

М. А. ЕВДОКИМОВ

От задачек к задачам



УДК 51(023)
ББК 22.1
Е15

Евдокимов М. А.
От задачек к задачам.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
71 с.
ISBN 978-5-4439-3116-6.
Научно-популярное издание.

Книга содержит 80 необычных задач с подробными решениями и комментариями. Для решения большинства задач первой части («Задачки») не требуется специальных знаний по математике. Это так называемый «математический фольклор», который будет интересен всем любителям поразмышлять над занимательной проблемой. Вторая часть («Задачи») состоит из авторских задач, предлагавшихся на различных математических олимпиадах (Московской, Всероссийской, олимпиадах МГУ и др.). Для удобства читателей книга снабжена тематическим путеводителем.

Для широкого круга читателей.

Подготовлено на основе книги: М. А. Евдокимов. От задачек к задачам. — 2-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1116-8.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
<http://www.mccme.ru>

12+

ISBN 978-5-4439-3116-6

© М. А. Евдокимов, 2017.
© МЦНМО, 2017.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧЕК

1

«Три охотника»

Три охотника сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй — одну, третий — ни одной, но он расплатился пятью патронами. Как должны поделить патроны первые два охотника?

2

«Охрана»

Можно ли расставить охрану вокруг небольшого объекта так, чтобы ни к объекту, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться? (Каждый часовой стоит неподвижно и видит на 100 м строго вперёд.)

3

«Сказка»

В некотором царстве, в некотором государстве есть десять источников с мёртвой водой (№№ 1, 2, ..., 10), которая по вкусу не отличается от обычной, но является сильным ядом (смертельным даже для Кашея Бессмертного). Противоядием для воды из любого источника является вода из источника с бóльшим номером (для воды из источника № 10 противоядия нет). Источники №№ 1, ..., 9 общедоступны, источник № 10 доступен лишь Кашею.

Иван вызвал Кашея на дуэль, предложив обменяться стаканами с мёртвой водой и выпить её. Кашей, конечно, согласился, предложив Ивану воды из источника № 10 и рассчитывая принять её в качестве противоядия. Однако Иван остался жив, а Кашей умер. Как Ивану это удалось?

4

«Торт»

Как тремя прямолинейными разрезами разделить круглый торт на а) семь, б) восемь частей?

В городе Запрещаевске в метро строго запрещено провозить предметы, длина, ширина или высота которых превосходит 1 м. Тем не менее первокласснику Васе удалось провезти лыжи длиной 1,5 м. Как?

Дорога между двумя горными сёлами A и B идёт то в гору, то под гору. Автобус, который развивает среднюю скорость 30 км/ч в гору и 60 км/ч под гору, проехал из A в B и обратно. Какова была его средняя скорость на всём пути?

Король решил устроить экзамен трём придворным мудрецам A , B и C . Он сообщил, что у него имеются два белых и три чёрных колпака. После этого король завязал глаза мудрецам и надел каждому чёрный колпак. Развязав глаза, король спросил: «Может ли кто-нибудь из вас определить цвет своего колпака?».

Мудрецы ответили:

A : «Нет, так как могу ошибиться».

B : «Нет, так как могу ошибиться».

C : «Да, на мне чёрный колпак!».

Как мудрецу C это удалось?

На свой день рождения Маша испекла торт, имеющий форму правильного шестиугольника $ABCDEF$. Разрезав его так, как показано на рис. 1 (M и K — середины сторон AF и FE соответственно), она отдала два выделенных на рис. 1 куска своим гостям: треугольный — Васе, а четырёхугольный — Пете. Кому из Машиных гостей достался больший кусок торта?

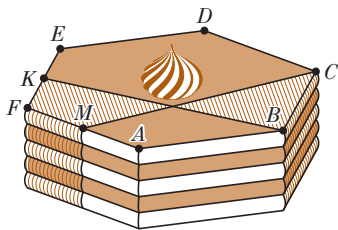


Рис. 1

В волейбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз) 20% всех команд не одержали ни одной победы. Сколько команд участвовало в этом турнире?

Следователь Иванов хочет установить по фотографии (рис. 2), куда ехал автобус. Как это сделать?

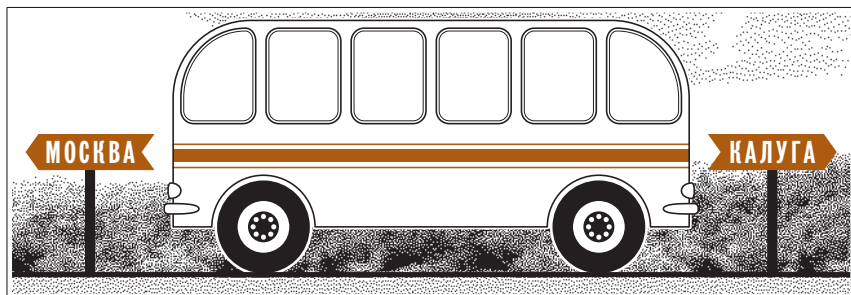


Рис. 2

Али-Баба пытается проникнуть в пещеру с сокровищем. У входа в пещеру стоит барабан с четырьмя отверстиями по бокам. Около каждого отверстия внутри поставлен переключатель, имеющий два положения: «вверх» и «вниз». Разрешается засунуть руки в любые два отверстия, пощупать, как стоят переключатели и переключить их произвольным образом (в частности, можно не переключать). После этого барабан вращается и после остановки нельзя установить, какие именно переключатели переключали в прошлый раз. Разрешается проделать эту операцию до 10 раз. Дверь в пещеру открывается, когда все переключатели в одном положении. Как Али-Бабе попасть в пещеру?

Территория тюрьмы окружена рвом постоянной ширины 2 м (рис. 3). Заключённый оказался на границе этого рва. Он имеет в своём распоряжении две доски длиной 1,9 м каждая. Как ему перебраться через ров?

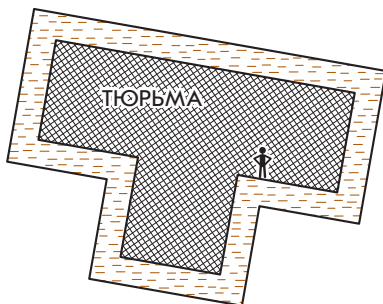


Рис. 3

На шесть внешне одинаковых гирь, массы которых составляют 1 г, 2 г, ..., 6 г, наклеены таблички с надписями «1 г», «2 г», ..., «6 г». Как на чашечных весах за два взвешивания определить, правильно ли наклеены таблички?

В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по его сторонам. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в полтора раза больше максимальной скорости волка. Докажите, что собаки имеют возможность не выпустить волка за пределы поля.

Ночь. Мальчик, папа, мама и бабушка находятся на одном берегу реки и хотят перейти по мосту на другой берег. Они имеют при себе один фонарик. По мосту могут идти максимум двое (обязательно с фонариком). Папа способен преодолеть мост за 1 минуту, мальчик — за 2, мама — за 5, бабушка — за 10 минут. За какое наименьшее время все они смогут переправиться на другой берег?

Участки садового товарищества занимают площадь 100×100 м, причём размер каждого участка равен одной сотке (10×10 метров). Девять участков нерадивых садоводов поросли бурьяном. Если для некоторого участка в какой-то момент оказалось, что два или более соседних по стороне участка поросли бурьяном, то на следующий год порастает и он. Докажите, что, тем не менее, все участки садового товарищества бурьяном не зарастут.

За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных гномов. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и т. д. После того, как последний, седьмой гном

разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе 3 литра молока. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

18

«Обиженная мать»

Молодой человек живёт в Москве возле станции метро. Когда он едет к девушке, то садится в поезд, подходящий к платформе со стороны центра города. Когда же едет к матери, то садится в поезд, идущий в центр. Молодой человек приходит на станцию каждый день в разное время и садится на первый попавшийся поезд. По каждому из направлений поезда ходят с одинаковым интервалом 3 минуты. Тем не менее, молодой человек бывает в гостях у девушки примерно в 10 раз чаще, чем в гостях у матери. Почему?

19

«Авиаинии»

В некотором государстве система авиаинии устроена таким образом, что любой город соединён авиаиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно долететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

20

«Коням тесно»

Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два не били друг друга?

21

«Упрямый жучок»

Вы держите один конец очень эластичного резинового шнура длиной 1 м. От второго его конца, который закреплён, к вам со скоростью 1 см/с ползёт жук. Каждый раз, когда он проползает 1 см, вы удлиняете резинку, отступая на 1 метр. Доползёт ли жук до вашей руки?

22

«Замощение уголками»

Из клетчатой доски размером $2^n \times 2^n$ клеток ($n \geq 1$) вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть можно замостить уголками из трёх клеток.