Обзорное повторение к ЕГЭ

Е. С. Смирнова

ПЛАНИМЕТРИЯ:
ВИДЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЙ

Элективный курс
для учащихся 9—11 классов

ББК 22.151я721
С50

Смирнова Е. С.
Планиметрия: виды задач и методы их решений:
Элективный курс для учащихся 9—11 классов.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
416 с.
ISBN 978-5-4439-2328-4

Предлагаемый элективный курс содержит обзор, обобщение и систематизацию теоретического и задачного материала школьного курса планиметрии с целью качественной подготовки учащихся 9 и 11 классов к итоговой аттестации по математике (ОГЭ, ЕГЭ).

Пособие адресовано учащимся и учителям старших классов для осуществления помощи по выделению основных видов задач и ведущих методов их решения, по отработке навыков использования опорных фактов при решении задач планиметрии, а также при организации самостоятельной деятельности учащихся по подготовке к практикумам и зачётам по решению планиметрических задач.

Подготовлено на основе книги:
Смирнова Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решений: Элективный курс для учащихся 9—11 классов. — М.: МЦНМО, 2016. — 416 с. — ISBN 978-5-4439-0392-7

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2328-4

Содержание

Часть II
Основные виды задач планиметрии и методы их решения

Глава 1. Задачи на доказательство

Глава 2. Задачи на построение

Глава 3. Задачи на вычисление

Часть III
Обобщение и систематизация методов решения задач по теме «Площадь»

Глава 1. Площадь фигур

Глава 2. Методы решений задач по теме «Площади»

Глава 3. Экстремальные задачи по теме «Площади»

Глава 4. Практикум решения задач, объединённых общим геометрическим сюжетом

Решения зачётных работ

Часть I

Выделение опорных фактов и ведущих методов решения задач с общим геометрическим сюжетом

Глава 1
Задания разного уровня сложности, объединённые общим сюжетом «Параллельные прямые и углы»

Основные виды задач и два подхода к их решению

В геометрии рассматриваются три основных вида задач:

— задачи на доказательство;

— задачи на вычисление;

— задачи на построение.

Решение этих задач рассматривается на фоне самых разнообразных геометрических фигур и их конфигураций, таких как «параллельные прямые и углы», «треугольники и окружность», «окружность и углы» и другие. Основными фигурами геометрии являются треугольник — «клетка геометрии» и окружность — «душа геометрии». Рассмотрение цикла задач, связанных с одной и той же конфигурацией фигур, или, как говорят, с одним геометрическим сюжетом, является полезным и увлекательным занятием.

Решение задач и упражнений, объединённых одним геометрическим сюжетом, можно выполнять уже на первых этапах изучения геометрии, имея на вооружении небольшой запас геометрических понятий и теорем. При этом необходимо иметь в виду два подхода к решению задач — аналитический и синтетический. *Аналитическим* подходом пользуются в основном при решении задач на построение, а синтетический подход широко применяется в геометрических задачах на доказательство и на вычисление. При этом подходе в процессе решения задач последовательно используются известные факты, которые называют *опорными*.

Предлагаемый практикум по решению задач разного уровня сложности содержит как задачи базового (первый уровень) и повышенного уровней (второй уровень), так и творческие упражнения (третий уровень). На схеме 1 задачи каждого уровня располагаются на концентрических окружностях соответствующих уровней сложности. Для удобства работы со схемой введены следующие обозначения. На схеме символами обозначены:

N — опорная задача первого уровня;

$\boxed{N}$ — опорная задача второго уровня;

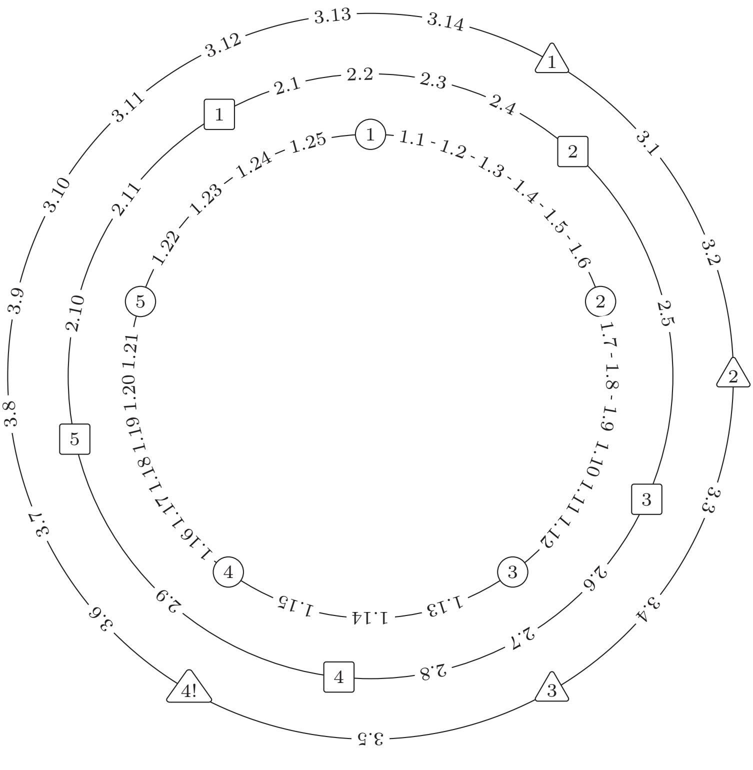
N — опорная задача третьего уровня;

$P.K$ — тренировочные упражнения, где P — номер уровня, K — номер упражнения.

Опорные задачи первого и второго уровней, отмеченные символами N и $\boxed{N}$, знакомят учащихся с опорными фактами, которые используются в соответствующих тренировочных упражнениях.

Опорные задачи третьего уровня, отмеченные символом N, обращают внимание на оригинальные идеи при решении

Схема 1



более сложных задач. Эти идеи используются при решении соответствующих тренировочных упражнений.

Исключение составляет символ 4!, который отмечает начало упражнений комплексного характера по всей теме «Параллельные прямые и углы». Опорные задачи 3 и 4, 4 и 5 представляют собой обратные математические утверждения.

При решении заданий практикума желательно использовать минимальный набор теоретических положений, а именно: свойства и признаки равенства треугольников, свойства и признаки равнобедренных треугольников, свойства осевой и центральной симметрий, свойства и признаки параллельных прямых, теорему о сумме углов треугольника и n-угольника, основные понятия, связанные с геометрическими местами точек, так как рассматриваемый геометрический сюжет «Параллельные прямые и углы» изучается после прохождения указанных тем (гл. 1—4 учебника [1]).

§ 1. Задания базового уровня сложности (репродуктивные упражнения)

Опорная задача 1. Докажите, что расстояния от всех точек одной из двух параллельных прямых до второй прямой одинаковы.

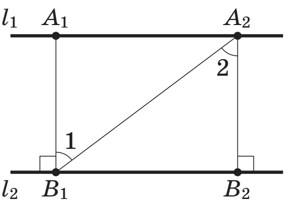


Рис. 1.1

Дано: $l_1 \parallel l_2$, $A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_1$, $B_1 \in l_2$, $B_2 \in l_2$ (рис. 1.1), $A_1B_1 \perp l_2$, $A_2B_2 \perp l_2$.

Доказать: $A_1B_1 = A_2B_2$.

Доказательство.

1. $A_1B_1 \perp l_2$, $A_2B_2 \perp l_2$, откуда по признаку параллельности прямых $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Решение большинства задач главы 1 можно найти в пособии [2].

2. $\triangle A_1B_1A_2 \overset{\text{гу}}{=} \triangle A_2B_1B_2 \;\Rightarrow\; A_1B_1 = A_2B_2$.

Замечание. Условная запись $\triangle_1 \overset{\text{гу}}{=} \triangle_2$ означает равенство треугольников по гипотенузе и острому углу (гипотенуза, угол).

Упражнение 1.1. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на расстояние, равное a.

Ответ: пара параллельных прямых, удалённых от данной прямой на расстояние a.

Упражнение 1.2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых.

Ответ: прямая, параллельная данным и проходящая между данными прямыми на равных расстояниях от прямых.

Упражнение 1.3. Две параллельные прямые l_1 и l_2 пересечены парой параллельных прямых l_3 и l_4; $l_1 \cap l_3 = A$, $l_2 \cap l_3 = B$, $l_2 \cap l_4 = C$, $l_1 \cap l_4 = D$. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$. *Указание*. Докажите равенство треугольников ABC и BDC.

Упражнение 1.4. При пересечении двух параллельных прямых другой парой параллельных прямых получился четырёхугольник. Докажите, что противоположные углы этого четырёхугольника равны.

Упражнение 1.5. Внутри угла ABC, равного 100°, отмечена точка M, и через неё проведены прямые MP и MK, параллельные сторонам BC и BA угла соответственно, причём $\angle MPK = 30^\circ$. Найдите углы треугольника MPK, если $P \in BA$, а $K \in BC$.

Ответ: $\angle M = 100^\circ$, $\angle P = 30^\circ$, $\angle K = 50^\circ$.

Упражнение 1.6. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых l_1 и l_2, $A \in l_1$ и $B \in l_2$. Через середину этого отрезка M проведена прямая, пересекающая l_1 и l_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что точка M — середина CD. Докажите равенство треугольников CMB и DMA.

Опорная задача ②. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей.

Дано: $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, AB — секущая; $A \in M_1N_1$, $B \in M_2N_2$, $AO = l_{\angle N_1AB}$, $BO = l_{\angle ABN_2}$ (биссектрисы) (рис. 1.2).

Найти: $\widehat{AO; BO}$.

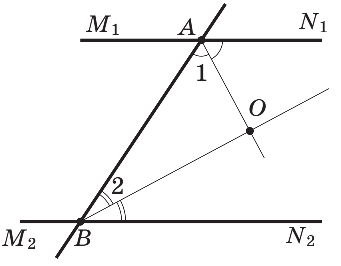


Рис. 1.2

Решение.

1. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAN_1$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABN_2$, $\angle BAN_1 + \angle ABN_2 = 180^\circ$ (свойство параллельных прямых), следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

2. В треугольнике ABO имеем

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ,$$

следовательно, $\widehat{AO; BO} = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

Замечание 1. Величиной угла между двумя прямыми (a и b) на плоскости называют величину α наименьшего из углов, образовавшихся при пересечении этих прямых; обозначение: $\alpha = \widehat{a; b}$.

Замечание 2. Условная запись $l_{\angle NAB}$ читается как «биссектриса угла NAB».

Условная запись m_{AB} читается как «медиана, проведённая к стороне AB треугольника».

Условная запись h_{AB} читается как «высота, опущенная на прямую, содержащую сторону AB треугольника».

Упражнение 1.7. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Найдите угол между прямыми, содержащими биссектрисы внешних односторонних углов.

Ответ: 90°.

Упражнение 1.8. Могут ли пересечься биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

Ответ: нет.

Упражнение 1.9. Найдите углы треугольника, образованного пересекающимися прямыми, углы между которыми равны 30°, 40°, 70°.

Ответ: 30°, 40°, 110°.

Упражнение 1.10. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. *Указание.* Вычислите внешний угол и воспользуйтесь признаком параллельности прямых.

Упражнение 1.11. Докажите, что если биссектриса одного из внешних углов треугольника параллельна противоположной стороне этого треугольника, то этот треугольник равнобедренный. *Указание.* Воспользуйтесь свойством параллельных прямых.

Упражнение 1.12. Величины углов A и B треугольника ABC равны соответственно α и β. Какой угол образует:

а) биссектриса CD угла C этого треугольника со стороной AB;

б) высота AE, опущенная на BC, со стороной CA, если $\alpha = 18^\circ$, $\beta = 68^\circ$?

Ответ: а) $(\widehat{CD; AB}) = \angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, если $\alpha > \beta$, и $(\widehat{CD; AB}) = \angle CDB = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, если $\beta > \alpha$; б) $(\widehat{AE; AC}) = \angle CAE = 4^\circ$.

Опорная задача ③ **[1].** Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, то противолежащий этому углу катет равен половине гипотенузы.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$ (рис. 1.3).

Доказать: $CB = \frac{1}{2}AB$.

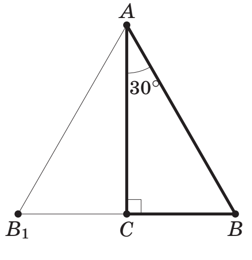


Рис. 1.3

Доказательство.

1. $\angle B = 60^\circ$.

2. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой AC: $\triangle ACB_1 \xleftrightarrow{S_{AC}} \triangle ACB$, следовательно, $\triangle ACB_1 = \triangle ACB$, значит, $\angle B = \angle B_1 = 60^\circ$ и $\angle ACB_1 = \angle ACB = 90^\circ$, откуда следует, что точки B_1, C, B лежат на одной прямой.

3. В треугольнике AB_1B имеем $\angle B_1 = \angle B = \angle B_1AB = 60^\circ$, следовательно, $AB_1 = AB = BB_1$.

4. $BC = \frac{1}{2}BB_1$, $BB_1 = AB$, значит, $BC = \frac{1}{2}AB$.

Упражнение 1.13. В прямоугольном треугольнике с острым углом 30° длина гипотенузы равна 8. Найдите длины отрезков, на которые разбивается гипотенуза основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 8$, $CD \perp AB$, $D \in AB$ (рис. 1.4).

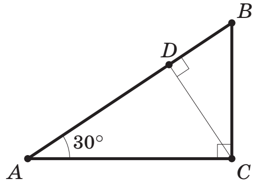


Рис. 1.4

Найти: AD; DB.

Ответ: 6; 2.

Упражнение 1.14. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит стороны исходного треугольника?

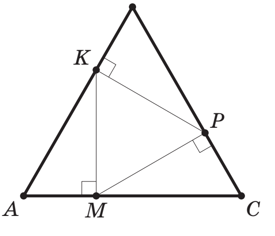


Рис. 1.5

Дано: $\triangle ABC$ правильный; $K \in AB$, $P \in BC$, $M \in AC$, $PK \perp AB$, $MP \perp BC$, $KM \perp AC$ (рис. 1.5).

Найти: $AK : KB$, $BP : PC$, $CM : MA$.

Ответ: $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{CM}{MA} = 2$.

Упражнение 1.15. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что в этом треугольнике отрезок серединного перпендикуляра, проведённого к гипотенузе, заключённый между гипотенузой и катетом, втрое меньше большего катета. *Указание.* Докажите равенство треугольников AMK и BCK.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $M \in AB$, $AM = BM$; $KM \perp AB$, $K \in AC$ (рис. 1.6).

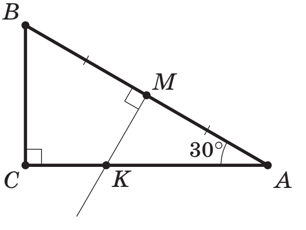


Рис. 1.6

Доказать: $MK = \dfrac{1}{3}AC$.

Опорная задача ④. Докажите, что медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна её половине.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$, O — середина AB.

Доказать: $OC = \dfrac{1}{2}AB$.

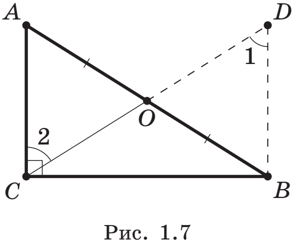


Рис. 1.7

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: $D \in CO$, $OD = OC$ (рис. 1.7).

2. $\triangle AOC \overset{\text{сус}}{=} \triangle BOD$, значит, $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, по признаку параллельности прямых $AC \parallel BD$, откуда по свойству параллельных прямых заключаем, что $\angle ACB + \angle CBD = 180^\circ$.

3. $\angle ACB + \angle CBD = 180^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$, значит, $\angle CBD = 90^\circ$.

4. $\triangle ACB \overset{\text{кк}}{=} \triangle DBC$, следовательно, $CD = AB$.

5. $CD = AB$, $CO = \dfrac{1}{2}CD$, следовательно, $CO = \dfrac{1}{2}AB$.

Замечание 3. Условная запись $\triangle_1 \overset{\text{сус}}{=} \triangle_2$ означает равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними (сторона, угол, сторона).

Замечание 4. Условная запись $\triangle_1 \overset{\text{кк}}{=} \triangle_2$ означает равенство треугольников по двум катетам.

Замечание 5. Середина гипотенузы — точка O — равноудалена от всех вершин треугольника, т. е. является центром описанной около треугольника окружности.

Упражнение 1.16. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведённые из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей 4.

Упражнение 1.17. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведённой к гипотенузе.

Дано: a — катет, m_c — медиана, проведённая к гипотенузе.

Построить: $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$.

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен (рис. 1.8).

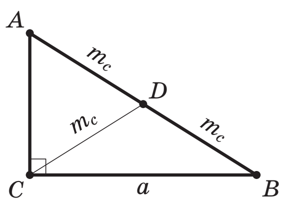


Рис. 1.8

2. Отметим в треугольнике ABC известные элементы:

$$\angle ACB = 90^\circ, \quad CD = m_c, \quad CB = a.$$

3. $CD = \frac{1}{2}AB$, т. е. $AB = 2m_c$.

4. Треугольник ABC можно построить по катету a и гипотенузе $2m_c$.

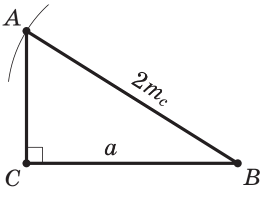


Рис. 1.9

Построение (рис. 1.9).

1. $\angle ACB = 90^\circ$.
2. $CB = a$.
3. $A = CA \cap$ Окр$(B;\, 2m_c)$.
4. Треугольник ABC искомый.

Доказательство правильности построения.

В треугольнике ABC имеем $\angle C = 90^\circ$ (по построению); $CB = a$ (по построению); $CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2m_c = m_c$.

Исследование.

Построение возможно и выполняется единственным образом, если $a < 2m_c$. При $a \geqslant 2m_c$ решений нет.

Упражнение 1.18. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и высоте h, проведённой к гипотенузе.

Указание. Вершина прямого угла лежит на пересечении окружности с диаметром, равным гипотенузе, с прямой, расположенной на расстоянии h от прямой, содержащей гипотенузу.

Упражнение 1.19. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей 4.

Упражнение 1.20. Высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника ABC, равна 1. Величина угла B равна 15°. Найдите длину гипотенузы AB.

Ответ: 4.

Упражнение 1.21. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей ④ шесть раз.

Опорная задача ⑤ [1]. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 1.10). Найдите угол BOC, если $\angle BAC = \alpha$.

Дано: $\triangle ABC$; $l_{\angle ABC} \cap l_{\angle ACB} = O$, $\angle BAC = \alpha$.

Найти: $\angle BOC$.

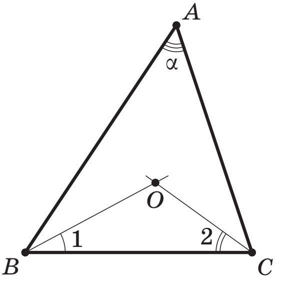


Рис. 1.10

Решение.

1. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACB$, $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \alpha$, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

2. $\angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

Ответ: $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

Упражнение 1.22 [5]. В треугольнике ABC угол C прямой, а биссектрисы углов A и B пересекаются в точке J. Найдите угол AJB.

Ответ: 135°.

Упражнение 1.23 [5]. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть параллельными?

Решение.

1. Пусть биссектрисы углов A и B треугольника ABC параллельны (рис. 1.11).

2. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B$ и $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (свойство параллельных прямых), откуда $\angle A + \angle B = 360^\circ$, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

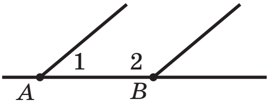


Рис. 1.11

3. Вывод: биссектрисы двух углов треугольника параллельными быть не могут.

Упражнение 1.24. Могут ли быть перпендикулярными биссектрисы двух углов треугольника? *Указание.* Используйте опорную задачу ⑤.

Ответ: нет.

Упражнение 1.25. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке J, причём $\angle AJB = 130°$. Найдите угол C.

Ответ: 80°.

§ 2. Задания повышенного уровня сложности (вариативные упражнения)

Опорная задача $\boxed{1}$ **[4].** Докажите, что во всяком треугольнике найдётся угол не больше 60°.

Доказательство (методом от противного).

1. Пусть все углы треугольника больше 60°. Тогда их сумма больше 180°, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

2. Вывод: во всяком треугольнике найдётся угол, величина которого не больше 60°.

Упражнение 2.1. Какие значения может принимать:

а) наибольший угол треугольника;

б) наименьший угол треугольника;

в) средний по величине угол треугольника?

Ответ: а) $60° \leqslant \alpha < 180°$; б) $0° < \alpha \leqslant 60°$; в) $0° < \alpha < 90°$.

Упражнение 2.2 [4]. Докажите, что у выпуклого пятиугольника хотя бы два угла тупые.

Решение. Сумма углов $S = 180°(5-2) = 540°$. Если в пятиугольнике все углы острые, то их сумма будет меньше чем $90 \cdot 5 = 450°$, что противоречит условию задачи. Если в выпуклом пятиугольнике один угол тупой, а четыре угла острые, то сумма четырёх острых углов меньше 360°, а пятый угол больше $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$, что противоречит определению выпуклого многоугольника. Следовательно, у выпуклого пятиугольника хотя бы два угла тупые. (Например, 150°, 150°, 80°, 80°, 80°.)

Упражнение 2.3 [4]. Докажите, что в выпуклом шестиугольнике не более трёх острых углов. *Указание.* Доказательство от противного.

Упражнение 2.4. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трёх острых углов. *Указание.* Доказательство от противного.

Опорная задача $\boxed{2}$. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо в сумме составляют 180°.

Дано: $\angle ABC = \alpha$, $P_1K \parallel BA$, $PM \parallel BC$; $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ — углы, образованные при пересечении прямых PM и P_1K (рис. 1.12).

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

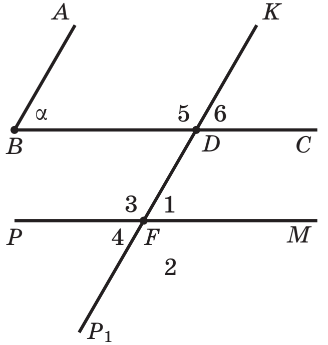


Рис. 1.12

Решение.

1. Пусть $P_1K \cap BC = D$, $P_1K \cap PM = F$, $\angle KDB = \angle 5$, $\angle KDC = \angle 6$.

2. $\angle ABC = \angle 6 = \alpha$ (свойство параллельных прямых), $\angle 6 = \angle 1$ (свойство параллельных прямых), $\angle 4 = \angle 1$ (как вертикальные углы), следовательно, $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$.

3. $\angle ABC + \angle 5 = 180^\circ$ (свойство параллельных прямых), $\angle 5 = \angle 3$ (свойство параллельных прямых), $\angle 3 = \angle 2$ (как вертикальные углы), следовательно, $\angle ABC + \angle 2 = 180^\circ$, а $\angle 2 = 180^\circ - \alpha$.