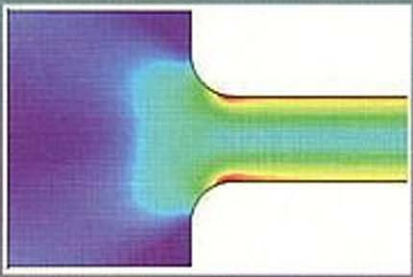
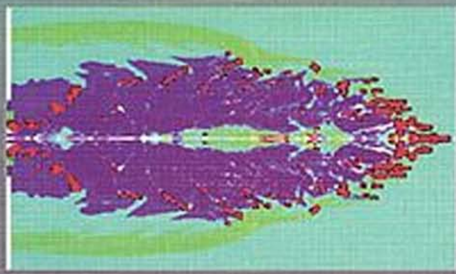
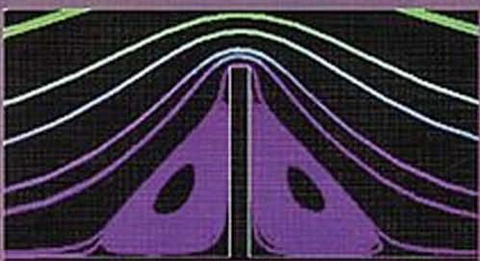
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

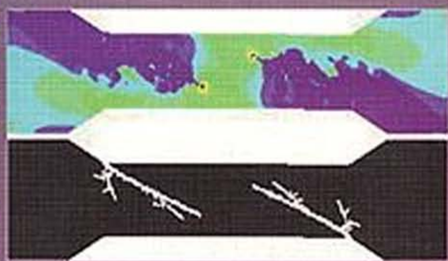
ГОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



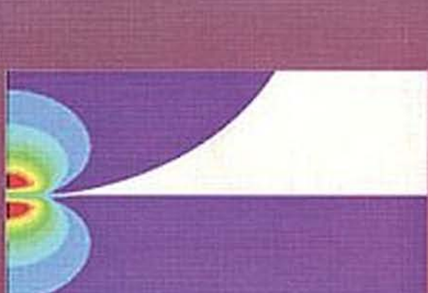


# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРИМЕРАХ, ЗАДАЧАХ И ТЕСТАХ





Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУ ВПО МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*В.И. Андреев, А.Я. Астахова, А.В. Ильяшенко, Е.Л. Кошелева,*
*С.В. Кузнецов, А.Н. Леонтьев, И.Г. Леонтьева, И.И. Фролова*

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРИМЕРАХ, ЗАДАЧАХ И ТЕСТАХ

*Учебное пособие*

Под общей редакцией профессора *В.И. Андреева*

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов РФ по образованию в области строительства в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению 270100 «Строительство»*

М о с к в а 2011

УДК 539.3

**Основы теории упругости в примерах, задачах и тестах**. Учебное пособие /В.И.Андреев, А.Я.Астахова, А.В.Ильяшенко, Е.Л.Кошелева, С.В.Кузнецов, А.Н.Леонтьев, И.Г.Леонтьева, И.И.Фролова. – М., МГСУ, 2011. – 80 с. с ил.

Настоящее учебное пособие по курсу "Сопротивление материалов с основами теории упругости, пластичности и ползучести" посвящено разделам: "Напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела", "Плоская задача теории упругости", "Изгиб прямоугольных и кольцевых пластин". Приведены основные формулы теории упругости, рассмотрены примеры решения задач, даны примеры различных компьютерных тестов по рассмотренным темам и подробные комментарии к вариантам возможных ответов.

Учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при выполнении расчетно-графических работ и при подготовке к различным видам контроля знаний (защита расчетно-графических работ, компьютерное тестирование, зачеты и экзамены).

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

заведующий кафедрой строительной механики и высшей математики МАРХИ, профессор, д.т.н. В.А.Смирнов;
доцент кафедры САПР транспортных конструкций и сооружений Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), к.т.н. В.С. Наумов

# ГЛАВА 1
# ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

## 1.1. Теория напряжений

### *1.1.1. Тензор напряжений. Уравнения равновесия.*

В теории упругости тензором напряжений называют совокупность компонент напряжений, действующих по граням элементарного параллелепипеда (на рис. 1.1. показаны положительные компоненты тензора напряжений). Обозначают тензор напряжений так же, как и квадратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

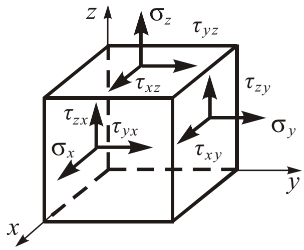



Рис.1.1

Уравнениями равновесия (уравнениями Навье) в теории упругости называют уравнения, выражающие факт равновесия элементарного объема, выделенного из тела:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

В этих уравнениях $X$, $Y$, $Z$ – проекции объемных сил на оси координат. Уравнения равновесия устанавливают закономерности изменения напряжений при переходе от точки к точке (компоненты напряжения, имеющие одинаковые индексы, равны. Например, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. Эти равенства называются законом парности касательных напряжений).

Пример 1.1

Проверка удовлетворения условий равновесия для компонент тензора напряжений, полученных из решения задачи об изгибе балки в сопротивлении материалов.

Пусть имеется балка на двух опорах прямоугольного поперечного сечения, загруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.2). Проверить, будут ли компоненты тензора напряжений, полученные в курсе сопротивления материалов, удовлетворять уравнениям равновесия.

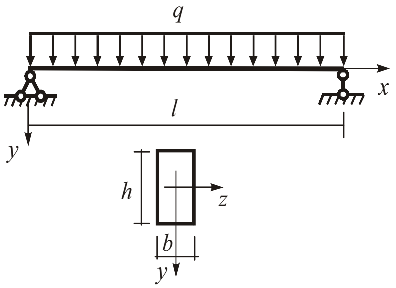



Рис. 1.2

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_z^{отс}}{J_z b};$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0.$$

Решение

Подставив выражения для изгибающего момента, поперечной силы и статического момента отсеченной части поперечного сечения

$$M_z = \frac{qx(l-x)}{2}; \quad Q_z = q(\frac{l}{2} - x); \quad S_z^{\text{отс}} = \frac{b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)}{2}$$

в формулы для компонент $\sigma_x$, $\tau_{xy}$, получим:

$$\sigma_x = \frac{qx(l-x)}{2J_z} y; \quad \tau_{xy} = \frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)}{2J_z}.$$

Подстановка этих компонентов в первое уравнение равновесия (1.1) показывает, что это уравнение тождественно удовлетворяется, аналогичным образом тождественно удовлетворяется и третье уравнение (1.1), а второе уравнение не удовлетворяется.

Этот факт интересен тем, что он показывает приближенность некоторых решений, полученных в курсе сопротивления материалов.

### *1.1.2. Напряжения на наклонных площадках*

Компоненты тензора напряжений определяют напряжения, действующие по граням элементарного кубика, выделенного из тела. Если перейти к наклонной площадке, вектор единичной нормали к которой обозначен $\vec{\nu}$ (рис. 1.3), то на этой площадке будут действовать напряжения

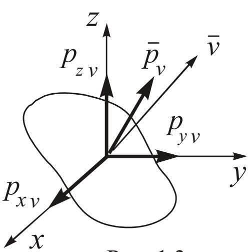



Рис. 1.3

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + \sigma_z n; \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $p_{x\nu}$, $p_{y\nu}$, $p_{z\nu}$ – проекции на оси координат полного напряжения $\bar{p}_\nu$, действующего на исследуемой наклонной площадке. В приведенных выше формулах $\ell$, $m$, $n$ – проекции вектора единичной нормали $\vec{\nu}$ на оси координат. Из аналитической геометрии хорошо известно, что проекция вектора единичной длины на какую-либо ось численно равна косинусу угла между этим вектором и осью. Поэтому проекции $\ell$, $m$, $n$ называют направляющими косинусами вектора $\bar{\nu}$. Приведенные соотношения устанавливают закономерности изменения напряжений при повороте площадки.

*1.1.3. Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений*

Из тензорной алгебры известно, что для любого тензора второго ранга (и, в частности, для тензора напряжений) существуют три взаимно ортогональных оси $x'$, $y'$, $z'$, таких, что в этой новой системе координат тензор напряжений принимает диагональный вид. Такие оси называют главными осями, а компоненты, стоящие на главной диагонали – главными компонентами. Для тензора напряжений главные компоненты обозначают так: $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, причем $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$. Значения $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ находят как корни кубического уравнения:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \qquad (1.3)$$

где $I_1$, $I_2$, $I_3$ – коэффициенты полинома. Эти коэффициенты называются инвариантами тензора напряжений, поскольку при всевозможных преобразованиях вращения они сохраняют постоянные значения. Эти инварианты выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \qquad (1.4)$$

$$I_3 = \det\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.$$

## 1.2. Теория деформаций

*1.2.1. Тензор деформаций. Соотношения Коши.*

Тензором деформаций в линейной теории упругости называют совокупность величин

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$ – линейные деформации, определяющие удлинения или укорочения отрезков единичной длины в направлении координатных осей, а элементы $\gamma_{xy}$, $\gamma_{yx}$, $\gamma_{xz}$, $\gamma_{zx}$, $\gamma_{yz}$, $\gamma_{zy}$ определяют сдвиги в соответствующих плоскостях.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора перемещений соотношениями Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{1.5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}; \; \gamma_{yz} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \;\; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Соотношения Коши показывают, что для компонент тензора деформаций, так же, как и для компонент тензора напряжений, выполняются соотношения взаимности

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}; \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}.$$

*1.2.2. Условия совместности деформаций Сен-Венана*

Для произвольных компонент тензора деформаций может оказаться невозможным получить компоненты вектора перемещений интегрированием соотношений Коши. Для того, чтобы эти соотношения были интегрируемы, необходимо наложить некоторые ограничения на компоненты тензора деформаций. Эти соотношения называют условиями совместности или неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, &\quad& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z},\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, && \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x},\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, && \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

## 1.3. Физические соотношения

В случае изотропного упругого тела связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций дается законом Гука

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right];\\
&\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right];\\
&\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right];\\
&\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \;\; \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\gamma_{yz}; \;\; \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx},
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

где $E$ – модуль Юнга; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $G$ – модуль сдвига, причем $G = E/(2(1+\nu))$.

В расчетах на прочность часто требуется знание удельной потенциальной энергии деформирования $U$, которая определяется по формуле:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \gamma_{zx}\tau_{zx}). \qquad (1.8)$$

Иногда вместо полной удельной потенциальной энергии деформирования определяют удельную потенциальную энергию формоизменения $U_Ф$:

$$U_Ф = U - U_0,$$

где $U_0 = \frac{1}{6}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ представляет собой удельную потенциальную энергию, связанную с изменением объема.

При этом $U_Ф = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_x)^2\right] +$

$$+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2).$$

**Задачи**

1.1. Сколько всего компонент у тензора напряжений?

1.2. Сколько из них независимых (вспомнить закон парности касательных напряжений)?

1.3. Показать на гранях элементарного параллелепипеда следующие компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_x = -5 \text{ МПа};\ \sigma_y = 3 \text{ МПа};\ \sigma_z = 0;\ \tau_{xy} = -2 \text{ МПа};$$
$$\tau_{yz} = -4 \text{ МПа};\ \tau_{zx} = -1 \text{ МПа}$$

(принять во внимание, что на рис. 1.1 показаны положительные компоненты).

1.4. Предположив, что объемные силы равны нулю, проверить, будут ли выполняться условия равновесия для следующих компонент тензора напряжений:

$$\sigma_x = ax^2 y;\ \tau_{xy} = -axy^2;\ \tau_{zx} = 0;\ \sigma_y = \frac{1}{3}ay^3;\ \tau_{yz} = 0;\ \sigma_z = 0.$$

1.5. Определите компоненты вектора $\bar{p}_\nu$ в точках $A, B, C, D$ на гранях тела, показанного на рис.1.4, если компоненты тензора напряжений постоянны и имеют значения

$$\sigma_x = 10 \text{ МП};\ \sigma_y = 20 \text{ МПа};\ \sigma_z = 0;$$
$$\tau_{xy} = -5 \text{ МПа};\ \tau_{yz} = 0;\ \ \tau_{zx} = 0.$$

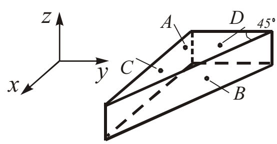



Рис. 1.4

1.6. Как будут записаны инварианты тензора напряжений для главной системы координат, в которой тензор напряжений имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

1.7. Изменятся ли значения инвариантов $I_1$, $I_2$, $I_3$ при переходе к какой-либо иной системе координат?

1.8. Пусть тензор деформаций имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & & 0 \\ & \varepsilon_y & \\ 0 & & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

причем компоненты этого тензора являются функциями от координат

$$\varepsilon_x = ax^2;\ \varepsilon_y = by^3;\ \varepsilon_z = cz.$$

Определите, используя соотношения Коши, компоненты вектора перемещений $u$, $\upsilon$, $w$. Предполагается, что компонента $u$ зависит только от $x$, $\upsilon$ – только от $y$, $w$ – от $z$.

1.9. Запишите инварианты $I_1$, $I_2$, $I_3$ для тензора деформаций по аналогии с формулами для инвариантов тензора напряжений.

1.10. Удовлетворяют ли условиям совместности деформаций компоненты тензора деформаций из задачи 1.8?

1.11. Пусть компоненты тензора деформаций являются следующими функциями координат:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = f(x, y, z),$$

где $f$ – произвольная функция, отличная от константы.

а) Запишите этот тензор в виде матрицы $\begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix}$

(этот случай называют простым неравномерным сдвигом).

б) Удовлетворяются ли уравнения совместности деформаций в этом случае?

в) Какой вывод отсюда следует? Попытайтесь представить картину такого деформирования геометрически.

1.12. Величина $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ представляет собой объемную деформацию элементарного параллелепипеда. Используя закон Гука (1.7), найдите зависимость $e$ от средних напряжений $\sigma_{\text{ср}}$,

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

1.13. Получите закон Гука в «обратной» форме, когда компоненты тензора напряжений выражены через деформации.

1.14. Используя закон Гука в форме, полученной в задаче 1.13, найдите выражения для энергий $U$, $U_{\Phi}$, $U_0$ в терминах только деформаций.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Игоревич АНДРЕЕВ
Августина Яковлевна АСТАХОВА
Алла Викторовна ИЛЬЯШЕНКО
Елена Леонидовна КОШЕЛЕВА
Сергей Владимирович КУЗНЕЦОВ
Андрей Николаевич ЛЕОНТЬЕВ
Ирина Георгиевна ЛЕОНТЬЕВА
Ирина Ивановна ФРОЛОВА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРИМЕРАХ, ЗАДАЧАХ И ТЕСТАХ

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020675 от 09.12.97 г.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Подписано в печать 24.05. 2011 г. | | Формат 60 x 84 1/16 | Печать офсетная |
| И–85 | Объем 5 п.л. | Тир. 300 экз. | Заказ 199 |

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет.
Ред.-изд. отдел. Тел. (499) 183-97-95, e-mail rio@mgsu.ru.
Типография МГСУ. Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44
E-mail: info@mgsuprint.ru