Первые шаги в мире ИНФОРМАТИКИ

С. Н. Тур, Т. П. Бокучава

Опорные конспекты для 9 класса

+ вкладыш для тестовых работ

«СЕРИЯ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ»

Первые шаги в мире ИНФОРМАТИКИ

С. Н. Тур, Т. П. Бокучава

Опорные конспекты

для 9 класса

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2002

УДК 372.8(075.3)
ББК 32.81я72
Т86

Тур С. Н., Бокучава Т. П.

Т86 Первые шаги в мире информатики. Опорные конспекты для 9 класса. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 144 с.: ил.

ISBN 5-94157-222-0

Опорные конспекты для ученика 9 класса средней школы предназначены для проведения уроков по курсу информатики и включают теоретический материал и задачи для самостоятельного решения по темам: формальная логика и таблицы истинности, законы алгебры логики, логические элементы и схемы, решение логических задач в среде программирования QBasic; знакомство с СУБД Microsoft Access, создание и заполнение базы данных, определение связей, создание запросов и форм, приемы работы с базой данных; формализация и компьютерное моделирование, моделирование задач на обработку числовых массивов, текстовых величин и баз данных в электронных таблицах Microsoft Excel; основные понятия о сетях ЭВМ, глобальная сеть Интернет, принципы поиска информации в Интернете.

В прилагаемом вкладыше представлены проверочные и итоговая работы для 2-х вариантов.

Для учащихся 9 класса общеобразовательных и специализированных школ

УДК 372.8(075.3)
ББК 32.81я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Анна Кузьмина*
Редактор	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.09.02.
Формат $60\times90^1/_8$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18.
Тираж 5000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-222-0

Уроки 1 и 2
Введение в логику.
Знакомство с формальной логикой и таблицами истинности

Введение в логику

Вся история человечества — это решение многих житейских задач. Только умение здраво мыслить, рассуждать, доказывать и делать выводы позволяет успешно справиться с такими задачами, и помочь в этом может *логика* — наука о формах и законах человеческого мышления.

Логика — наука древняя. Еще в странах древнего Востока (Индии, Китае) зародились первые учения об умозаключениях. Философы прошлого пытались найти ответ на вопрос, как и по каким законам мыслит человек, какими путями мышления можно прийти к истине, пониманию событий и явлений окружающего мира.

Слово "логика" происходит от греческого "logos" и означает: "мысль, мышление, речь, разум, смысл...". Основоположником логики считают древнегреческого философа Аристотеля. В дошедших до нас рукописях Аристотеля сформированы формы мышления: "понятие", "суждение", "умозаключение", а также законы логики, метод дедукции, понятие гипотезы. Логика Аристотеля — это так называемая *формальная* (классическая) логика. Формальная логика связана с анализом наших обычных содержательных рассуждений, выражаемых разговорным языком.

Со временем логика в своем развитии перешла от формальной к *математической* (от словесной формы записи рассуждений к записи рассуждений с помощью символов). В ней появились математические методы исследования, конкретность законов. Основоположником математической логики считают философа-математика Г. В. Лейбница (1646—1716).

В XIX веке появился раздел математической логики — *алгебра логики*, которая оперирует с двоичными переменными, принимающими только два значения — "истина" или "ложь". Алгебру логики в честь ее создателя, английского математика Дж. Буля, назвали *булевой алгеброй*. При этом формальная логика не утратила своего значения, и в настоящее время используется в философии, юриспруденции, криминалистике, психологии и т. д.

Булева алгебра нашла широкое практическое применение в технической области — используется для решения сложных математических задач, при написании алгоритмов и программ, разработке электронных устройств, компьютеров, автоматических систем, в робототехнике и т. д.

Формальная логика

Свое понимание окружающего мира человек формулирует в форме *высказываний*, определяемых как повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинное или ложное утверждение оно содержит.

Примеры высказываний: "Звезды видны на небе только ночью", "Земля покоится на трех китах", "В Ленинградской области летом температура не достигает отметки −20°C", "Ель летом зеленая".

Высказывания могут быть выражены не только с помощью естественных языков, но на формальных языках, например:

- с помощью языка математических символов — "$5 \times 5 > 16$";
- с помощью физических формул — "$S = V \times T$" и т. д.

Высказывания не могут быть выражены вопросительными или побудительными предложениями, так как оценка истинности или ложности таких предложений невозможна, например: "Не играй с огнем!", "Ты спокоен?", "Все в порядке?".

Мы рассмотрели примеры простых высказываний. Используя специальные слова, подразумевающие определенные логические связи между высказываниями (связки), можно из простых высказываний получить *сложное высказывание*.

В табл. 1.1 представлена специальная терминология, применяемая при изучении сложных высказываний.

Таблица 1.1

Логические связки и кванторы	**Название логических связок и кванторов**	**Примеры высказываний**
... и ... ... а ... ... но ...	Конъюнкция (логическое умножение)	Налетел ветер, и пошел дождь
... или ... либо ..., либо ... или ..., или ...	Дизъюнкция соединительная (логическое сложение)	За отличную учебу в школе я получу золотую или серебряную медаль
либо ..., либо ... либо только ..., либо только ... только ... или только ...	Дизъюнкция разъединительная (строгая дизъюнкция)	Я поеду только в дом отдыха или только на турбазу
не; неверно, что ...	Инверсия (логическое отрицание)	Мы не умеем читать. Неверно, что Земля — спутник Венеры
если ..., то ... из ... следует ... ... достаточно для ...	Импликация (логическое следование)	Если будет солнечно, то мы отправимся на пляж

Таблица 1.1 (окончание)

Логические связки и кванторы	Название логических связок и кванторов	Примеры высказываний
... тогда и только тогда, когда ... ... если и только если ... ... необходимо и достаточно ...	Эквивалентность (логическое равенство)	Я поеду в Таиланд тогда и только тогда, когда приобрету путевку
все, всякий, каждый	Квантор общности	Все люди любят мир. Каждый ребенок мечтает вырасти
некоторые; существуют	Квантор существования	Некоторые коты — черные. Существуют ядовитые растения

Задание 1

В табл. 1.2 приведены высказывания, подчеркните соответствующие им типы высказываний.

Таблица 1.2

Высказывание	Тип высказывания	
Сегодня, завтра или через месяц он напишет письмо	Простое	Сложное
Если успешно закончишь 1 четверть, то тебе подарят компьютер	Простое	Сложное
В школе уроки начинаются в 9 часов утра	Простое	Сложное
Кончилось лето, и наступили прохладные дни	Простое	Сложное
У меня есть старший брат	Простое	Сложное
Каждое утро и каждый вечер он выходит на прогулку	Простое	Сложное
После дождя трава мокрая	Простое	Сложное
Круг — это не квадрат	Простое	Сложное
Марс находится в пределах Солнечной системы	Простое	Сложное

Задание 2

В табл. 1.3 приведены высказывания, укажите связующие слова или союзы и наименование связок.

Таблица 1.3

Высказывание	Связка
Либо он позвонит, либо пришлет сообщение по электронной почте	
Неверно, что январь — летний месяц	
Каждый человек на земле имеет право быть счастливым	
Мне должны подарить либо лыжи, либо самокат	
На следующей неделе она зайдет ко мне домой и на работу к бабушке	
Если у тебя заболело горло, то обязательно надо показаться врачу	
Все ученики класса пойдут в кино	
Некоторые дети не любят конфеты	
Существуют птицы, которые не могут летать	

Задание 3

Из приведенных простых высказываний составьте и запишите несколько сложных высказываний.

1. Поедем на дачу.
2. Хорошая погода.
3. По прогнозам синоптиков предполагаются осадки в виде дождя и снега.
4. Сильный ветер.
5. Отсутствие ветра.
6. Плохая погода.
7. Мы поедем на пляж.
8. Антон приглашает нас в театр.
9. Антон приглашает нас в цирк.
10. После школы я буду учиться в институте.
11. После школы я буду работать в интернет-центре.

Таблицы истинности

На основе логической связи между простыми высказываниями, входящими в состав сложного высказывания, делается *логический вывод*. Для получения логического вывода составляют таблицу истинности, в которой перечисляют все комбинации значений ("истина" или "ложь") простых высказываний и, реализуя логическую связь, получают результат, проанализировав который определяют все истинные значения сложного высказывания.

Пример 1

Рассмотрим сложное высказывание: "Аня промочила ноги, и у нее заболело горло". Здесь связка "и" определяет конъюнктивную связь двух высказываний. Составим таблицу истинности (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Аня промочила ноги	У нее заболело горло	Аня промочила ноги, и у нее заболело горло
Ложь	Ложь	Ложь
Ложь	Истина	Ложь
Истина	Ложь	Ложь
Истина	Истина	Истина

Анализируя данные таблицы истинности, мы получили логический вывод — данное сложное высказывание, состоящее из двух простых, соединенных связкой "и", истинное, если оба простых высказывания истинны.

Пример 2

Рассмотрим сложное высказывание: "Поют птицы или стрекочут кузнечики" (табл. 1.5). Здесь связка "или" реализует дизъюнкцию двух высказываний. Составим таблицу истинности.

Таблица 1.5

Поют птицы	Стрекочут кузнечики	Поют птицы или стрекочут кузнечики
Ложь	Ложь	Ложь
Ложь	Истина	Истина
Истина	Ложь	Истина
Истина	Истина	Истина

Анализируя данные таблицы истинности, мы получили логический вывод — данное сложное высказывание, состоящее из двух простых, соединенных связкой "или", ложное, если оба простых высказывания ложны.

Дополнительное задание

Составьте и запишите 2 сложных высказывания, в каждое из которых входят различные типы логических связок. Подчеркните логические связки.

Вопросы и задания

1. Составьте и запишите по два истинных и ложных сложных высказывания.

2. Составьте таблицу истинности для сложного высказывания: "Люди умеют думать и мечтать" (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Люди умеют думать и мечтать	Люди не умеют думать и мечтать

Запишите логический вывод:

Урок 3
Знакомство с алгеброй логики

В алгебре логики простые высказывания заменяют логическими переменными, которые обозначаются буквами латинского алфавита, причем значениями переменных могут быть только 0 и 1. Логические связки заменяют соответствующими им математическими символами. При этом сложное высказывание превращается в *логическую функцию*.

Логической функцией F от набора логических переменных (a, b, c, ...) называется функция, которая может принимать только два значения: 0 и 1.

Таблица истинности функции зависит от количества логических переменных этой функции и содержит 2^n наборов переменных. Для функции $F(a, b)$, таблица истинности состоит из 4 наборов переменных. Логические значения называют также *значениями истинности*. В алгебре логики в качестве операций используются конъюнкция, дизъюнкция, строгая дизъюнкция, инверсия, импликация и эквивалентность. Рассмотрим подробнее эти операции.

Конъюнкция. Обозначения: $\wedge$, $\cdot$, &.

Пример высказывания: "Светит солнце, и дует легкий ветерок". Логические переменные: a = "Светит солнце" и b = "Дует легкий ветерок". Функция:

$$F(a, b) = a \wedge b.$$

Таблица истинности — в табл. 3.1.

Таблица 3.1

a	***b***	$\boldsymbol{a \wedge b}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция. Обозначения: $\vee$, $+$.

Пример высказывания: "Белый платок или голубой шарфик". Логические переменные: a = "Белый платок" и b = "Голубой шарфик". Функция:

$$F(a, b) = a \vee b.$$

Таблица истинности — в табл. 3.2.

Таблица 3.2

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Строгая дизъюнкция. Обозначение: $\dot{\vee}$.

Пример высказывания: "Фрукты используются либо в сыром, либо в консервированном виде". Логические переменные: a = "Фрукты используются в сыром виде" и b = "Фрукты используются в консервированном виде". Функция:

$$F(a, b) = a \dot{\vee} b.$$

Таблица истинности — в табл. 3.3.

Таблица 3.3

a	b	$a \dot{\vee} b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Инверсия (отрицание). Обозначения: $\overline{}$, $\urcorner$.

Пример высказывания: "Я не буду пропускать уроки". Логическая переменная: a = "Я буду пропускать уроки". Функция:

$$F(a) = \urcorner a.$$

Таблица истинности — в табл. 3.4.

Таблица 3.4

a	$\urcorner a$
0	1
1	0

Импликация. Обозначения: $\Rightarrow$, $\supset$.

Пример высказывания: "Если в субботу к нам приедет бабушка, то мы устроим праздник". Здесь логическая переменная a = "Если в субботу к нам приедет бабушка" является условием, а логическая переменная b = "Мы устроим праздник" — заключением. Функция:

$$F(a, b) = a \Rightarrow b.$$

Таблица истинности — в табл. 3.5.

Таблица 3.5

a	**b**	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность. Обозначения: $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$.

Пример высказывания: "При делении одного числа на другое в результате получается ноль тогда и только тогда, когда делимое равно нулю". Логические переменные: a = "При делении одного числа на другое в результате получается ноль" и b = "Делимое равно нулю". Функция:

$$F(a, b) = a \Leftrightarrow b.$$

Таблица истинности — в табл. 3.6.

Таблица 3.6

a	**b**	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Задание 1

Запишите по образцу логические функции, соответствующие сложным высказываниям для следующего набора логических переменных.

- a — "Настроение радостное".
- b — "Настроение грустное".

- c — "Настроение праздничное".
- d — "Настроение невеселое".
- e — "Настроение приподнятое".
- f — "Настроение тоскливое".
- o — "Настроение отличное".
- k — "Настроение лучезарное".
- l — "Настроение спокойное".

Образец: "Чтобы настроение было праздничным, необходимо и достаточно, чтобы оно было лучезарным".

$$F(c, k) = c \Leftrightarrow k.$$

1. "Настроение радостное или грустное": ________________________________
2. "Настроение приподнятое и праздничное": ____________________________
3. "Настроение хотя и не отличное, но приподнятое и радостное": ______________
4. "Не верно, что если настроение грустное, то оно отличное или праздничное": ________
5. "Если настроение лучезарное, то оно отличное и не тоскливое": ______________
6. "Настроение невеселое, грустное или спокойное": _______________________

Придумайте и запишите несколько сложных логических высказываний для этого же набора логических переменных. Запишите для них логические функции.

____
____
____
____
____
____
____

Задание 2

Выделите и запишите логические переменные и логическую функцию, соответствующие сложному высказыванию: "Если я буду хорошо учиться, и я сдам выпускные экзамены в школе и вступительные экзамены в вуз, то я поеду в путешествие либо по Северному Кавказу, либо по историческим местам Поволжья".

____
____
____
____
____
____

Задание 3

Придумайте пример высказывания, соответствующего логической функции:

$$F(a, b, c, d) = (c \wedge d) \Rightarrow a \vee b.$$

Дополнительное задание

Придумайте и запишите сложное высказывание, содержащее несколько логических переменных. Запишите к нему логическую функцию.

Вопросы и задания

Придумайте пример высказывания, соответствующего логической функции:

$$F(a, b, c, d) = \neg a \wedge b \Leftrightarrow c \wedge d.$$

Выделите и запишите логические переменные.

Урок 4
Знакомство с алгеброй логики (продолжение)

Логические функции можно вычислять с помощью таблиц истинности.

Пример 1. Вычисление значения функции

Вычислим значение функции

$$F(a, b) = \urcorner(a \vee b) \wedge (a \wedge \urcorner b).$$

Выделим для этого промежуточные логические функции и заполним таблицу истинности для соответствующих наборов логических переменных (табл. 4.1).

Таблица 4.1

a	b	$a \vee b$	$\urcorner(a \vee b)$	$\urcorner b$	$(a \wedge \urcorner b)$	$F(a, b)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Из таблицы истинности видно, что при любых наборах логических переменных функция $F(a, b)$ тождественно равна нулю.

Метод построения таблиц истинности используется и для доказательства логического равенства различных по записи логических функций. При этом, если на всех одинаковых наборах логических переменных значения функций совпадают, они называются *эквивалентными.*

Пример 2. Доказательство равенства двух логических функций

Доказать, что функции

$$F_1(a, b) = \urcorner a \vee b \text{ и } F_2(a, b) = a \Rightarrow b$$

эквивалентны.

Доказательство. Составим для функций F_1 и F_2 таблицы истинности, объединив их в одну (табл. 4.2).

Таблица 4.2

a	b	$\urcorner a$	$\urcorner a \vee b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

По таблице определяем, что на всех одинаковых наборах логических переменных (4 и 5 столбцы таблицы) значения функций совпадают, следовательно они эквивалентны.

Задание 1

1. Вычислите значение функции (табл. 4.3).

$$F(a, b, c) = c \vee (b \wedge a \vee \urcorner c)$$

Таблица 4.3

a	b	c	$\urcorner c$	$b \wedge a$	$b \wedge a \vee \urcorner c$	F
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

2. Вычислите значение функции (табл. 4.4).

$$F(a, b, c) = a \wedge b \vee \urcorner b \vee \urcorner a \wedge c$$

Таблица 4.4

a	b	c	$\urcorner a$	$\urcorner b$	$a \wedge b$	$a \wedge b \vee \urcorner b$	$\urcorner a \wedge c$	F
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

Задание 2

Вычислите значение функции (табл. 4.5).

$$F(a, b, c) = a \wedge \urcorner b \wedge c \vee a \vee b \vee \urcorner c$$

а) при $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$;
б) при $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

Таблица 4.5

a	b	c	$\urcorner b$	$\urcorner c$	$a \wedge \urcorner b$	$a \wedge \urcorner b \wedge c$	$a \wedge \urcorner b \wedge c \vee a$	$a \wedge \urcorner b \wedge c \vee a \vee b$	F

Задание 3

1. Докажите, что функции

$$F_1(a, b) = a \vee a \wedge b \text{ и } F_2(a) = a$$

эквивалентны (табл. 4.6).

Таблица 4.6

a	b	$a \wedge b$	$a \vee a \wedge b$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

2. Докажите, что функции

$$F_1(a, b, c) = a \vee (b \wedge c) \text{ и } F_2(a, b, c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

эквивалентны (табл. 4.7).

Таблица 4.7

a	b	c					
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Дополнительное задание

1. Вычислите значение функции (табл. 4.8):

$$F(a, b, c) = \rceil a \vee c \vee (a \wedge \rceil b)$$

а) при $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$;
б) при $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$.

Таблица 4.8

a	b	c	$\rceil a$	$\rceil b$	$a \wedge \rceil b$	$\rceil a \vee c$	F

2. Определите, эквивалентны ли функции (табл. 4.9).

$$F_1(a, b) = a \wedge (a \vee b) \text{ и } F_2(a, b) = a \Rightarrow b$$

Таблица 4.9

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$	$a \Rightarrow b$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Вопросы и задания

1. Вычислите значение функции (табл. 4.10).

$$F(a,\ b,\ c) = a \vee b \wedge (a \vee c \wedge \urcorner b).$$

Таблица 4.10

a	b	c	$\urcorner b$	$c \wedge \urcorner b$	$a \vee c \wedge \urcorner b$	$b \wedge (a \vee c \wedge \urcorner b)$	F
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

2. Докажите, что функции

$$F_1(a,\ b) = a \vee \urcorner a \wedge b \text{ и } F_2(a,\ b) = a \vee b$$

эквивалентны (табл. 4.11).

Таблица 4.11

a	b	$\urcorner a$	$\urcorner a \wedge b$	$a \vee \urcorner a \wedge b$	$a \vee b$

Урок 5
Законы алгебры логики

Применение законов логики позволяет сокращать количество переменных в логических выражениях. Сокращенные с помощью законов логики логические выражения называют *минимизированными.*

Основные законы алгебры логики сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

№	**Закон**	**Представление в алгебре логики**
1	Переместительный (коммутативный)	$a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$
2	Сочетательный (ассоциативный)	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$; $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
3	Распределительный (дистрибутивный)	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4	Законы де Моргана	$\rceil(a \vee b) = \rceil a \wedge \rceil b$; $\rceil(a \wedge b) = \rceil a \vee \rceil b$
5	Закон двойного отрицания (инволюции)	$\rceil\rceil a = a$
6	Операции с переменной и ее инверсией	$a \wedge \rceil a = 0 : a \vee \rceil a = 1$
7	Свойства операций конъюнкции и дизъюнкции	$a \vee 1 = 1$; $a \wedge 1 = a$; $a \vee 0 = a$; $a \wedge 0 = 0$
8	Законы идемпотентности	$a \vee a = a$; $a \wedge a = a$
9	Законы поглощения	$a \vee (a \wedge b) = a$; $a \wedge (a \vee b) = a$

Пример 1

Доказать, что $a \vee \rceil a = 1$.

Доказательство проведем, применив к заданному выражению закон де Моргана и операцию с переменной и ее инверсией:

$$a \vee \rceil a = \{4\} = \rceil(\rceil a \wedge a) = \{6\} = \rceil 0 = 1.$$

Пример 2

Доказать, что $\rceil(a \vee b) \wedge (a \wedge \rceil b) = 0$.

Доказательство проведем, применив к заданному выражению законы алгебры логики в следующей последовательности — закон де Моргана, сочетательный закон, операцию с переменной и ее инверсией, а затем дважды — свойство операции конъюнкции:

$$\rceil(a \vee b) \wedge (a \wedge \rceil b) = \{4\} = \rceil a \wedge \rceil b \wedge (a \wedge \rceil b) = \{2\} = \rceil a \wedge a \wedge \rceil b \wedge \rceil b = \{6\} =$$
$$= 0 \wedge \rceil b \wedge \rceil b = \{7\} = 0 \wedge \rceil b = \{7\} = 0.$$

Пример 3

Упростить логическую функцию:

$$F(a, b, c) = \rceil b \wedge \rceil c \wedge (a \vee \rceil a).$$

Для этого последовательно применим операцию с переменной и ее инверсией и свойство операции конъюнкции:

$$F(a, b, c) = \rceil b \wedge \rceil c \wedge (a \vee \rceil a) = \{6\} = \rceil b \wedge \rceil c \wedge 1 = \{7\} = \rceil b \wedge \rceil c.$$

Пример 4

Упростить логическую функцию:

$$F(a, b, c) = a \wedge b \wedge \rceil c \vee a \vee b.$$

Заполним таблицу истинности (табл. 5.2) и выпишем значения функции на соответствующих наборах логических переменных.

$$F(a, b, c) = a \wedge b \wedge \rceil c \vee a \vee b = \{9\} = a \vee b.$$

Таблица 5.2

a	***b***	***c***	***F* = *a* ∨ *b***
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$F(0,0,0) = 0 + 0 = 0$
$F(0,0,1) = 0 + 0 = 0$
$F(0,1,0) = 0 + 1 = 1$
$F(0,1,1) = 0 + 1 = 1$
$F(1,0,0) = 1 + 0 = 1$
$F(1,0,1) = 1 + 0 = 1$
$F(1,1,0) = 1 + 1 = 1$
$F(1,1,1) = 1 + 1 = 1$

Законы логики также применяются для построения логических функций по таблицам истинности. При этом нужно руководствоваться следующим правилом:

> Для каждой строки таблицы истинности с единичным значением построить *минтерм* (конъюнкцию переменных), при этом переменная должна встретиться только один раз (без отрицания или с отрицанием). Объединить все минтермы операцией дизъюнкции.
>
> Если в таблице истинности переменные имеют нулевые значения в строке, то в минтерм они входят с отрицанием, а переменные, имеющие значение единица, входят в минтерм без отрицания.

Пример 5

По заданной таблице истинности (табл. 5.3) построить логическую функцию.

Таблица 5.3

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Выберем строки, в которых $F = 1$. Построим для них минтермы:

- строка 1: $\rceil a \wedge \rceil b \wedge \rceil c$;
- строка 2: $\rceil a \wedge \rceil b \wedge c$.

Объединим минтермы:

$$F(a, b, c) = \rceil a \wedge \rceil b \wedge \rceil c \vee \rceil a \wedge \rceil b \wedge c.$$

Упростим логическую функцию:

$$F(a, b, c) = \rceil a \wedge \rceil b \wedge \rceil c \vee \rceil a \wedge \rceil b \wedge c = \{3\} = \rceil a \wedge \rceil b \wedge (\rceil c \vee c) = \{7, 6\} =$$
$$= \rceil a \wedge \rceil b = \{4\} = \rceil (a \vee b).$$

Итак, мы получили логическую функцию:

$$F(a, b, c) = \rceil (a \vee b).$$

Задание 1

Упростите логические функции:

1. $F(c) = \neg\neg c \vee 0$.

____

____

2. $F(F) = \neg(\neg F \vee F)$.

____

____

Задание 2

Упростите логическую функцию

$$F(a, b, c) = \neg a \vee c \vee \neg(a \wedge b),$$

применив последовательно законы {4, 1, 8, 4}. Заполните таблицу истинности (табл. 5.4). Выпишите значения функции на соответствующих наборах логических переменных.

____

____

Таблица 5.4

a	**b**	**c**			
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

$F(0,0,0) =$ ________________
$F(0,0,1) =$ ________________
$F(0,1,0) =$ ________________
$F(0,1,1) =$ ________________
$F(1,0,0) =$ ________________
$F(1,0,1) =$ ________________
$F(1,1,0) =$ ________________
$F(1,1,1) =$ ________________

Задание 3

По заданной таблице истинности (табл. 5.5) постройте логическую функцию.

Таблица 5.5

a	*b*	*c*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Выберем строки, в которых $F = 1$. Построим для них минтермы:

Строка __: ___________________

Строка __: ___________________

Объединим минтермы: $F(a, b, c) =$ ____

Применив последовательно законы {3, 6, 7}, упростим логическую функцию: $F(a, b, c) =$ ____

____

Итак, мы получили логическую функцию: $F(a, b, c) =$ ___________________________

Дополнительное задание

Укажите, в каком пункте допущена ошибка в записи тождества, приведите правильную запись тождества:

1. $\urcorner (a \vee b) = \urcorner a \wedge \urcorner b$.
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \vee (a \vee c)$.
3. $\urcorner a \wedge a \wedge \urcorner b \wedge \urcorner b = 0$.
4. $\urcorner b \wedge \urcorner c \wedge (a \vee \urcorner a) = \urcorner b \wedge \urcorner c$.

Ошибка: _________

Правильная запись: ____

Вопросы и задания

Применив закон {9}, упростите логическую функцию

$$F(a,\ b,\ c) = a \wedge \rceil b \wedge c \vee a \vee b \vee \rceil c$$

и заполните таблицу истинности (табл. 5.6). Выпишите значения функции на соответствующих наборах логических переменных.

____

____

Таблица 5.6

a	***b***	***c***			
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

$F(0,0,0) =$ _______

$F(0,0,1) =$ _______

$F(0,1,0) =$ _______

$F(0,1,1) =$ _______

$F(1,0,0) =$ _______

$F(1,0,1) =$ _______

$F(1,1,0) =$ _______

$F(1,1,1) =$ _______

Урок 6

Логические элементы и схемы

Для реализации логических функций используются базовые логические элементы **И**, **ИЛИ**, **НЕ**, имеющие условные изображения (рис. 6.1—6.3). При этом надо помнить, что все логические элементы, кроме инвертора, могут иметь число входов, более чем два, т. к. обобщаются на большее, чем два число аргументов.

1. Элемент **И** (рис. 6.1) реализует *конъюнкцию*, поэтому его еще называют *конъюнктором*. Единица на выходе элемента **И** будет только тогда, когда на всех входах будут единицы, отсюда еще одно название — *элемент совпадения* (табл. 6.1).

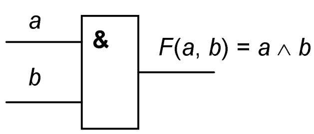

Рис. 6.1. Логический элемент **И**

Таблица 6.1

a	**b**	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Элемент **ИЛИ** (рис. 6.2) реализует *дизъюнкцию*, поэтому его еще называют *дизъюнктором*. Единица на выходе элемента **ИЛИ** будет тогда, когда хотя бы на одном входе будет единица (табл. 6.2).

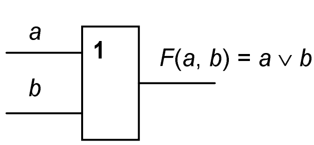

Рис. 6.2. Логический элемент **ИЛИ**

Таблица 6.2

a	**b**	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Элемент **НЕ** (рис. 6.3) реализует *инверсию*, поэтому его еще называют *инвертором*. Единица на выходе элемента **НЕ** будет тогда, когда на входе будет ноль (табл. 6.3).

Таблица 6.3

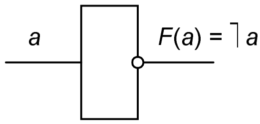

Рис. 6.3. Логический элемент **НЕ**

a	**⌉a**
0	1
1	0

На основе этих базовых логических элементов строятся другие логические элементы и схемы. Рассмотрим, например элементы **И—НЕ** и **ИЛИ—НЕ**.

4. Элемент **И—НЕ** (рис. 6.4) состоит из элемента **И** и инвертора и осуществляет инверсию результата схемы **И**. Ноль на выходе элемента **И—НЕ** будет только тогда, когда на всех входах будут единицы (табл. 6.4). Еще одно название элемента — *элемент Шеффера*.

Таблица 6.4

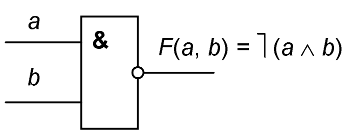

Рис. 6.4. Логический элемент **И—НЕ**

a	**b**	**⌉(a ∧ b)**
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5. Элемент **ИЛИ—НЕ** (рис. 6.5) состоит из элемента **ИЛИ** и инвертора и осуществляет инверсию результата схемы **ИЛИ**. Единица на выходе элемента будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут нули (табл. 6.5). Еще одно название элемента — *элемент Пирса*.

Таблица 6.5

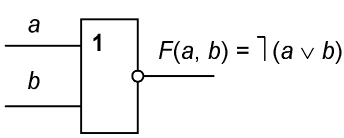

Рис. 6.5. Логический элемент **ИЛИ—НЕ**

a	**b**	**⌉(a ∨ b)**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Реальные логические элементы работают с реальными физическими сигналами. Существуют различные физические способы кодирования двоичной информации, но чаще всего за код 1 принимается более высокий уровень напряжения (от 2,5 до 5 В), чем ноль (от 0 до 0,5 В).

Рассмотрим примеры.

Пример 1

Построить таблицу истинности, соответствующую схеме на рис. 6.6.

Схеме (рис. 6.6) соответствует таблица истинности (табл. 6.6). Анализируя таблицу истинности, приходим к выводу, что схема на рис. 6.6 реализует импликацию.

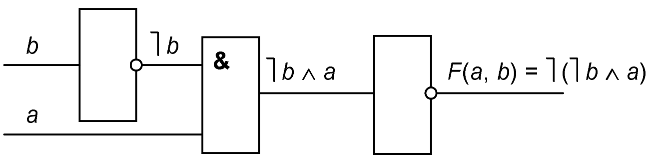

Рис. 6.6

Таблица 6.6

a	**b**	$\neg$**b**	$\neg$**b** $\wedge$ **a**	$\neg$ ($\neg$**b** $\wedge$ **a**)
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Пример 2

Определить, какую функцию реализует схема на рис. 6.7.

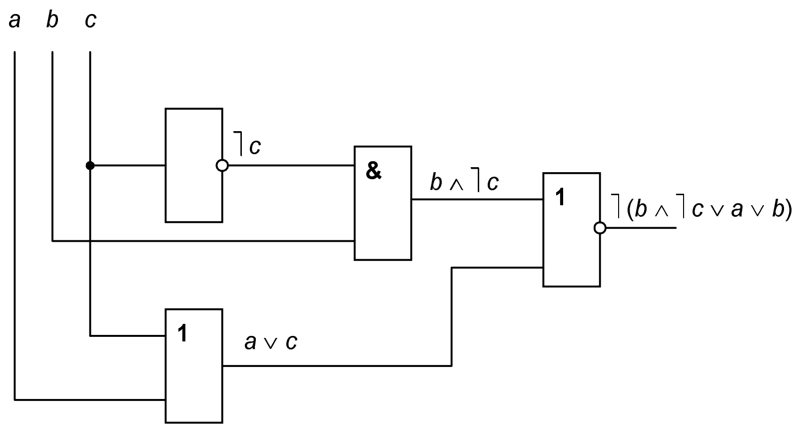

Рис. 6.7

Для определения функции последовательно, от входов схемы к ее выходам записываем функции, реализуемые логическими элементами. В итоге получаем функцию, реализуемую данной схемой:

$$F(a, b, c) = \neg\,(b \neg c \vee a \vee b).$$

Пример 3

По заданной функции

$$F(a,\ b) = \rceil\, a \wedge b \vee a \wedge \rceil\, b \vee a \wedge b$$

построить логическую схему.

Для построения логической схемы нам потребуется: 2 инвертора, 3 конъюнктора, 2 дизъюнктора.

Функции

$$F(a,\ b) = \rceil\, a \wedge b, \quad F(a,\ b) = a \wedge \rceil\, b$$

реализуются схемами (рис. 6.8 и 6.9 соответственно).

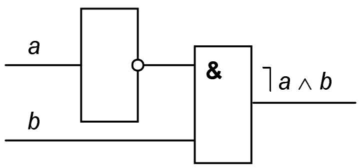

Рис. 6.8

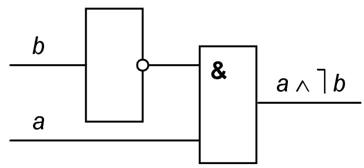

Рис. 6.9

Используя указанные схемы, конъюнктор и 2 дизъюнктора, получим схему функции (рис. 6.10):

$$F(a,\ b) = \rceil\, a \wedge b \vee a \wedge \rceil\, b \vee a \wedge b.$$

Заполним таблицу истинности (табл. 6.7).

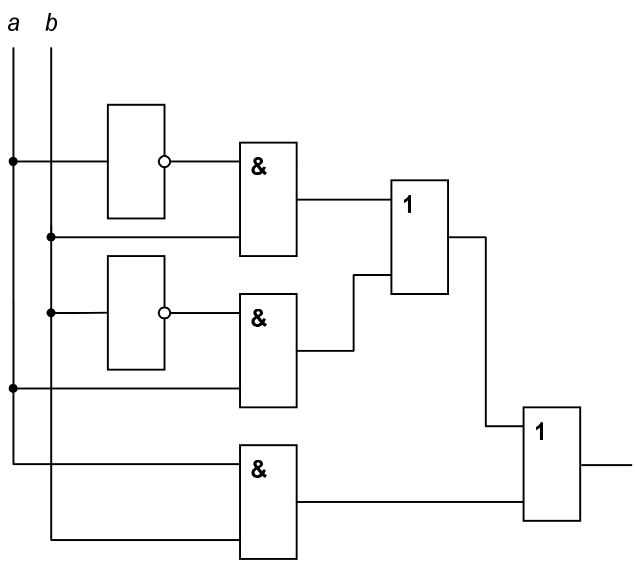

Рис. 6.10