В. С. Губа, С. М. Львовский

# «Парадокс» Банаха–Тарского

МЦНМО

УДК 512.54+510.222
ББК 22.144+22.12
Г93

Губа В. С., Львовский С. М.
«Парадокс» Банаха—Тарского
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
44 с.
ISBN 978-5-4439-2015-3

В 1924 году выдающиеся польские математики Стефан Банах и Альфред Тарский доказали, что шар в пространстве можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить шар другого объема. В брошюре мы расскажем, почему эта теорема, производящая впечатление нелепости, не противоречит возможности измерять объемы тел, и познакомим читателя с красивой математикой, стоящей за этим уже классическим результатом.

Для школьников старших классов и студентов младших курсов.

Подготовлено на основе книги: *В. С. Губа, С. М. Львовский*. «Парадокс» Банаха—Тарского. — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

**ISBN 978-5-4439-2015-3**

## Содержание

# Предисловие

Эта брошюра представляет собой расширенную версию мини-курса, прочитанного вторым автором в июле 2011 года на летней школе «Современная математика» в Дубне. В курсе существенно использовались идеи, разработанные первым автором. В книгу мы добавили кое-что из того, на что не хватило времени на занятиях.

Парадоксом Банаха—Тарского называется следующая теорема, доказанная в 1924 году Стефаном Банахом и Альфредом Тарским, опиравшимися, в свою очередь, на теорему, опубликованную в 1914 году Феликсом Хаусдорфом.

*Пусть $B_1$ и $B_2$ — два шара разных радиусов. Тогда шар $B_1$ можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств $B_1 = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, а шар $B_2$ — в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств $B'_1 = X'_1 \cup X'_2 \cup \ldots \ldots \cup X'_n$ таким образом, что множество $X_1$ переводится некоторым движением пространства в $X'_1$, $X_2$ переводится некоторым движением пространства в $X'_2$, …, $X_n$ переводится некоторым движением пространства в $X'_n$. Иными словами, шар $B_1$ можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить $B_2$.*

То же верно и для любых двух многогранников в пространстве и вообще для более-менее любых двух тел (точную формулировку мы приведем ниже).

Разумеется, это утверждение вопиющим образом противоречит интуиции: как же такое возможно, если у шаров разного радиуса объемы разные?! Почему факт наличия объемов у тел теорему Банаха—Тарского не опровергает и каков ее «философский» смысл, мы обсудим в разделе 4 после того как эту теорему докажем, а пока что скажем одно: за шокирующей формулировкой теоремы Банаха—Тарского стоит красивая и важная математика, и именно она является главным предметом нашей книжки.

Для выполнимости теоремы Банаха—Тарского очень существенно, что действие происходит именно в пространстве: на плоскости тот же номер уже не проходит, и невозможно разрезать многоугольник на конечное число частей, из которых складывается многоугольник другой площади. В заключительной части книжки мы постараемся объяснить, почему так выходит и чем в этом смысле пространство «хуже»[1] плоскости.

---

[1] Или лучше?

Для чтения основной части брошюры знать сверх школьной программы почти ничего не требуется: надо только быть знакомым с понятием множества и несколькими типичными примерами счетных и несчетных множеств. Кроме того, желательно знать, как устроены движения плоскости.

Странным образом оказывается, что доказательство противоречащей интуиции теоремы Банаха—Тарского проще, чем доказательство полностью соответствующего интуиции результата, согласно которому аналог теоремы Банаха—Тарского для плоскости места не имеет. Поэтому в посвященном этому заключительном разделе 5 требования к предварительным знаниям читателя существенно выше, чем в остальной части брошюры, и даже читателю, этими знаниями обладающему, многое придется принять на веру. По крайней мере мы старались, чтобы в этом трудном разделе сложность нарастала постепенно и чтобы читатель-школьник не «утратил нить» максимально долго.

Авторы благодарны Ф. В. Петрову за ценные обсуждения.

## 1. Равносоставленность в наивном и точном смысле

Два многоугольника на плоскости называются равносоставленными, если один из них можно разрезать на конечное число частей, из которых без зазоров и наложений можно сложить другой. Например, из квадрата со стороной 1 можно сделать прямоугольный треугольник с углом 45° и катетом $\sqrt{2}$ (рис. 1).

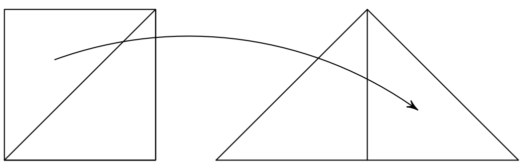

Рис. 1. Квадрат равносоставлен с равнобедренным прямоугольным треугольником

Из самого́ определения очевидно, что у равносоставленных прямоугольников площади равны; в XIX веке было доказано и обратное: как гласит так называемая теорема Бойяи—Гервина, если площади двух прямоугольников равны, то они равносоставлены. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге С. Л. Табачникова и Д. Б. Фукса «Математический дивертисмент» (М.: МЦНМО, 2011), лекция 22; мы не будем его воспроизводить.

Давайте теперь вглядимся в формулировку теоремы Бойяи—Гервина взглядом педанта (точнее говоря, человека, знакомого с понятием множества). Что в ней, собственно говоря, подразумевается под разрезанием и складыванием? Например, катеты прямоугольного треугольника на рис. 1 получаются из двух экземпляров диагонали квадрата, но ведь каждая точка диагонали может попасть либо на один, либо на другой катет, но не на оба одновременно! И вообще, если считать, что многоугольник как подмножество плоскости включает свою границу, то не получается разрезания на непересекающиеся подмножества, а если считать, что не включает, то многоугольник не будет совпадать с объединением тех частей, на которые он разрезан.

Эти шероховатости в формулировке можно устранять разными способами. Например, можно раз и навсегда условиться, что многоугольник как подмножество плоскости включает свою границу, а при определении разрезания многоугольника на меньшие — сказать, что многоугольникам разрешается иметь непустое пересечение, но при этом оно обязано содержаться в границе обоих многоугольников. Это вполне осмысленное уточнение, и при переходе от плоскости к пространству оно также ведет к интересным и неожиданным результатам[1], но мы пойдем по другому пути, потребовав, чтоб части, на которые разбиваются многоугольники, действительно не пересекались.

Перейдем к точным определениям

Мы будем обозначать множество точек плоскости через $\mathbb{R}^2$, а множество точек пространства через $\mathbb{R}^3$ (это стандартные обозначения).

Как известно, отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (соответственно $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) называется *движением*, если оно сохраняет расстояния между точками: если $p$ и $q$ — точки в $\mathbb{R}^2$ (соответственно $\mathbb{R}^3$), то $|f(p), f(q)| = |p, q|$ (через $|AB|$ или $|A, B|$ мы будем обозначать расстояние между точками $A$ и $B$). Иногда вместо «движение» говорят «перемещение».

Задача 1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение, сохраняющее расстояния между точками. Докажите, что $f$ *инъективно*, то есть «не склеивает разные точки» (если $P \neq Q$, то $f(P) \neq f(Q)$), и *сюръективно*, то есть $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ (каждая точка плоскости является чьим-то образом). Аналогичное утверждение верно и для отображений $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Взаимно однозначные отображения $f\colon X \to Y$, отображающие $X$ на $Y$, обычно называют биекциями.

Определение 1. Пусть $X$ и $Y$ — два подмножества плоскости (или пространства). Мы будем говорить, что $X$ и $Y$ *конгруэнтны*, если су-

[1] Ключевые слова здесь — «третья проблема Гильберта» и «инвариант Дена»; см. цитированную выше книгу Табачникова и Фукса.

ществует движение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (соответственно $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$), для которого $f(X) = Y$. Если $X$ и $Y$ конгруэнтны, мы будем это записывать так: $X \cong Y$.

В современных школьных курсах конгруэнтные множества обычно называются равными; мы будем пользоваться длинным словом «конгруэнтность», чтобы исключить путаницу с равенством множеств. (Впрочем, авторы книжки застали то время, когда термин «конгруэнтность» использовался и в школьном курсе.)

Для дальнейшего нам понадобится одно теоретико-множественное обозначение. Если множество $X$ является объединением множеств $X_1, \ldots, X_n$ и при этом множества $X_1, \ldots, X_n$ попарно не пересекаются, то мы будем записывать это обстоятельство в виде $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ (а не просто $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$). Подчеркнем, что $\sqcup$, в отличие от $\cup$ — не символ операции над множествами: если у множеств $A$ и $B$ непустое пересечение, то образовать множество $A \sqcup B$ мы не можем. В ситуации, когда $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$, мы будем иногда говорить, что задано разбиение множества $X$ на подмножества $X_1, \ldots, X_n$ или что $X$ является дизъюнктным объединением множеств $X_1, \ldots, X_n$.

Определение 2. Пусть $X$ и $Y$ — подмножества плоскости (или пространства). Будем говорить, что $X$ и $Y$ *равносоставлены*, если существуют такие разбиения $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$, $Y = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_n$, что $X_1 \cong Y_1$, $X_2 \cong Y_2$, …, $X_n \cong Y_n$.

Если множества $X$ и $Y$ равносоставлены, мы будем записывать это так: $X \approx Y$.

Неформально говоря, равносоставленность означает, что $X$ можно разбить на части, из которых можно сложить $Y$ (в слове «который» из этого описания спряталось утверждение о конгруэнтности соответствующих частей). В отличие от «школьного» определения мы требуем, чтобы части, на которые разбиваются $X$ и $Y$, не пересекались (а не просто «пересекались по сторонам, а не по внутренностям»); с другой стороны, сами эти части не обязательно являются многоугольниками или многогранниками — они могут быть сколь угодно плохими, настолько плохими, что их и на рисунке-то изобразить затруднительно. На количество частей, на которые разбиваются $X$ и $Y$, никаких ограничений не накладывается: оно может быть любым, лишь бы оно было конечно.

Сразу скажем, что при этом «аккуратном» определении равносоставленности теорема Бойяи—Гервина остается верной, но для ее доказательства потребуются некоторые дополнительные усилия; мы расскажем об этом в приложении на с. 10.

Предложение 1. *Если $X \approx Y$ и $Y \approx Z$, то $X \approx Z$.*

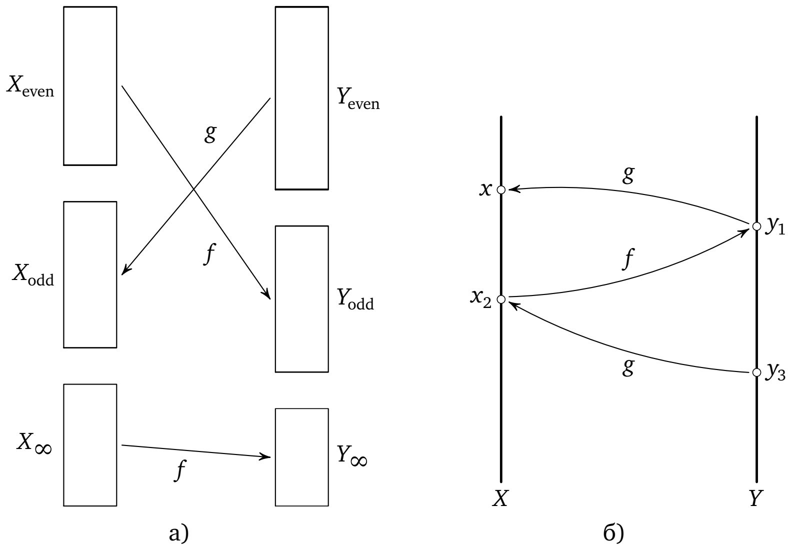


Рис. 2. Лемма 4: а) формулировка; б) доказательство

Лемма 4. *Пусть $X$ и $Y$ — два множества, и пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to$ $\to X$ — инъективные отображения. Тогда существуют такие разбиения $X = X_{\text{even}} \sqcup X_{\text{odd}} \sqcup X_\infty$ и $Y = Y_{\text{even}} \sqcup Y_{\text{odd}} \sqcup Y_\infty$, что:*

*1) ограничение $f|_{X_{\text{even}}}$ задает биекцию между $X_{\text{even}}$ и $Y_{\text{odd}}$;*

*2) ограничение $g|_{Y_{\text{even}}}$ задает биекцию между $Y_{\text{even}}$ и $X_{\text{odd}}$;*

*3) ограничение $f|_{X_\infty}$ задает биекцию между $X_\infty$ и $Y_\infty$.*

См. рис. 2а.

Из этой леммы наша теорема сразу следует. В самом деле, определим отображение $\varphi: X \to Y$ так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X_{\text{even}}, \\ g^{-1}(x), & \text{если } x \in X_{\text{odd}}, \\ f(x), & \text{если } x \in X_\infty; \end{cases}$$

тогда ясно, что $\varphi$ — биективное отображение, задающее равносоставленность.

Осталось построить разбиения множеств $X$ и $Y$, существование которых утверждается леммой. Для этого мы поступим следующим образом. Для каждого элемента $x \in X$ его предшественником назовем такой элемент $y \in Y$, что $g(y) = x$. Предшественника может вообще не быть (его нет, если $x$ не лежит в $X_1$), но уж если он есть, то он единственен, так как отображение $g$ является инъективным. Аналогично, предшественником элемента $y \in Y$ называется такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Если он существует, то он опять-таки единственен.

Теперь по каждому элементу $x \in X$ построим цепочку его предшественников: $y_1 \in Y$ — предшественник элемента $x$ (если предшественник есть), $x_2 \in X$ — предшественник элемента $y_1$ (опять-таки если таковой есть), и так далее. В конце концов либо цепочка оборвется (у одного из элементов предшественника не окажется), либо окажется, что цепочка бесконечна. Если цепочка конечна, то общее количество предшественников в ней назовем ее длиной: если предшественника у элемента $x$ вообще нет, длина цепочки равна нулю, если у элемента $x$ есть предшественник $y_1$, а у элемента $y_1$ предшественника уже нет, то длина цепочки равна 1, и т. д. Аналогично определим цепочки предшественников для элементов $y \in Y$. Заметим, что если длина цепочки предшественников для элемента $x \in X$ равна $n$, то длина цепочки предшественников для элемента $f(x) \in Y$ равна $n+1$ (предшественники элемента $f(x)$ — это сам $x$ плюс все предшественники элемента $x$); если же цепочка предшественников для $x$ бесконечна, то бесконечна она и для $f(x)$.

Теперь через $X_{\text{even}}$ обозначим множество элементов $X$, у которых длина цепочки предшественников четна, через $X_{\text{odd}}$ — множество элементов $X$, у которых длина цепочки предшественников нечетна, а через $X_\infty$ — множество элементов $X$, у которых цепочка предшественников бесконечна (английские слова even и odd как раз и означают «четный» и «нечетный»). Аналогично определим $Y_{\text{even}}$, $Y_{\text{odd}}$ и $Y_\infty$. Из сказанного выше ясно, что $f(X_{\text{even}}) = Y_{\text{odd}}$, $g(Y_{\text{even}}) = X_{\text{odd}}$ и $f(X_\infty) = Y_\infty$. Так как $f$ и $g$ — инъективные отображения, лемма доказана, а с ней и теорема. □

Лемма 4 хорошо известна в теории множеств. Из нее точно таким же рассуждением, что и у нас, выводится следующая теорема: если множество $X$ равномощно подмножеству в $Y$, а множество $Y$ равномощно подмножеству в $X$, то $X$ и $Y$ равномощны. Эту теорему обычно и называют теоремой Кантора—Бернштейна (без всяких «версий»).

Теперь мы готовы сформулировать теорему Банаха—Тарского.

Будем говорить, что подмножество пространства *ограничено*, если оно содержится в каком-нибудь шаре. Будем говорить, что подмножество пространства *имеет непустую внутренность*, если оно, напротив, содержит какой-нибудь шар.

Теорема 5 (С. Банах, А. Тарский). *Пусть каждое из множеств $X$ и $Y$ является ограниченным подмножеством пространства $\mathbb{R}^3$, имеющим непустую внутренность. Тогда $X$ равносоставлено с $Y$.*