

А. И. Солонина  
Д. А. Улахович  
С. М. Арбузов  
Е. Б. Соловьева

$$H(e^{j\Omega_0}) = \frac{Y(e^{j\Omega_0})}{X(e^{j\Omega_0})} = k e^{-j\omega_0 T}$$

# Основы цифровой обработки сигналов

## 2-е издание

- Математический аппарат ЦОС
- Синтез цифровых фильтров
- Адаптивная фильтрация
- Многоскоростные цифровые системы
- Нелинейные цифровые системы
- Моделирование обработки сигналов в MATLAB



$$\max_n |e(n)| = \frac{Q}{2} = 2^{-b-1}$$



**А. И. Солонина  
Д. А. Улахович  
С. М. Арбузов  
Е. Б. Соловьева**

# **Основы цифровой обработки сигналов**

## **2–е издание**

*Рекомендовано УМО по образованию в области телекоммуникаций в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 654400 — Телекоммуникации*

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2005

УДК 681.3.06(075.8)  
ББК 32.973я73  
О-75

О-75 Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Авторы: А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева / Изд. 2-е испр. и перераб. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 768 с.: ил.  
ISBN 5-94157-604-8

В книге, написанной на базе курса лекций, читаемых студентам ГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, изложены теоретические основы цифровой обработки сигналов: способы описания дискретных и цифровых сигналов и систем во временной, Z- и частотной областях, включая дискретное и быстрое преобразования Фурье, а также систем в пространстве состояний; основные методы и особенности синтеза цифровых линейных и адаптивных фильтров; понятия о многоскоростных системах ЦОС. Отдельные главы посвящены введению в проблемы передачи параметров линейного предсказания и принципам нелинейной обработки сигналов. Книга содержит большое количество иллюстраций и примеров; рассмотрены основы математического моделирования дискретных сигналов и систем в программной среде MATLAB. Второе издание дополнено рядом новых разделов и лекций: дискретизация относительно узкополосных сигналов, фазовые звенья и др.

*Для студентов вузов  
и специалистов в области цифровой обработки сигналов*

УДК 681.3.06(075.8)  
ББК 32.973я73

#### **Группа подготовки издания:**

|                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| Главный редактор     | <i>Екатерина Кондукова</i>  |
| Зам. гл. редактора   | <i>Людмила Еремеевская</i>  |
| Зав. редакцией       | <i>Григорий Добин</i>       |
| Редактор             | <i>Нина Седых</i>           |
| Компьютерная верстка | <i>Натальи Караваевой</i>   |
| Корректор            | <i>Виктория Пиотровская</i> |
| Дизайн обложки       | <i>Игоря Цырульниковца</i>  |
| Зав. производством   | <i>Николай Тверских</i>     |

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 29.04.05.

Формат 70×100<sup>1/16</sup>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 61.92.

Тираж 5000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ОАО "Техническая книга"  
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

# Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| Принятые сокращения .....  | 1         |
| Предисловие ко второму изданию .....   | 3         |
| <b>ЧАСТЬ I. ВВЕДЕНИЕ .....</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Лекция 1. Введение в ЦОС .....</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов.....   | 7         |
| 1.2. Основные типы сигналов и их математическое описание.<br>Нормирование времени.....                           | 12        |
| 1.3. Типовые дискретные сигналы.....   | 14        |
| 1.4. Основная полоса частот. Нормирование частоты .....  | 17        |
| <b>Лекция 2. Математический аппарат описания сигналов<br/>и линейных систем .....</b>                            | <b>20</b> |
| 2.1. Математическое описание аналоговых сигналов и линейных систем<br>в $p$ -области и в частотной области ..... | 21        |
| 2.1.1. Преобразование Лапласа.....   | 21        |
| 2.1.2. Преобразование Фурье .....  | 23        |
| 2.1.3. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа.....   | 23        |
| 2.1.4. Ряд Фурье.....  | 24        |
| 2.2. Математическое описание дискретных сигналов и линейных систем<br>в $z$ -области и в частотной области.....  | 25        |
| 2.2.1. Дискретное преобразование Лапласа.....  | 25        |
| 2.2.2. $Z$ -преобразование .....   | 26        |
| 2.2.3. Связь $Z$ -преобразования с дискретным преобразованием Лапласа ...  | 27        |
| 2.2.4. Преобразование Фурье .....  | 27        |
| 2.2.5. Связь преобразования Фурье с $Z$ -преобразованием .....   | 29        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Лекция 3. Z-преобразование</b> .....                                     | <b>30</b> |
| 3.1. Z-преобразование.....  | 30        |
| 3.2. Соотношение между $p$ - и $z$ -плоскостями .....                       | 33        |
| 3.3. Отображение $p$ -плоскости на $z$ -плоскость .....                     | 34        |
| 3.4. Основные свойства Z-преобразования .....                               | 39        |
| 3.5. Z-преобразование типовых дискретных сигналов .....                     | 42        |
| 3.6. Обратное Z-преобразование .....  | 49        |
| 3.6.1. Использование таблицы соответствий.....                              | 49        |
| 3.6.2. Прямое вычисление интеграла на основе теоремы Коши<br>о вычетах..... | 51        |
| 3.6.3. Разложение $z$ -изображения на простые дроби.....                    | 54        |

## **ЧАСТЬ II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ**..... **57**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Лекция 4. Описание линейных дискретных систем<br/>во временной области</b> .....     | <b>59</b> |
| 4.1. Импульсная характеристика.....   | 61        |
| 4.2. Соотношение вход/выход.....  | 62        |
| 4.2.1. Формула свертки.....   | 63        |
| 4.2.2. Разностное уравнение.....  | 69        |
| 4.3. Рекурсивные и нерекурсивные линейные дискретные системы .....                      | 71        |
| 4.4. Системы с конечной и бесконечной импульсной характеристикой.....                   | 72        |
| 4.5. Свойства линейных дискретных систем .....  | 74        |
| 4.5.1. Свойство памяти линейных дискретных систем .....                                 | 74        |
| 4.5.2. Устойчивость линейных дискретных систем.....                                     | 75        |
| 4.5.3. Оценка устойчивости по импульсной характеристике:<br>критерий устойчивости ..... | 76        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Лекция 5. Описание линейных дискретных систем в <math>z</math>-области</b> .....        | <b>78</b> |
| 5.1. Передаточная функция. Соотношение вход/выход.....                                     | 78        |
| 5.2. Взаимосвязь между передаточной функцией<br>и разностным уравнением.....               | 83        |
| 5.3. Разновидности передаточных функций .....  | 84        |
| 5.4. Передаточные функции и импульсные характеристики<br>звеньев 1-го и 2-го порядков..... | 88        |
| 5.5. Оценка устойчивости по передаточной функции:<br>критерий устойчивости .....           | 92        |
| 5.6. Карты нулей и полюсов звеньев 1-го и 2-го порядков.....                               | 94        |

|   |                |
|---|----------------|
| <b>Лекция 6. Описание линейных дискретных систем<br/>в частотной области .....</b>          | <b>99</b>      |
| 6.1. Частотная характеристика .....   | 99             |
| 6.1.1. Связь частотной характеристики с передаточной функцией .....                         | 102            |
| 6.1.2. Соотношение вход/выход .....   | 103            |
| 6.2. Свойства частотных характеристик.....  | 104            |
| 6.2.1. Основная полоса частот .....   | 106            |
| 6.3. Расчет АЧХ и ФЧХ.....  | 106            |
| 6.3.1. Расчет АЧХ и ФЧХ звена 1-го порядка .....  | 107            |
| 6.3.2. Расчет АЧХ и ФЧХ звена 2-го порядка .....  | 108            |
| 6.4. Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ .....  | 109            |
| 6.4.1. Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ звена 1-го порядка .....                                   | 109            |
| 6.4.2. Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ звена 2-го порядка .....                                   | 115            |
| 6.4.3. Местоположение нуля, максимума и минимума АЧХ .....                                  | 121            |
| 6.5. Анализ АЧХ по карте нулей и полюсов.....   | 124            |
| 6.6. Минимально-фазовые и неминимально-фазовые ЛДС .....                                    | 126            |
| 6.7. Фазовые звенья .....   | 130            |
| 6.7.1. Определение и свойства фазовых звеньев.....  | 132            |
| 6.7.2. Фазовое звено 1-го порядка .....   | 135            |
| 6.7.3. Фазовое звено 2-го порядка .....   | 138            |
| <br><b>Лекция 7. Структурные схемы линейных дискретных систем.....</b>                      | <br><b>144</b> |
| 7.1. Структуры рекурсивных ЛДС .....  | 145            |
| 7.1.1. Прямая структура.....  | 146            |
| 7.1.2. Прямая каноническая структура 1.....   | 147            |
| 7.1.3. Каноническая структура 2.....  | 148            |
| 7.1.4. Каноническая структура 3.....  | 150            |
| 7.1.5. Каскадная структура.....   | 153            |
| 7.1.6. Параллельная структура.....  | 154            |
| 7.2. Структуры нерекурсивных ЛДС .....  | 155            |
| 7.2.1. Прямая структура.....  | 156            |
| 7.2.2. Каскадная структура.....   | 156            |
| 7.3. Выбор структуры.....   | 157            |
| <br><b>Лекция 8. Описание линейных дискретных систем<br/>в пространстве состояний .....</b> | <br><b>158</b> |
| 8.1. Понятие состояния .....  | 159            |
| 8.2. Описание ЛДС на основе структурных схем.....   | 160            |
| 8.3. Определение уравнений состояния и выхода<br>по передаточной функции .....              | 163            |

|  |            |
|--|------------|
| 8.4. Структурное представление ЛДС по уравнениям<br>состояния и выхода .....                       | 167        |
| <b>Лекция 9. Анализ линейных дискретных систем<br/>в пространстве состояний.....</b>               | <b>171</b> |
| 9.1. Временной анализ.....   | 171        |
| 9.2. Анализ в $z$ -области.....  | 174        |
| 9.3. Линейные преобразования в пространстве состояний .....  | 177        |
| <b>ЧАСТЬ III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ<br/>ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ .....</b>                            | <b>181</b> |
| <b>Лекция 10. Описание дискретных сигналов.....</b>  | <b>183</b> |
| 10.1. Описание дискретных сигналов в частотной области .....                                       | 184        |
| 10.2. Свойства спектров дискретных сигналов .....  | 186        |
| 10.3. Связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов.....                                | 191        |
| 10.4. Дискретизация относительно узкополосных сигналов.....  | 195        |
| 10.5. Преобразование спектра .....   | 200        |
| 10.5.1. Перенос спектра.....   | 200        |
| 10.5.2. Инверсия спектра вещественного сигнала.....  | 203        |
| 10.5.3. Формирование сигнала с одной боковой полосой.....  | 205        |
| 10.5.4. Перенос спектра узкополосного ВЧ-сигнала<br>в область нижних частот .....                  | 208        |
| <b>Лекция 11. Дискретное преобразование Фурье.....</b>   | <b>215</b> |
| 11.1. Дискретное преобразование Фурье периодической<br>последовательности.....                     | 216        |
| 11.2. Дискретное преобразование Фурье конечной последовательности.....                             | 225        |
| 11.3. Свойства ДПФ.....  | 229        |
| <b>Лекция 12. Быстрое преобразование Фурье.....</b>  | <b>243</b> |
| 12.1. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.....   | 244        |
| 12.2. Пример вычисления 8-точечного ДПФ с помощью алгоритма БПФ<br>с прореживанием по времени..... | 255        |
| 12.3. Правило расстановки отсчетов исходной последовательности:<br>операция бит-реверсии.....      | 258        |
| 12.4. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте .....  | 259        |

|   |     |
|---|-----|
| 12.5. Пример вычисления 8-точечного ДПФ с помощью алгоритма БПФ с прореживанием по частоте .....            | 264 |
| 12.6. Оценка выигрыша в количестве операций при вычислении ДПФ с помощью алгоритма БПФ с основанием 2 ..... | 266 |
| 12.7. Вычисление обратного ДПФ с помощью алгоритма БПФ.....   | 267 |

## **ЧАСТЬ IV. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ..... 269**

### **Лекция 13. Линейная дискретная система как генератор случайных сигналов ..... 271**

|  |     |
|--|-----|
| 13.1. Основные понятия вероятностного анализа дискретных сигналов..... | 271 |
| 13.2. Генерирование ЛДС случайных сигналов .....                       | 273 |
| 13.3. Свойства линейных стохастических разностных уравнений.....       | 275 |

### **Лекция 14. Прохождение случайных сигналов через линейные дискретные системы..... 279**

|   |     |
|---|-----|
| 14.1. Анализ во временной области ..... | 279 |
| 14.2. Анализ в частотной области .....  | 281 |
| 14.3. Спектральная факторизация .....   | 283 |

## **ЧАСТЬ V. КВАНТОВАНИЕ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ ..... 287**

### **Лекция 15. Квантование сигналов в цифровых системах ..... 289**

|  |     |
|--|-----|
| 15.1. Представление и кодирование чисел.....   | 289 |
| 15.1.1. Формы представления чисел .....  | 290 |
| 15.1.2. Кодирование чисел .....  | 292 |
| 15.1.3. Арифметические операции над числами<br>с фиксированной запятой.....                | 294 |
| 15.2. Квантование чисел и сигналов .....   | 296 |
| 15.2.1. Способы квантования чисел .....  | 297 |
| 15.2.2. Модели процесса квантования. Предположения<br>о свойствах ошибок квантования ..... | 300 |
| 15.3. Шум аналого-цифрового преобразования.....  | 301 |
| 15.3.1. Линейная модель процесса квантования входного сигнала.<br>Оценки шума АЦП.....     | 301 |
| 15.3.2. Шум АЦП, приведенный к выходу цифровой системы.....                                | 304 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Лекция 16. Эффекты квантования в цифровых системах .....</b>      | <b>307</b> |
| 16.1. Собственный шум цифровой системы .....                         | 307        |
| 16.1.1. Линейная модель цифровой системы .....                       | 308        |
| 16.1.2. Определение составляющих собственного шума.....              | 310        |
| 16.1.3. Вычисление собственного шума .....                           | 311        |
| 16.2. Полный выходной шум системы .....                              | 313        |
| 16.3. Эффекты переполнения в сумматорах .....                        | 315        |
| 16.3.1. Динамический диапазон цифровой системы .....                 | 315        |
| 16.3.2. Масштабирующие коэффициенты .....                            | 316        |
| 16.4. Эффекты квантования коэффициентов цифровой системы.....        | 318        |
| 16.5. Понятие о предельных циклах .....                              | 320        |
| <br>   |            |
| <b>ЧАСТЬ VI. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ .....</b>                              | <b>323</b> |
| <br>   |            |
| <b>Лекция 17. Введение в цифровые фильтры .....</b>                  | <b>325</b> |
| 17.1. Основные определения и классификация цифровых фильтров.....    | 325        |
| 17.2. Синтез цифровых фильтров.....                                  | 328        |
| 17.2.1. Требования к цифровым фильтрам .....                         | 328        |
| 17.2.2. Типы избирательных фильтров и задание требований к ним ..... | 331        |
| 17.2.3. Характеристика задачи оптимального синтеза .....             | 336        |
| 17.2.4. Меры близости в задачах аппроксимации ЦОС .....              | 337        |
| 17.2.5. Постановка задачи оптимального синтеза .....                 | 340        |
| 17.2.6. Весовая функция .....  | 342        |
| 17.3. Конструирование функциональной схемы цифрового фильтра.....    | 344        |
| <br>   |            |
| <b>Лекция 18. КИХ-фильтры с линейной ФЧХ.....</b>                    | <b>345</b> |
| 18.1. Условия безыскаженной передачи сигналов .....                  | 345        |
| 18.2. Теорема о КИХ-фильтрах с линейной ФЧХ .....                    | 348        |
| 18.3. Структурные схемы КИХ-фильтров с линейной ФЧХ .....            | 358        |
| 18.4. Частотные характеристики КИХ-фильтров с линейной ФЧХ .....     | 361        |
| 18.4.1. КИХ-фильтры типа 1 и 3 .....                                 | 363        |
| 18.4.2. КИХ-фильтры типа 2 и 4 .....                                 | 366        |
| 18.5. Свойства КИХ-фильтров с линейной ФЧХ.....                      | 369        |
| 18.5.1. Свойства КИХ-фильтров типа 1 .....                           | 370        |
| 18.5.2. Свойства КИХ-фильтров типа 2 .....                           | 371        |
| 18.5.3. Свойства КИХ-фильтров типа 3 .....                           | 372        |
| 18.5.4. Свойства КИХ-фильтров типа 4 .....                           | 373        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Лекция 19. Синтез КИХ-фильтров методом окон.....</b>                             | <b>376</b> |
| 19.1. Постановка задачи. Определение метода.....                                    | 376        |
| 19.1.1. Общая характеристика задачи .....   | 376        |
| 19.1.2. Явление Гиббса .....  | 379        |
| 19.2. Окна и их основные параметры .....  | 383        |
| 19.2.1. Прямоугольное окно (окно Дирихле) .....                                     | 384        |
| 19.2.2. Треугольное окно (окно Бартлетта) .....                                     | 385        |
| 19.2.3. Обобщенное косинусное окно .....  | 386        |
| 19.2.4. Окно Кайзера.....   | 390        |
| 19.2.5. Определение величины пульсаций Гиббса .....                                 | 393        |
| 19.3. Методика синтеза КИХ-фильтров на основе окон.....                             | 397        |
| <br>  |            |
| <b>Лекция 20. Синтез оптимальных (по Чебышеву) КИХ-фильтров .....</b>               | <b>404</b> |
| 20.1. Понятие об оптимальном (по Чебышеву) синтезе фильтров .....                   | 404        |
| 20.1.1. Постановка задачи оптимального синтеза .....                                | 405        |
| 20.1.2. Понятие о полиномах Чебышева.....   | 412        |
| 20.2. Теорема Чебышева .....  | 415        |
| 20.3. Полиномиальный алгоритм Ремеза .....  | 424        |
| 20.3.1. Понятие об алгоритме Ремеза.....  | 424        |
| 20.3.2. Пример использования обменного алгоритма Ремеза.....                        | 426        |
| <br>  |            |
| <b>Лекция 21. Цифровые преобразователи Гильберта<br/>и дифференциаторы .....</b>    | <b>431</b> |
| 21.1. Цифровой преобразователь Гильберта.....                                       | 431        |
| 21.1.1. Понятие о преобразовании Гильберта .....                                    | 431        |
| 21.1.2. Дискретное преобразование Гильберта.....                                    | 434        |
| 21.1.3. Частотные характеристики цифровых<br>преобразователей Гильберта.....        | 438        |
| 21.1.4. Импульсная характеристика ЦПГ .....   | 440        |
| 21.1.5. Задание требований к цифровым преобразователям Гильберта....                | 444        |
| 21.2. Цифровые дифференциаторы.....   | 447        |
| 21.2.1. Понятие о дифференциаторе .....   | 447        |
| 21.2.2. Частотные характеристики цифровых дифференциаторов .....                    | 448        |
| 21.2.3. Задание требований к цифровым дифференциаторам .....                        | 451        |
| <br>  |            |
| <b>Лекция 22. Специальные КИХ-фильтры .....</b>                                     | <b>456</b> |
| 22.1. Цифровые согласованные КИХ-фильтры .....                                      | 456        |
| 22.1.1. Связь между характеристиками сигнала и согласованного<br>с ним фильтра..... | 457        |

|   |            |
|---|------------|
| 22.1.2. Свойства согласованного фильтра.....  | 463        |
| 22.1.3. Решающая схема обнаружителя сигналов.....   | 467        |
| 22.2. Амплитудные корректоры.....   | 469        |
| <b>Лекция 23. Синтез БИХ-фильтров.....</b>  | <b>473</b> |
| 23.1. Обзор методов синтеза аналоговых фильтров-прототипов.....   | 474        |
| 23.1.1. Реактансные преобразования частоты.....   | 475        |
| 23.1.2. Аппроксимация АЧХ рациональными функциями.....  | 483        |
| 23.2. Синтез БИХ-фильтров методом инвариантности<br>импульсной характеристики.....                        | 492        |
| 23.2.1. Постановка задачи и ее решение.....   | 492        |
| 23.2.2. Свойства БИХ-фильтров, синтезируемых методом<br>инвариантности импульсной характеристики.....     | 496        |
| 23.2.3. Процедура синтеза БИХ-фильтров методом<br>инвариантности ИХ.....                                  | 498        |
| <b>Лекция 24. Синтез БИХ-фильтров методом билинейного<br/>    Z-преобразования.....</b>                   | <b>499</b> |
| 24.1. Билинейное Z-преобразование.....  | 499        |
| 24.1.1. Определение билинейного Z-преобразования.....   | 499        |
| 24.1.2. Свойства билинейного Z-преобразования.....  | 501        |
| 24.1.3. Сравнение методов инвариантности импульсной<br>характеристики и билинейного Z-преобразования..... | 505        |
| 24.1.4. Процедура синтеза цифрового фильтра при билинейном<br>Z-преобразовании.....                       | 507        |
| 24.2. Синтез БИХ-фильтров методом частотных преобразований<br>БИХ-фильтров нижних частот.....             | 517        |
| <b>ЧАСТЬ VII. АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ.....</b>  | <b>525</b> |
| <b>Лекция 25. Введение в линейное предсказание.....</b>   | <b>527</b> |
| 25.1. Постановка задачи линейного предсказания.....   | 528        |
| 25.2. Решение задачи линейного предсказания во временной области.....                                     | 532        |
| 25.3. Вычисление коэффициентов линейного предсказания.....  | 536        |
| 25.3.1. Алгоритм Левинсона—Дарбина.....   | 539        |
| 25.3.2. Устойчивость фильтра-предсказателя.....   | 542        |
| 25.4. Решение задачи линейного предсказания в частотной области.....                                      | 543        |
| 25.5. Линейное предсказание при возбуждении белым шумом.....  | 546        |

|   |            |
|---|------------|
| 25.5.1. Реакция линейной модели на случайный процесс.....                       | 546        |
| 25.5.2. Особенности линейного предсказания при возбуждении<br>белым шумом ..... | 549        |
| <b>Лекция 26. Линейные спектральные пары.....</b>                               | <b>551</b> |
| 26.1. Метод Итакуры .....   | 553        |
| 26.2. Второй метод формирования ЛСК.....  | 559        |
| 26.2.1. Теорема о $z$ -образе полинома Гурвица.....                             | 559        |
| 26.2.2. Вторая процедура вычисления ЛСК .....                                   | 560        |
| 26.3. Обобщение теории ЛСК .....  | 562        |
| 26.4. Поиск спектральных корней.....  | 564        |
| <b>Лекция 27. Основы адаптивной обработки сигналов .....</b>                    | <b>565</b> |
| 27.1. Классификация адаптивных систем обработки сигналов .....                  | 565        |
| 27.2. Постановка задачи адаптивной обработки сигналов .....                     | 567        |
| 27.3. Оптимальное нерекурсивное оценивание .....                                | 568        |
| <b>Лекция 28. Рекуррентные алгоритмы адаптации .....</b>                        | <b>575</b> |
| 28.1. Калмановское оценивание случайного сигнала .....                          | 575        |
| 28.2. Характеристика итерационных алгоритмов адаптации.....                     | 580        |
| 28.3. Градиентные методы адаптации .....  | 582        |
| <b>ЧАСТЬ VIII. МНОГОСКОРОСТНЫЕ СИСТЕМЫ ЦОС.....</b>                             | <b>587</b> |
| <b>Лекция 29. Многоскоростные системы ЦОС .....</b>                             | <b>589</b> |
| 29.1. Однократные системы интерполяции .....                                    | 592        |
| 29.2. Однократные системы децимации .....                                       | 600        |
| 29.3. Полифазная структура систем интерполяции.....                             | 608        |
| 29.4. Полифазная структура систем децимации .....                               | 615        |
| <b>ЧАСТЬ IX. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ЦОС.....</b>                          | <b>621</b> |
| <b>Лекция 30. Основы дискретного вейвлет-анализа .....</b>                      | <b>623</b> |
| 30.1. Усреднение и детализация.....   | 623        |
| 30.2. Матричные представления .....   | 625        |
| 30.3. Обратное вейвлет-преобразование .....                                     | 631        |
| 30.4. Фильтровая реализация вейвлет-преобразования .....                        | 633        |
| 30.5. Дискретные вейвлет-преобразования .....                                   | 636        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>ЧАСТЬ X. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....</b>  | <b>641</b> |
| <b>Лекция 31. Математическое описание нелинейных дискретных систем на основе функциональных рядов и полиномов Вольтерры .....</b> | <b>643</b> |
| 31.1. Операторное уравнение системы и его использование в задачах идентификации, моделирования и синтеза нелинейных систем .....  | 644        |
| 31.2. Описание нелинейной системы во временной области.....   | 648        |
| 31.3. Описание нелинейной системы в $p$ - и $z$ -областях.....  | 650        |
| 31.3.1. Определение прямого многомерного преобразования Лапласа.....  | 650        |
| 31.3.2. Определение обратного многомерного преобразования Лапласа....   | 651        |
| 31.3.3. Определение прямого многомерного $Z$ -преобразования .....  | 653        |
| 31.3.4. Определение обратного многомерного $Z$ -преобразования.....   | 654        |
| 31.4. Описание нелинейной системы в частотной области.....  | 656        |
| 31.4.1. Частотное представление системы на основе преобразования Фурье.....   | 656        |
| 31.4.2. Частотное представление системы на основе дискретного преобразования Фурье.....   | 664        |
| 31.5. Определение параметров нелинейного оператора дискретной системы по среднеквадратическому критерию .....                     | 666        |
| 31.5.1. Построение нелинейного оператора во временной области.....  | 666        |
| 31.5.2. Построение нелинейного оператора в частотной области.....   | 671        |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>  | <b>677</b> |
| <b>Приложение 1. Математическое моделирование обработки сигналов линейной дискретной системой в программной среде MATLAB.....</b> | <b>679</b> |
| П1.1. Моделирование работы ЛДС во временной области.....  | 681        |
| П1.1.1. Моделирование работы ЛДС на основе разностного уравнения: функция <i>filter</i> .....                                     | 681        |
| П1.1.2. Расчет импульсной характеристики по разностному уравнению: функция <i>filter</i> .....                                    | 683        |
| П1.1.3. Расчет импульсной характеристики по коэффициентам разностного уравнения: функция <i>impz</i> .....                        | 685        |
| П1.1.4. Моделирование работы ЛДС на основе уравнения свертки: функция <i>conv</i> .....   | 686        |

|   |     |
|---|-----|
| П1.1.5. Вычисление импульсной характеристики БИХ-фильтра по известным реакции и воздействию: функция <i>deconv</i> .....                                | 689 |
| П1.1.6. Формирование модели переменных состояний: функции <i>tf2ss</i> , <i>zp2ss</i> , <i>ss2tf</i> , <i>ss2zp</i> .....                               | 690 |
| П1.2. Моделирование работы ЛДС в <i>z</i> -области .....  | 691 |
| П1.2.1. Передаточная функция в общем виде .....   | 692 |
| П1.2.2. Передаточная функция в виде произведения простейших множителей: функции <i>tf2zp</i> , <i>zp2tf</i> .....                                       | 693 |
| П1.2.3. Карта нулей и полюсов: функция <i>zplane</i> .....  | 695 |
| П1.2.4. Передаточная функция в виде произведения множителей второй степени: функции <i>tf2sos</i> , <i>zp2sos</i> , <i>sos2tf</i> , <i>sos2zp</i> ..... | 696 |
| П1.2.5. Передаточная функция в виде суммы простых дробей: функция <i>residuez</i> .....   | 698 |
| П1.3. Моделирование работы ЛДС в частотной области .....  | 699 |
| П1.3.1. Расчет частотной характеристики по коэффициентам передаточной функции: функция <i>freqz</i> .....   | 700 |
| П1.3.2. Расчет АЧХ и ФЧХ: функции <i>freqz</i> , <i>abs</i> , <i>angle</i> , <i>dbode</i> .....   | 701 |
| П1.3.3. Расчет группового времени задержки: функция <i>grpdelay</i> .....   | 704 |
| П1.4. Анализ дискретных сигналов .....  | 705 |
| П1.4.1. Анализ дискретного сигнала во временной области: функции <i>mean</i> , <i>std</i> , <i>xcorr</i> .....  | 705 |
| П1.4.2. Анализ дискретного сигнала в частотной области: функции <i>fft</i> , <i>ifft</i> .....  | 707 |

## **Приложение 2. Моделирование цифровой фильтрации с помощью GVI SPTool в программной среде MATLAB..... 712**

|   |     |
|---|-----|
| П2.1. Последовательность действий при работе в SPTool-программе.....      | 712 |
| П2.1.1. Синтез цифрового фильтра .....                                    | 713 |
| П2.1.2. Анализ характеристик синтезированного фильтра .....               | 717 |
| П2.1.3. Создание входного сигнала.....                                    | 719 |
| П2.1.4. Импортирование входного сигнала в SPTool.....                     | 719 |
| П2.1.5. Визуализация входного и выходного сигналов .....                  | 721 |
| П2.1.6. Моделирование процесса фильтрации.....                            | 722 |
| П2.1.7. Расчет и визуализация спектров входного и выходного сигналов..... | 723 |
| П2.2. Выход из программы SPTool.....                                      | 724 |
| П2.3. Экспортирование результатов моделирования в MATLAB .....            | 725 |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Приложение 3. Массивы записей<br/>в программной среде MATLAB.....</b> | <b>728</b> |
| <b>Приложение 4. Необходимые сведения из теории матриц.....</b>          | <b>735</b> |
| Список литературы.....   | 741        |
| Дополнительная литература.....   | 745        |
| Предметный указатель.....  | 747        |

# Принятые сокращения

- АЦП — аналого-цифровой преобразователь;
- АЧХ — амплитудно-частотная характеристика;
- БИХ — бесконечная импульсная характеристика (тип фильтра);
- БПФ — быстрое преобразование Фурье;
- ГВЗ — групповое время задержки;
- ДПФ — дискретное преобразование Фурье;
- ИХ — импульсная характеристика;
- КИХ — конечная импульсная характеристика (тип фильтра);
- КНП — карта нулей и полюсов;
- КФНЧ — комплексный фильтр нижних частот;
- КЧХ — комплексная частотная характеристика;
- ЛДС — линейная дискретная система;
- ЛП — линейное предсказание;
- ЛСК — линейные спектральные корни;
- ЛСП — линейные спектральные пары;
- МНК — метод наименьших квадратов;
- НУН — начальные условия нулевые;
- ОБП — одна боковая полоса (спектра сигнала);
- ОДПФ — обратное дискретное преобразование Фурье;
- ПСС — позиционная система счисления;
- ПФ — передаточная функция;
- ПФ — полосовой фильтр;

- РУ — разностное уравнение;
- РФ — режекторный фильтр;
- СС — система счисления;
- СФНЧ — сглаживающий фильтр нижних частот;
- ФВЧ — фильтр верхних частот;
- ФНЧ — фильтр нижних частот;
- ФЧХ — фазочастотная характеристика;
- ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь;
- ЦОС — цифровая обработка сигналов;
- ЦПГ — цифровой преобразователь Гильберта;
- ЦПОС — цифровой процессор обработки сигналов;
- ЦСП — цифровой сигнальный процессор;
- ЦФ — цифровой фильтр;
- ЧРК — частотное разделение каналов;
- ЧХ — частотная характеристика.

# Предисловие ко второму изданию

В последние годы дисциплина "Цифровая обработка сигналов" (ЦОС) и ее модификации включены в общеобразовательные стандарты российских вузов (к сожалению, с большим опозданием). Однако данная тематика недостаточно поддерживается русскоязычной литературой, особенно учебниками и учебными пособиями. Вместе с тем, учитывая тенденции развития техники связи, отставание в области ЦОС для современного специалиста недопустимо, а потому и актуальность соответствующих книг бесспорна. Подобных книг, отечественных и переводных, должно быть много, т. к. обширность темы практически не позволяет ее охватить в одной работе.

Учебное пособие может быть полезно для всех, желающих самостоятельно изучать ЦОС, однако, в первую очередь, оно ориентировано на студентов и преподавателей вузов и может быть рекомендовано, в частности, для следующих стандартных дисциплин:

- "Микропроцессоры и цифровая обработка сигналов" (специальность 201100);
- "Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры в системах подвижной связи" (специальность 201200);
- "Цифровая обработка аудио-видеосигналов" (специальность 201400).

Содержание книги тематически разделено на 10 частей и включает 31 лекцию. По существу, это расширенный курс по теории ЦОС, причем название "лекция" условно и лишь отражает изучаемую тему. На основе данного курса в зависимости от объема часов и направленности дисциплины могут формироваться более сжатые курсы, которые желательно поддерживать лабораторными и практическими занятиями. В этом смысле весьма перспективно моделирование цифровых сигналов и систем в программной среде MATLAB, основы которой изложены в данном пособии.

*Второе издание* пособия существенно переработано и дополнено: добавлена новая лекция по методам ЦОС в базисе вейвлет-функций (*Лекция 30*), а также ряд новых разделов, в частности, по дискретизации относительно узкополосных сигналов, фазовым звеньям и др. Исправлены досадные опечатки и ошибки, допущенные в первом издании.

Предполагается, что читатели знакомы с основами теории аналоговых линейных цепей и вычислительной техники.

Над книгой работало четверо авторов лекций и приложений:

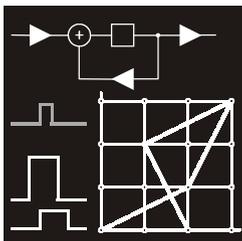
- Алла Ивановна Солонина — *Лекции 1—7, 10—12, 29, Прил. 1—3.*
- Дмитрий Андреевич Улахович — *Лекции 17—26, пп. 6.6, 6.7, 10.3.1, 10.4.4.*
- Сергей Михайлович Арбузов — *Лекции 8, 9, 13, 14, 27, 28, 30, Прил. 4.*
- Елена Борисовна Соловьева — *Лекции 15, 16, 31.*

Все авторы являются преподавателями кафедры "Цифровая обработка сигналов" Государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, возглавляемой профессором Артуром Абрамовичем Ланнэ, которому авторы очень признательны за помощь в подготовке книги.

При написании учебного пособия учтен опыт авторов в чтении лекций и проведении лабораторных и практических занятий. Широко использовались работы наших коллег, к сожалению, уже ушедших из жизни: профессоров Гольденберга Льва Моисеевича и Матюшкина Бориса Дмитриевича.

Все предложения и замечания, которые будут приняты с благодарностью, просим присылать по электронным адресам:

- Солониной А. И. — [alla\\_solonina@e-mail.ru](mailto:alla_solonina@e-mail.ru);
- Улаховичу Д. А. — [dau-spb@yandex.ru](mailto:dau-spb@yandex.ru);
- Соловьевой Е. Б. — [selenab@hotbox.ru](mailto:selenab@hotbox.ru).



# **ЧАСТЬ I**

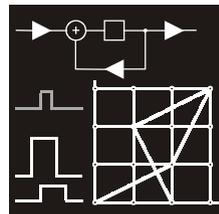
## **ВВЕДЕНИЕ**

**Лекция 1. Введение в ЦОС**

**Лекция 2. Математический аппарат описания  
сигналов и линейных систем**

**Лекция 3. Z-преобразование**

# Лекция 1



## Введение в ЦОС

*Цифровая обработка сигналов* (ЦОС) — это область науки и техники, в которой изучаются общие для различных технических приложений принципы, методы и алгоритмы обработки сигналов средствами цифровой вычислительной техники.

### 1.1. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов

Обобщенная схема ЦОС (рис. 1.1) отображает последовательность процедур, необходимых для преобразования исходного аналогового сигнала  $x(t)$  в другой аналоговый сигнал  $y(t)$  по заданному алгоритму средствами цифровой вычислительной техники.

В цифровой обработке сигнала можно выделить *три* основных этапа:

- ❑ формирование *цифрового* сигнала  $x_{\text{ц}}(nT)$  из исходного *аналогового* сигнала  $x(t)$ ;
- ❑ преобразование *цифрового* сигнала  $x_{\text{ц}}(nT)$  в *цифровой* сигнал  $y_{\text{ц}}(nT)$  по заданному алгоритму;
- ❑ формирование результирующего *аналогового* сигнала  $y(t)$  из *цифрового* сигнала  $y_{\text{ц}}(nT)$ .

В обобщенной схеме ЦОС этим этапам соответствуют *три* функциональных устройства:

- ❑ кодер;
- ❑ устройство ЦОС;
- ❑ декодер.

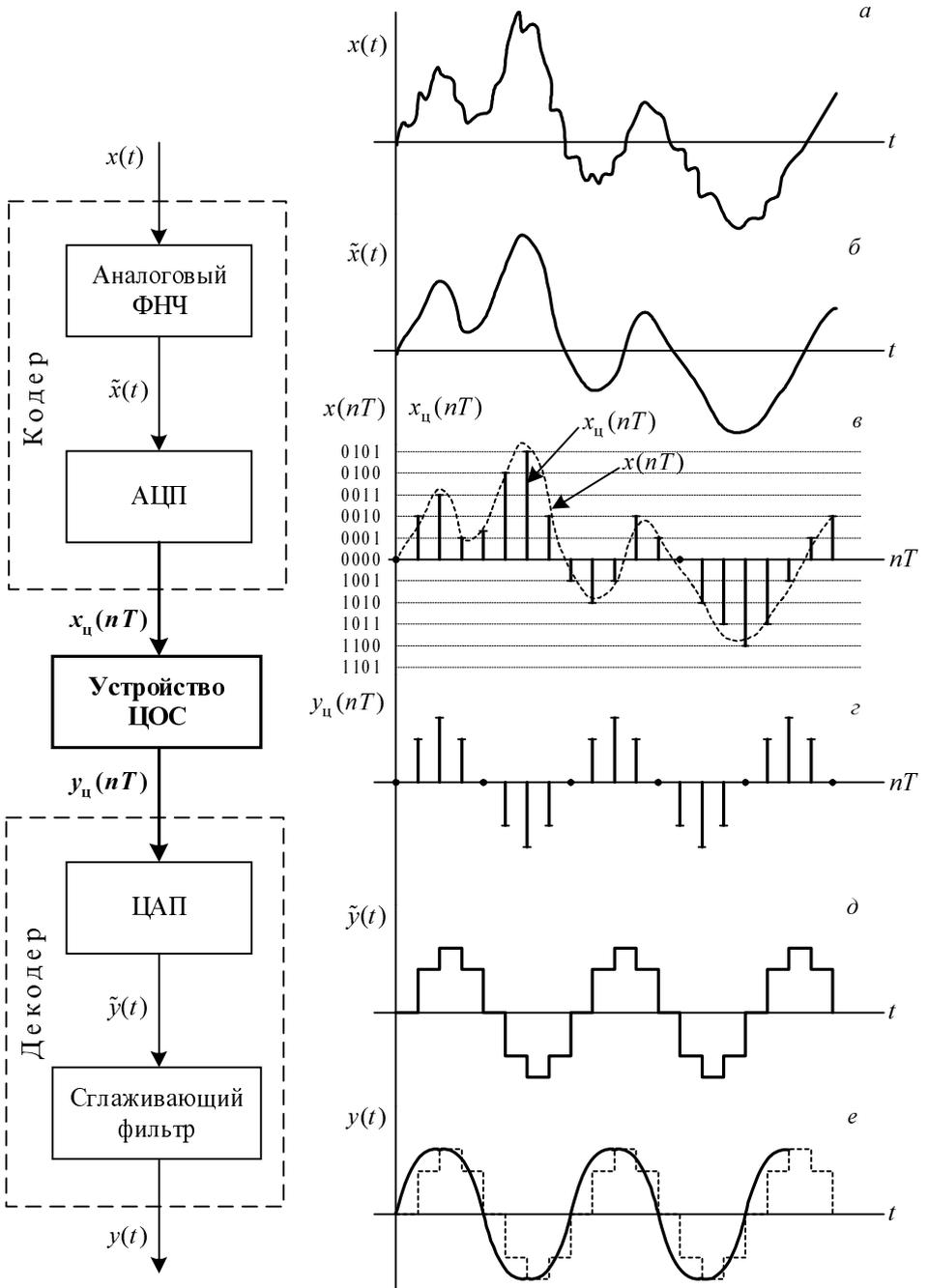


Рис. 1.1. Обобщенная схема цифровой обработки сигнала

Обобщенная схема и временные диаграммы поэтапного процесса ЦОС приведены на рис. 1.1, *a—e*. Рассмотрим каждый из этапов:

1. На *первом* этапе *кодер* из исходного *аналогового* сигнала  $x(t)$  (рис. 1.1, *a*) формирует *цифровой* сигнал  $x_{ц}(nT)$  (рис. 1.1, *б*), без чего принципиально невозможна *цифровая* обработка. В состав кодера входят аналоговый фильтр нижних частот (ФНЧ) и аналого-цифровой преобразователь (АЦП).

*Аналоговый фильтр нижних частот* предназначен для ограничения спектра  $X(j\omega)$  исходного аналогового сигнала  $x(t)$ .

*Необходимость* ограничения спектра вытекает из теоремы Котельникова, в соответствии с которой частота дискретизации  $f_d$  выбирается из условия:  $f_d \geq 2f_v$ , где  $f_v$  — верхняя частота спектра сигнала.

*Возможность* ограничения спектра связана с особенностями частотного распределения энергии сигнала: основная часть его энергии сосредоточена в области  $f \leq f_v$ , т. е. амплитуды спектральных составляющих, начиная с некоторой частоты  $f > f_v$ , существенно снижаются (рис. 1.2, *a*). Выбор значения  $f_v$  определяется конкретным типом сигнала и решаемой задачей. При обработке аудио- и видеосигналов выбор  $f_v$  зависит от особенностей психофизического восприятия этих сигналов. Например, для стандартного телефонного сигнала верхняя частота  $f_v$  равна 3,4 кГц, а минимальная стандартная частота дискретизации  $f_d$  — 8 кГц.

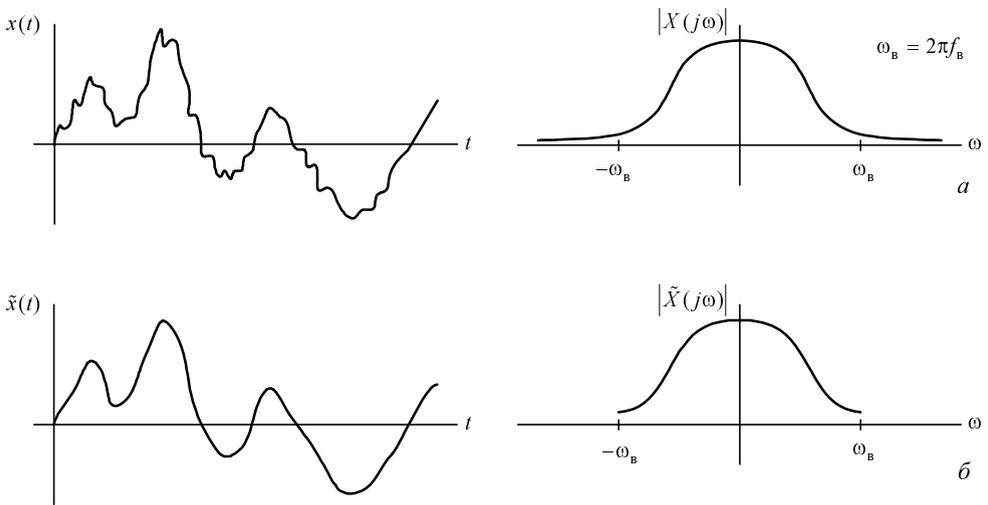
На выходе ФНЧ получают аналоговый сигнал  $\tilde{x}(t)$  с *финитным* (ограниченным по частоте) спектром  $\tilde{X}(j\omega)$  (рис. 1.2, *б*). Оценка погрешности при переходе от сигнала  $x(t)$  к сигналу  $\tilde{x}(t)$  дается в [50].

*Аналого-цифровой преобразователь* формирует цифровой сигнал  $x_{ц}(nT)$  посредством дискретизации и квантования сигнала  $\tilde{x}(t)$  (рис. 1.1, *в*).

*Дискретизация по времени (дискретизация)* представляет собой процедуру взятия мгновенных значений — *отсчетов* — аналогового сигнала  $\tilde{x}(t)$  с интервалом времени, равным периоду дискретизации<sup>1</sup>  $T$ . Значения отсчетов  $x(nT)$  совпадают со значениями сигнала  $\tilde{x}(t)$  в моменты времени  $t = nT$ :

$$x(nT) = \tilde{x}(t) \Big|_{t=nT}.$$

<sup>1</sup> По умолчанию будем подразумевать равномерную (эквидистантную) дискретизацию.



**Рис. 1.2.** Сигналы и их амплитудные спектры на входе (а) и выходе (б) ФНЧ

Совокупность отсчетов  $x(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  называют *дискретным сигналом*. *Квантование по уровню* (*квантование*) производится с целью представления точных значений отсчетов  $x(nT)$  в виде двоичных чисел конечной разрядности — *квантованных отсчетов*  $x_{ц}(nT)$ . Для этого динамический диапазон дискретного сигнала  $x(nT)$  разбивается на конечное число дискретных уровней — *уровней квантования* — и каждому отсчету по определенному правилу присваивается значение одного из ближайших уровней, между которыми он оказывается. Уровни квантования кодируются двоичными числами разрядности  $b$ , зависящей от числа уровней квантования  $R$ :

$$R \leq 2^b,$$

откуда  $b = \text{int}(\log_2 R)$ . На временной диаграмме (рис. 1.1, в) для примера выбрано 5 уровней квантования (без учета знака), поэтому  $b = 3$  и отсчеты  $x_{ц}(nT)$  кодируются четырехразрядными двоичными числами: один разряд знаковый, три значащих.

Совокупность квантованных отсчетов  $x_{ц}(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  называют *цифровым сигналом*.

Детерминированные и вероятностные оценки ошибки квантования  $e_{\text{кв}}(n)$  за счет АЦП

$$e_{\text{кв}}(n) = x(nT) - x_{\text{ц}}(nT)$$

будут изучаться в *Лекции 15*.

2. На *втором* этапе устройство ЦОС преобразует *цифровой* сигнал  $x_{\text{ц}}(nT)$  (рис. 1.1, *в*) в *цифровой* сигнал  $y_{\text{ц}}(nT)$  (рис. 1.1, *г*) по заданному алгоритму.

Устройство ЦОС может быть реализовано *аппаратно* или *программно*. В первом случае — в виде специализированного цифрового устройства, во втором — в виде *программы* на компьютере или цифровом процессоре обработки сигналов (ЦПОС). Программная реализация преобладает.

Устройства ЦОС могут работать в реальном или нереальном времени.

В *реальном времени* обработка сигналов должна выполняться в темпе поступления отсчетов входного сигнала  $x_{\text{ц}}(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  и отвечать следующим требованиям:

- время цикла  $\Delta t_{\text{ц}}$  при вычислении отсчета  $y_{\text{ц}}(nT)$  не должно превышать интервала между двумя соседними отсчетами  $x_{\text{ц}}(nT)$ , т. е. периода дискретизации  $T$

$$\Delta t_{\text{ц}} \leq T ;$$

- тактовая частота  $f_{\tau}$  процессора должна быть много выше частоты дискретизации  $f_{\text{д}}$  сигнала  $x_{\text{ц}}(nT)$

$$f_{\tau} \gg f_{\text{д}} .$$

Последнее вызвано тем, что в алгоритмах ЦОС количество операций в цикле, необходимое для вычисления одного отсчета  $y_{\text{ц}}(nT)$ , весьма велико. Например, для стандартного телефонного сигнала с частотой дискретизации 8 кГц тактовая частота должна быть не менее 6 мГц.

В *реальном времени* выполняется обработка сигналов, связанная с их передачей по каналам связи, в том числе, по сети Internet. К типовым задачам ЦОС в реальном времени относятся: обнаружение, фильтрация, сжатие, распознавание сигналов и др.

В *нереальном времени* выполняется обработка сигналов, связанная, прежде всего, с их исследованием. К типовым задачам ЦОС в нереальном времени относятся: студийная обработка аудио- и видеосигналов; обработка данных различной физической природы, полученная от датчиков, и др.

3. На *третьем* этапе декодер формирует результирующий *аналоговый* сигнал  $y(t)$  из *цифрового* сигнала  $y_{ц}(nT)$ . В состав декодера входят цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) и сглаживающий фильтр.

*Цифро-аналоговый преобразователь* формирует из цифрового сигнала  $y_{ц}(nT)$  (рис. 1.1, *з*) ступенчатый аналоговый сигнал  $\tilde{y}(t)$  (рис. 1.1, *д*).

*Сглаживающий фильтр* (низкочастотный) устраняет ступенчатый эффект (скачки) в выходном сигнале ЦАП  $\tilde{y}(t)$ . На выходе сглаживающего фильтра получаем аналоговый сигнал  $y(t)$  (рис. 1.1, *е*) — результат преобразования исходного сигнала  $x(t)$ .

Предметами изучения в настоящем курсе лекций являются (на рис. 1.1 выделено полужирным шрифтом):

- дискретные и цифровые сигналы;
- устройства ЦОС: линейные и нелинейные дискретные системы, методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов.

## 1.2. Основные типы сигналов и их математическое описание.

### Нормирование времени

*Сигналом* называют физический процесс, несущий в себе информацию [17]. Математически сигналы описываются *функциями времени*, тип которых зависит от типа сигнала. К основным типам сигналов относят: *аналоговый*, *дискретный* и *цифровой*.

*Аналоговым* называют сигнал, непрерывный по времени и состоянию (рис. 1.3, *а*). Такой сигнал описывается *непрерывной* или кусочно-непрерывной функцией  $x(t)$ , при этом и аргумент, и функция могут принимать любые значения из некоторых интервалов  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$  соответственно.

*Дискретным* называют сигнал, дискретный по времени и непрерывный по состоянию (рис. 1.3, *б*). Такой сигнал описывается решетчатой функцией (*последовательностью*)  $x(nT)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , которая определена только в дискретные моменты времени  $nT$  и может принимать любые значения из некоторого интервала  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

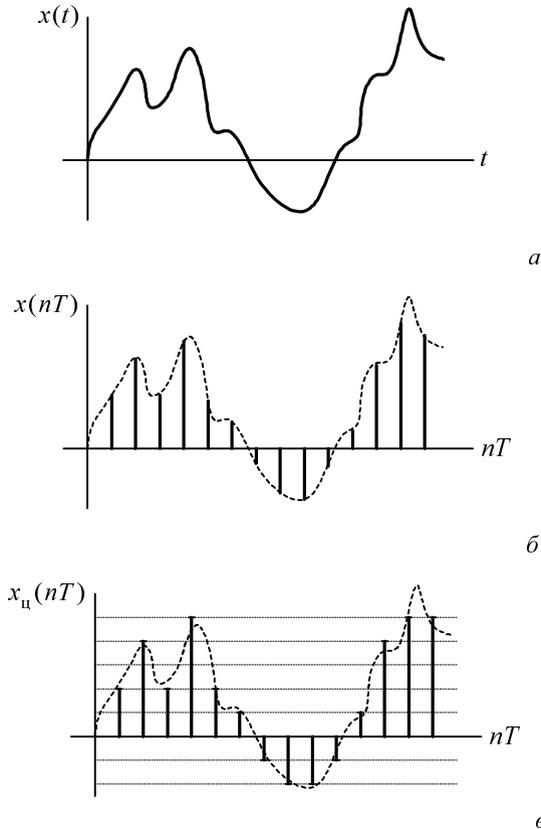
Интервал  $T$  называют *периодом* дискретизации, а обратную величину — *частотой* дискретизации

$$f_{д} = \frac{1}{T}. \quad (1.1)$$

Значения последовательности в моменты времени  $nT$  называют *отсчетами*. Дискретный сигнал может быть как *вещественным*, так и *комплексным*. В последнем случае его вещественная и мнимая части описываются вещественными последовательностями

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

*Цифровым* называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию (рис. 1.3, в). Такой сигнал описывается квантованной решетчатой функцией (*квантованной последовательностью*)  $x_{ц}(nT)$ , отсчеты которой в каждый момент времени  $nT$  принимают дискретные значения уровней квантования из некоторого интервала  $x_1 \leq x \leq x_2$ .



**Рис. 1.3.** Основные типы сигналов: аналоговый (а), дискретный (б) и цифровой (в)

При описании дискретных и цифровых сигналов удобно пользоваться *нормированным временем*  $\hat{t}$

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

которое при  $t = nT$  имеет смысл *номера* отсчета  $n$

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n \quad (1.2)$$

и означает, что отсчет взят в момент  $nT$ . Это позволяет описывать дискретный сигнал функцией целочисленной переменной  $x(n)$  и считать тождественными обозначения дискретного сигнала  $x(n)$  и  $x(nT)$ :

$$x(nT) \equiv x(n).$$

### 1.3. Типовые дискретные сигналы

В ЦОС ряд дискретных сигналов используют в качестве испытательных воздействий и называют *типовыми*. К ним относятся:

1. *Цифровой единичный импульс*, описываемый последовательностью

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

т. е. этот сигнал равен единице при  $n = 0$  и нулю при всех остальных значениях  $n$  (рис. 1.4, а).

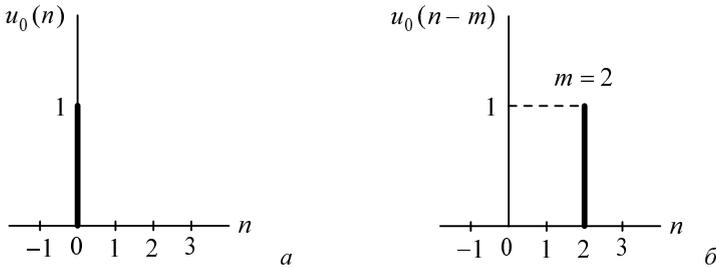
*Задержанный* цифровой единичный импульс описывается последовательностью

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (1.4)$$

т. е. этот сигнал, в отличие от незадержанного, равен единице при  $n = m$  и нулю при всех остальных значениях  $n$  (рис. 1.4, б).

Из определения задержанного цифрового единичного импульса (1.4) вытекает важное соотношение

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n - m). \quad (1.5)$$



**Рис. 1.4.** Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) импульсы

По определению (1.4) последовательность  $u_0(n-m)$  равна нулю во всех точках  $n$ , кроме  $n = m$  (где она равна единице), поэтому слагаемые в (1.5) при всех значениях  $m$ , кроме  $m = n$ , равны нулю, а значит, сумма равна  $x(n)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n-m) &= x(0)u_0(n) + x(1)u_0(n-1) + \dots + x(n)u_0(n-n) + \\ &+ x(n+1)u_0[n-(n+1)] + \dots = 0 + 0 + \dots + x(n)u_0(0) + 0 + \dots = x(n). \end{aligned}$$

Например, подставляя в (1.5)  $n = 2$ , имеем

$$\begin{aligned} x(2) &= x(0)u_0(2) + x(1)u_0(1) + x(2)u_0(0) + x(3)u_0(-1) + \dots = \\ &= 0 + 0 + x(2)u_0(0) + 0 + \dots = x(2). \end{aligned}$$

По аналогии со свойством дельта-функции [17] соотношение (1.5) называют *фильтрующим свойством* или *свойством селективности* цифрового единичного импульса.

2. *Цифровой единичный скачок*, описываемый последовательностью

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

т. е. этот сигнал равен единице при всех неотрицательных значениях  $n$  (рис. 1.5, а).

*Задержанный* цифровой единичный скачок (рис. 1.5, б) описывается последовательностью

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m, \end{cases} \quad (1.7)$$

т. е. этот сигнал, в отличие от незадержанного, равен единице при всех значениях  $n \geq m$  и нулю при остальных значениях  $n$ .

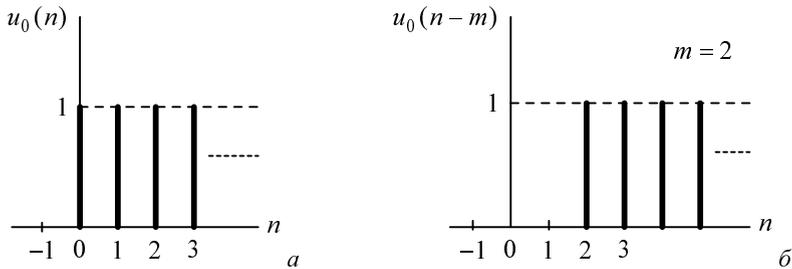


Рис. 1.5. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) скачки

3. *Дискретная экспонента*, описываемая последовательностью

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $a$  — вещественная константа. В зависимости от величины и знака  $a$  дискретная экспонента будет:

- $|a| < 1$  и  $a > 0$  — убывающей знакопостоянной (рис. 1.6, а);
- $|a| < 1$  и  $a < 0$  — убывающей знакопеременной (рис. 1.6, б);
- $|a| > 1$  — возрастающей;
- $|a| = 1$  и  $a > 0$  — цифровым единичным скачком;
- $|a| = 1$  и  $a < 0$  — знакопеременной последовательностью единиц.

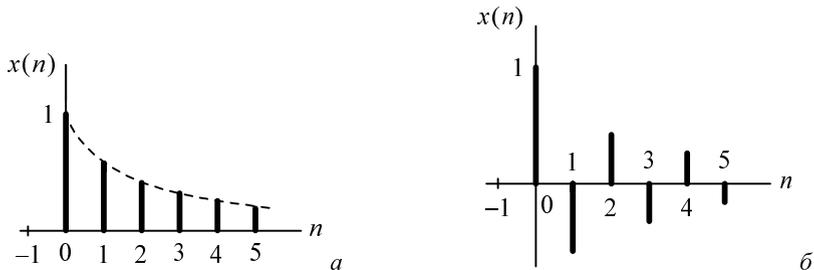


Рис. 1.6. Знакопостоянная (а) и знакопеременная (б) дискретные экспоненты

4. *Дискретный гармонический сигнал*, например, дискретная косиноида, описываемая последовательностью

$$x(nT) = x(n) = A \cos(2\pi fnT) = A \cos(\omega nT), \quad (1.9)$$