику, нахождение по графику функции наибольшего и наименьшего значений; построение графиков изученных функций.

Характеристика задания Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию. График (диаграмма) характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т. д.) Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значением (возможно, за определенный период времени), время, когда величина достигает данного значения, вычислить среднее значение величины.

Комментарий Простейшее задание на считывание информации, представленной в виде диаграммы или графика, возможно, требующее незначительных вычислений, например, нахождения среднего значения некоторой величины.

Пример задания На диаграмме показано распределение относительной влажности воздуха (в процентах) в городе Ейске по месяцам года. Определите среднюю относительную влажность воздуха в Ейске осенью.



РЕШЕНИЕ. Средняя относительная влажность воздуха в Ейске осенью равна среднему арифметическому значений относительной влажности (в процентах) в сентябре, октябре и ноябре, т. е. $\frac{70+77+84}{3}=77$.

ОТВЕТ. 77.

Задание 3

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: анализ реальных числовых данных и информации статистического характера; осуществление практических расчетов по формулам, использование оценки и прикидки при практических расчетах; описыние с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Характеристика задания Несложная текстовая задача (возможно, с табличными данными) на оптимальное решение, связанная с анализом практической деятельности и моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий Чтобы решить задачу, достаточно вычислить стоимость услуги или товара (иногда с транспортировкой), рейтинг прибора и т. п. для каждого из указанных в условии возможных вариантов и в ответе указать наименьшее из найденных чисел. Требуется аккуратность при записи ответа, поскольку числа могут оказаться довольно большими, и неправильная запись одной разрядной единицы приведет к неправильному ответу. В некоторых случаях подсчет можно оптимизировать, проанализировав условие.

Пример задания Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показа-

телей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

РЕШЕНИЕ. Задачу можно решить двумя способами, первый из которых состоит в прямом подсчете рейтингов:

рейтинг модели А равен

$$R_{\text{А}} = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4) - 0{,}01 \cdot 4100 = 15;$$

рейтинг модели Б равен

$$R_{\text{Б}} = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2) - 0{,}01 \cdot 4700 = -23;$$

рейтинг модели В равен

$$R_{\text{В}} = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1) - 0{,}01 \cdot 5500 = -19;$$

рейтинг модели Г равен

$$R_{\text{Г}} = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0) - 0{,}01 \cdot 5400 = -38.$$

Второй способ основан на анализе условия, оценке и прикидке: очевидно, что при данных в таблице значениях в выражении для R уменьшаемое $4(2F + 2Q + D)$ максимально, а вычитаемое $0{,}01P$ минимально именно для модели А. При таком решении считать придется только один — наилучший — рейтинг, т. е. рейтинг модели А.

ОТВЕТ. 15.

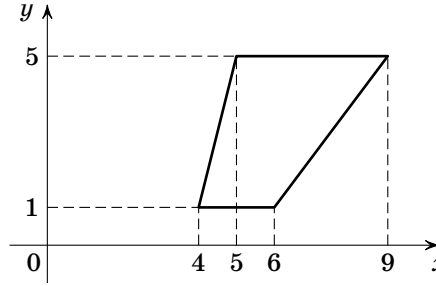
Задание 4

Тип задания по кодификатору требований Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), связанное с проверкой умений вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования, проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих тригонометрические функции.

Характеристика задания Задание на вычисление площади треугольника, четырехугольника, круга и его частей, в том числе по данным рисунка, представляющего собой изображение фигуры, площадь которой требуется найти, на координатной плоскости или клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1×1.

Комментарий Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Например, для треугольника или параллелограмма во многих случаях достаточно провести мысленно высоту к одной из сторон. Выбирать в качестве стороны и высоты нужно те, длины которых выражаются целым числом делений сетки, либо те, которые параллельны осям координат. В некоторых случаях для вычисления недостающих элементов можно использовать теорему Пифагора. Ряд задач можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда, или заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, а площадь последней можно найти почти сразу.

Пример задания Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



РЕШЕНИЕ. Основания трапеции равны 2 и 4, а высота равна 4. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(2+4)\cdot 4=12$.

ОТВЕТ. 12.

Задание 5

Тип задания по кодификатору требований Задание на построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальных ситуаций на языке теории вероятностей и статистики; вычисление в простейших случаях вероятности событий.

Характеристика задания Несложная задача по теории вероятностей или статистике.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов.

Пример задания Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

РЕШЕНИЕ. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n=6$ благоприятных для данного события исходов к числу $N=25$ всех равновозможных исходов, находим $P=\frac{6}{25}=0{,}24$.

ОТВЕТ. 0,24.

Задание 6

Тип задания по кодификатору требований Задание на решение уравнения или системы уравнений, проверяющее умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Характеристика задания Несложное рациональное, показательное, логарифмическое, тригонометрическое или иррациональное уравнение.

Комментарий Уравнение сводится в одно действие к линейному или квадратному (в последнем случае в зависимости от условия в ответе нужно указать только один из корней — меньший или больший).

Пример задания Найдите корень уравнения $4^{-5+x}=64$.

РЕШЕНИЕ. Для решения уравнения достаточно знать, что $64=4^3$. Тогда $-5+x=3$, откуда $x=8$.

ОТВЕТ. 8.

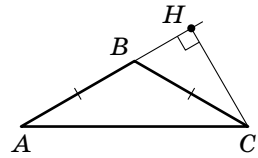
Задание 7

Тип задания по кодификатору требований Задание по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), моделирование реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, либо практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин.

Характеристика задания Несложная планиметрическая задача, в том числе, по готовому чертежу.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать основные формулы и теоремы планиметрии.

Пример задания В треугольнике ABC $AB=BC$, $AC=14$, высота CH равна 7. Найдите синус угла ACB.



РЕШЕНИЕ. Поскольку $\angle ACB=\angle CAB$, то и синусы этих углов равны: $\sin\angle ACB=\sin\angle CAB=\dfrac{CH}{AC}=\dfrac{7}{14}=0{,}5$.

ОТВЕТ. 0,5.

Задание 8

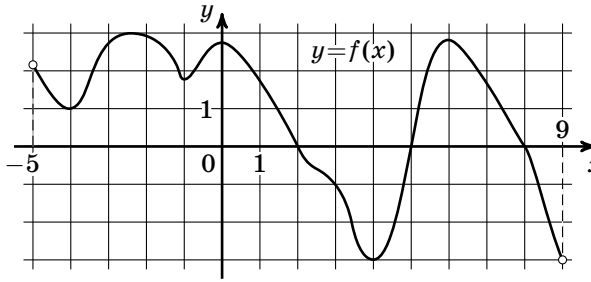
Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции, либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать, что в каждой точке интервала возрастания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная положительна; в каждой точке интервала убывания дифференцируемой на этом интервале функции ее производная отрицательна; в каждой точке экстремума производная либо равна нулю, либо не существует («угол» на графике функции). Обратно, если дан график производной функции, то на тех интервалах, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех интервалах, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает; общие точки графика производной и оси абсцисс (т. е. точки, в которых производная равна нулю) либо являются точками максимума, если график производной пересекает ось абсцисс «сверху вниз» (т. е. производная меняет знак с плюса на минус: возрастание функции сменяется убыванием), либо являются точками минимума, если график производной пересекает ось абсцисс «снизу ввверх» (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс: убывание функции сменяется возрастанием), либо не являются точками экстремума (график производной не пересекает ось абсцисс, а лишь касается ее: в этом случае не происходит смены знака производной и характер монотонности функции не меняется).

Пример задания На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале $(-5; 9)$. Найдите число точек, в которых произ-

водная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ равна 0.



РЕШЕНИЕ. Условие задачи предполагает подсчет точек экстремума, т. е. общего числа точек максимума и точек минимума данной непрерывной функции. Таких точек в данном случае ровно 6.

ОТВЕТ. 6.

Задание 9

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример задания В цилиндрический стакан налили 2,4 литра воды. После того как в стакан положили камень, уровень воды повысился на $\frac{1}{6}$ по сравнению с тем, который был до этого. Найдите объем камня, если известно, что он погрузился в воду полностью. Ответ дайте в кубических сантиметрах (1 литр равен 1000 см^3).

РЕШЕНИЕ. Объем камня равен объему вытесненной воды, т. е. объему цилиндра, высота которого в шесть раз меньше высоты данного цилиндра (объем которого, как следует из условия, равен 2400 см^3), а радиус основания — тот же. Поэтому искомый объем равен $\frac{1}{6} \cdot 2400$, т. е. 400 см^3.

ОТВЕТ. 400.

Часть 2

Задание 10

Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение вычислений и преобразований.

Характеристика задания Задача на вычисление значения числового или буквенного выражения.

Комментарий Для решения задачи достаточно уметь выполнять действия с числами, знать определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

Пример задания Найдите значение выражения

$$\log_6 135 - \log_6 3{,}75.$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку основания логарифмов одинаковы, данное выражение приводится к логарифму частного:

$$\log_6 135 - \log_6 3{,}75 = \log_6 \frac{135}{3{,}75} = \log_6 36 = 2.$$

ОТВЕТ. 2.

Задание 11

Тип задания по кодификатору требований Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков; извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках; решение прикладных задач, в том числе социально-

экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Характеристика задания Текстовое задание на анализ практической ситуации, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию (например, экономические, физические, химические и др. процессы).

Комментарий По условию задачи требуется составить уравнение или неравенство, сводимое к линейному или квадратному, решением которого (для неравенств — наибольшим или наименьшим решением, либо их разностью) и является искомая величина.

Пример задания Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 558 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

РЕШЕНИЕ. Из условия задачи следует, что

$$1500 \cdot \frac{f - 558}{f + 558} \leqslant 12,$$

откуда $125(f - 558) \leqslant f + 558$, и, далее,

$$f \leqslant \frac{126 \cdot 558}{124},$$

т. е. $f \leqslant 567$.

ОТВЕТ. 567.

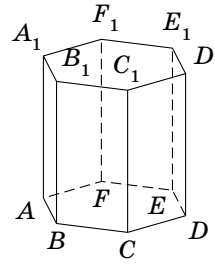
Задание 12

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.

Пример задания Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6.



РЕШЕНИЕ. Многогранник, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, D_1, представляет собой пирамиду с основанием $ABCDEF$ и высотой D_1D. Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту, т. е.

$$\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 6 = 16.$$

ОТВЕТ. 16.

Задание 13

Тип задания по кодификатору требований Построение и исследование простейших математических моделей: моделирование реальной ситуации на языке алгебры, составление уравнения или неравенства по условию задачи; исследование построенной модели с использованием аппарата алгебры.

Характеристика задания Традиционная текстовая задача (на движение, работу и т. п.), сводящаяся к составлению и решению уравнения.

Комментарий В качестве неизвестной, как правило, лучше выбирать искомую величину. Составленное уравнение является рациональным и сводится в большинстве случаев к квадратному или линейному.

Пример задания Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

РЕШЕНИЕ. Пусть собственная скорость байдарки равна x км/ч ($x > 3$). Тогда время (в часах) ее движения по течению реки равно $\frac{15}{x+3}$, а время ее движения против течения реки равно $\frac{15}{x-3}$. Составим по условию задачи уравнение:

$$\frac{15}{x+3} + \frac{15}{x-3} + 1\frac{1}{3} = 8,$$

откуда

$$\frac{15}{x+3} + \frac{15}{x-3} = \frac{20}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-3} = \frac{4}{3}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $3(x-3)(x+3)$, приходим к уравнению $18x = 4(x^2 - 9)$, откуда $2x^2 - 9x - 18 = 0$. Корнями уравнения являются числа $-1{,}5$ и 6, из которых только второе больше 3.

ОТВЕТ. 6.

Задание 14

Тип задания по кодификатору требований Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

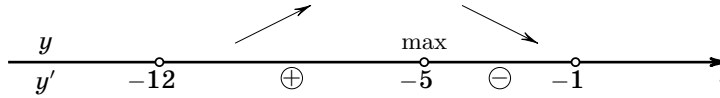
Характеристика задания Задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке. Производная в некоторых задачах может быть задана графиком.

Комментарий Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (максимума) заданной функции или ее наименьшего (наибольшего) значения на отрезке. При этом возможны два основных случая: либо производная задана графиком, либо функция задана формулой. Если производная задана графиком, то на тех промежутках, где он расположен выше оси абсцисс (т. е. производная положительна), функция возрастает; на тех промежутках, где он расположен ниже оси абсцисс (т. е. производная отрицательна), функция убывает. Точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс (т. е. точки, в которых производная меняет знак), являются точками экстремума. Если функция задана формулой, то при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Пример задания Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-12; -1]$.

РЕШЕНИЕ. Традиционное для школьника решение предполагает вычисление наибольшего значения данной функции с помощью производной. Найдем производную данной функции, считая, что $x < 0$, и воспользовавшись формулой производной частного: $y' = \dfrac{2x^2-(x^2+25)}{x^2}$, откуда $y' = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x^2}$. При $x < 0$ производная обращается в нуль, если $x = -5$, причем $y' > 0$ при $x \in (-12; -5)$ и $y' < 0$ при $x \in (-5; -1)$. Таким обра-

зом, непрерывная при $x<0$ функция $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ возрастает на отрезке $[-12;\,-5]$ и убывает на отрезке $[-5;\,-1]$. Значит, $\max\limits_{[-12;-1]} y(x)=y(-5)=-10$.



ОТВЕТ. -10.

Задания с развернутым решением

Общие рекомендации

- Каждое из заданий 15–21 оценивается 2, 3 или 4 баллами. Максимальный балл выставляется за полное обоснованное решение. При этом можно использовать любые утверждения и факты из школьных учебников без дополнительных обоснований или пояснений. Нужно постараться оформить решение так, чтобы оно было понятно не только его автору, но и любому другому компетентному человеку, в частности, проверяющему.
- Даже если полностью решить задачу не удается, нужно постараться продвинуться в ее решении, сделать хотя бы часть задачи: вполне вероятно, что потраченные усилия окажутся оцененными — разумеется, не максимальным числом баллов, но на Едином экзамене и один балл за задачу будет далеко не лишним.

Задание 15

Тип задания по кодификатору требований — Уравнение или система уравнений.

Характеристика задания — Относительно несложное уравнение или система уравнений с отбором корней. Может содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени, корни.

Комментарий Как правило, решение задачи требует замены переменной, позволяющей свести уравнение к квадратному, и отбора корней, связанного с условием задачи или с ограниченностью новой переменной, наличием выражений с переменной в знаменателях алгебраических дробей, под знаками корней четной степени и логарифмов.

Пример задания а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

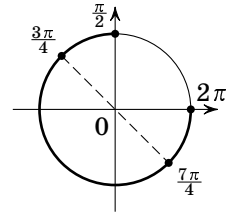
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

РЕШЕНИЕ. а) Представим левую часть уравнения, используя свойства степеней, в виде произведения:

$$2^{\cos x} \cdot 7^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}.$$

Поскольку $2^{\cos x} \neq 0$, получаем уравнение $7^{\cos x} = 7^{-\sin x}$. Таким образом, $\cos x = -\sin x$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. Это числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.



ОТВЕТ. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Задание 16

Тип задания по кодификатору требований Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Характеристика задания Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий Традиционная задача по стереометрии, связанная с вычислением длин, площадей (в том числе площадей сечений многогранников и тел вращения), углов (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанных с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром.

Пример задания В правильной четырехугольной призме $A\ldots D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро $AA_1 = 2$. Точка O принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении $4:1$, считая от вершины A_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O.

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O.

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по параллельным прямым, для построения сечения достаточно провести в плоскости верхнего основания призмы прямую, параллельную AC до пересечения с ребром B_1C_1 в точке P. Искомое сечение — трапеция $ACPO$ (рис. 1).

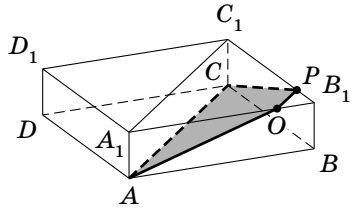


Рис. 1

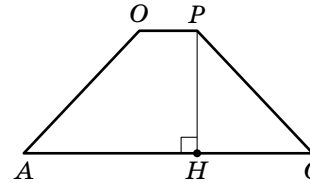


Рис. 2

б) Поскольку прямая AC параллельна A_1C_1, прямая OP параллельна прямой A_1C_1. Отсюда следует, что треугольники PB_1O и $C_1B_1A_1$ подобны, причем

$$B_1P : B_1C_1 = B_1O : B_1A_1 = OP : A_1C_1 = 1 : 5.$$

Значит,

$$AC = A_1C_1 = 10\sqrt{2}, \quad OP = 2\sqrt{2}.$$

В равных прямоугольных треугольниках CC_1P и AA_1O

$$CP = AO = \sqrt{AA_1^2 + A_1O^2} = \sqrt{68},$$

значит, трапеция $ACPO$ равнобедренная.

Пусть PH — высота трапеции $ACPO$, проведенная к основанию (рис. 2), тогда:

$$CH = \frac{AC - OP}{2} = 4\sqrt{2}, \quad PH = \sqrt{CP^2 - CH^2} = 6,$$

$$S_{ACPO} = \frac{AC + OP}{2} \cdot PH = 36\sqrt{2}.$$

ОТВЕТ. $36\sqrt{2}$.

Задание 17

Тип задания по кодификатору требований Неравенство или система неравенств.

Характеристика задания Неравенство или система неравенств, содержащих степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).

Комментарий Обратим внимание на преобразования, с которыми связана значительная часть ошибочных решений задания 17. При решении неравенств, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log(f(x)g(x))$ выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно). Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$ (каждое из выражений положительно либо каждое из выражений отрицательно). Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a(f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к приобретению посторонних решений. Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать необходимые ограни-

чения (как иногда говорят, найти ОДЗ неравенства). Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов (то есть переход от $\log_a(f(x)g(x))$ к $log_a f(x) + \log_a g(x))$ таит еще больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается, и можно просто потерять решения неравенства. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:

а) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

(в этом случае $\log_a(f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log g(x)$);

б) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$

(при этом $\log_a(f(x)g(x)) = \log_a(-f(x)) + \log(-g(x))$).

Преобразуя разность логарифмов в логарифм частного и наоборот, поступают аналогично. Если есть выбор, лучше преобразовывать сумму (разность) логарифмов в логарифм произведения (частного), выписав необходимые ограничения (это позволит исключить посторонние решения), а не наоборот (при таком преобразовании решения будут потеряны). Так, при упрощении левой части неравенства

$$\log_a(f(x)\cdot g(x)) + \log_a \frac{f(x)}{g(x)} < p(x)$$

переход к логарифму произведения с последующим сокращением алгебраической дроби с учетом необходимых ограничений, т. е. переход к системе

$$\begin{cases} \log_a f^2(x) < p(x), \\ f(x)\cdot g(x) > 0, \end{cases}$$

будет равносильным, а упрощение путем преобразования логарифмов произведения и частного в сумму и разность логарифмов соответственно соответственно может привести к потере решений.

При решении неравенств, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, следует использовать формулу

$$\log_a f^{2n} = 2n\cdot\log_a |f(x)|.$$

Если не поставить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть определена при всех x, для которых $f(x) \neq 0$,