Теория управления

# Оптимизация динамики систем при действии возмущений

С. А. Кабанов

Кабанов С.А.

# Оптимизация динамики систем при действии возмущений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.24
ББК 22.17
К 12

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 07-08-07002*

Кабанов С. А. **Оптимизация динамики систем при действии возмущений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 200 с. — ISBN 978-5-9221-0972-7.

В книге рассмотрены основные методы оценивания вектора состояния как линейных, так и нелинейных динамических систем в стохастической и минимаксной постановках. Представлены алгоритмы оценивания для непрерывных и дискретных систем. Изложено решение задачи оптимальной фильтрации с позиций теории информации. Особое внимание уделено вопросам управления стохастическими системами. При этом рассмотрено решение задачи совмещенного оптимального управления нелинейной системой по иерархии функционалов. Дается представление о самоорганизующемся оптимальном регуляторе с экстраполяцией А. А. Красовского.

Предназначено студентам, аспирантам и научным работникам.

Научное издание

*КАБАНОВ Сергей Александрович*

**ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Редактор *О.В. Максимова*
Оригинал-макет: *Ю.В. Владимирова*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 5.05.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0972-7

# ОГЛАВЛЕНИЕ

*«Никакое человеческое исследование*
*не может быть названо истинной*
*наукой, если оно не проходит через*
*математические доказательства»*
Леонардо да Винчи

## Предисловие

Под системой понимается совокупность взаимодействующих предметов любой природы [49]. Всякая система взаимодействует с окружающей средой. Величины, определяющие внешние воздействия на систему, называются входными сигналами. Величины, характеризующие действие системы на окружающую среду или другие системы, называются выходными сигналами.

Система, состояние которой изменяется в функции времени, называется динамической системой.

Определяется минимальное количество величин, характеризующих состояние системы в каждый момент времени и называемых переменными состояния системы. Вся совокупность переменных состояния называется вектором состояния. Множество всех возможных векторов состояния называется пространством состояния, множество всех возможных сигналов (входных или выходных) — пространством сигналов.

Математической моделью системы называется совокупность четырех элементов: пространства состояния, пространства входных сигналов, пространства выходных сигналов, математических соотношений, связывающих входной и выходной сигналы и вектор состояния системы.

Математическая модель системы называется детерминированной, если каждой реализации ее входного сигнала соответствует одна реализация ее выходного сигнала; и стохастической, если каждой реализации ее входного сигнала соответствует вполне определенное распределение ее выходного сигнала.

Движение некоторой динамической системы можно вычислить, если задана математическая модель системы и известны входные воздействия и начальные условия. Знание вектора состояния определяет изменение во времени исходной системы, а также используется при построении управления. Управление служит для осуществления целенаправленного движения системы. При нулевом или фиксированном управлении и отсутствии внешних возмущений система замкнута и ее свободное движение прогнозируется.

Самоорганизация — закономерный процесс в открытых динамических системах. Известный в физике твердого тела процесс самоорганизации вещества связан с переходом системы из одного устойчивого состояния в другое при достижении некоторым поступающим извне управляющим воздействием своего порогового значения. Другой пример самоорганизации — переход от ламинарного течения жидкости к турбулентному при превышении скорости ее движения некоторого критического значения, в результате чего происходит усложнение структуры течения.

Неуправляемая система выбирает вероятный вариант поведения с малым количеством информации, управляемая стремится максимально использовать информацию для повышения уровня своей организации и понижения энтропии. Управляемая система под влиянием внешних воздействий (получая энергию извне) увеличивает энтропию, что может привести к нежелательным вариантам ее поведения. Процесс обработки информации и выбора управления позволяет обеспечить организованное функционирование системы, что сопровождается потерей энергии и уменьшением энтропии, т. е. в системе происходит самоорганизация за счет поглощения поступающей извне отрицательной энтропии (характеризующей уровень организации системы). Изучением процесса самоорганизации в системах различной природы занимается синергетика.

Уже в глубокой древности использовались приспособления, в которых реализовались принцип обратной связи и принцип компенсации возмущений [38]. Современой теории управления предшествовала классическая инженерная теория автоматического и автоматизированного (с участием человека-оператора) регулирования. Ей свойственны структурные представления в виде соединений элементарных звеньев однонаправленного действия, использование логарифмических и обычных частотных характеристик, передаточных и переходных функций и др. Эта теория остается в ряде случаев единственно доступной для инженера и в современных условиях, что является непродуктивным.

В конце 50-х — начале 60-х годов появились известные работы Л. С. Понтрягина, Р. Беллмана, Р. Калмана, которые заложили основы современной теории автоматического управления [53].

Известно, что оптимальное управление, доставляющее минимум некоторому критерию, делает поведение системы однозначным, что минимизирует энтропию [11, 53]. В работе [38] утверждается, что «единственным средством предотвращения увеличения общей энтропии (нарастания хаоса) является оптимальное или рациональное управление, что подразумевает целенаправленные действия, проводимые в интересах большинства динамических объектов управления. В социально–экономической сфере такими «объектами»являются люди.» Здесь под общей энтропией понимается взвешенное объединение термодинамической и информационной энтропий.

В настоящее время разработана теория оптимального управления при ограничениях на управление и вектор состояния по классическим критериям качества (Лагранжа, Майера, Больца) и по функционалу А. А. Красовского [53]. Теория позволяет решать задачи управления для различных систем при наличии их математических моделей. Причем оптимальное управление с прогнозированием при минимизации критерия А. А. Красовского имеет наименьшие вычислительные трудности и может быть применено для сложных нелинейных многомерных объектов в реальном времени. Управление нелинейной стохастической системой с известной моделью формируется на основе принципа разделения [53] или с помощью решения соответствующей иерархической дифференциальной игры [13].

Приложение теории оптимального управления для технических систем уже давно стало привычным, и редкий инженер не знает ее основных положений. Несмотря на это, решение задач оптимального управления по плечу лишь специально подготовленному кругу пользователей, что ограничивает их внедрение.

Практически процесс оптимизации итерационен. После решения задачи оптимизации по первоначально выбранному критерию следует корректировка этого критерия для получения решения, удовлетворяющего многочисленным практическим условиям.

Оптимальное управление возможно только при оптимальной обработке информации. Поэтому теория оптимальной фильтрации является составной частью современной терии управления. В случае недостаточной априорной информации возникает задача идентификации — оптимального оценивания параметров модели.

В системном анализе основной задачей является определение значений неизвестных состояний или параметров системы по результатам измерений, связанных некоторыми функциональными зависимостями с искомыми состояниями и параметрами системы.

В случаях когда вектор состояния недоступен непосредственному измерению по техническим причинам, он вычисляется по измерениям выхода системы, что из-за ошибок измерений приводит к приближенному его значению, т. е. к оценке вектора состояния.

Если случайные ошибки измерений не учитываются, то оценки определяются методом наименьших квадратов. Если случайные ошибки измерений учитываются и известны их статистические характеристики, то можно получить оптимальные оценки методами стохастической фильтрации. Если информация о возмущениях и ошибках измерения известна лишь в форме ограничений, то оценки находятся с помощью методов минимаксной фильтрации. При наличии смешанной информации о случайных возмущениях имеет место минимаксно-стохастическая задача оценивания.

Задача линейной фильтрации, первоначально изученная Колмогоровым и Винером в специальном случае, позднее была всесторонне изучена Калманом и Бьюси.

При решении прикладных задач управления возникает проблема оптимизации стохастических систем. Здесь имеет место так называемая «априорная опасность», возникающая из-за отсутствия априорных данных о статистических характеристиках случайных факторов. Однако исследователь на основании накопленного опыта в проектировании и испытании аналогичных систем достаточно уверенно оценивает максимальные случайные возмущения, случайные ошибки, разбросы начальных условий, интервалы корреляции. В результате, пользуясь в соответствии с неравенством Чебышева правилом «$2\sigma$» или «$3\sigma$», можно задать первые два момента случайных величин и корреляционные функции случайных процессов, входящих в описание математической модели системы управления. Известный закон больших чисел обычно позволяет считать первичные случайные величины нормально распределенными. Эти соображения, конечно, не исключают необходимости исследования чувствительности и эффективности управления и фильтрации к вариациям априорных статистических характеристик.

Разработка математической модели исследуемой системы, действующих на нее случайных возмущений и ошибок измерений, приемлемых для исследования на ЭВМ и адекватных реальным системе, возмущениям и ошибкам — это сложная экспериментальная и теоретическая задача, решение которой в каждой прикладной ситуации предшествует оптимизации управления.

Управление стохастическими системами (совмещенный синтез оптимального управления) опирается на теорему разделения. Согласно этой теореме оптимальная система управления состоит из оптимального фильтра, формирующего оптимальные оценки вектора состояния системы, и оптимального регулятора, определяющего оптимальное управление при предположении, что вектор состояния известен точно. Этот результат, строго доказанный для линейных систем, вполне обоснованно при малых ошибках оценивания переносится на нелинейные системы (принцип разделения).

Стремление к адекватности модели реальному процессу ведет к ее усложнению и, следовательно, к увеличению затрат на разработку и сопровождение программного обеспечения управляемых систем и не гарантирует желаемого уровня качества. Для уменьшения этих трудностей целесообразно использовать развивающиеся в последние годы алгоритмы безмодельного управления, так называемые самоорганизующиеся оптимальные регуляторы с экстраполяцией (СОРЭ) А. А. Красовского [11, 12, 14, 25–27, 30]. При этом для управления объектом в отсутствие его математической модели естественно использовать всю имеющуюся о нем информацию: как текущую для выбора экстраполирующих полиномов, так и некоторый набор предыдущих измерений для сглаживающих полиномов. Таким образом, формирование управления с самоорганизацией опирается на три задачи оценивания: сглаживание, фильтрацию и прогнозирование и на задачу собственно оптимального управления по критерию А. А. Красовского. Для целей управления информационный полином записывается в виде системы линейных дифференциальных уравнений, аналогичной привычному представлению динамики системы в пространстве состояний. Здесь вместо вектора состояния используется вектор выходных параметров и их производных. Теперь уже для линейной системы строго справедлива теорема разделения. То есть приближенность теоремы разделения для исходной нелинейной (в общем случае) системы (при известном ее описании) переводится в приближенность полиномиальной аппроксимации (при неизвестной модели процесса).

СОРЭ могут применяться как в старших контурах управления, так и на исполнительном уровне, на котором отрабатываются задающие воздействия, поступающие со старшего уровня [38]. При этом появляется возможность как контролировать действия лиц, принимающих решение, так и готовить этих лиц на соответствующих компьютерных тренажерах.

Даже при современном уровне вычислительной техники разработать оптимальные алгоритмы управления объектом в реальном времени можно для довольно простых математических моделей. Для адаптации таких решений к реальному объекту можно использовать СОРЭ с введением в его целевую функцию отклонений выходов объекта от показателей оптимальной динамики математической модели. Это снижает требования к моделям и приближает теорию оптимального управления к практике.

Такие алгоритмы уже апробированы для ряда технических объектов, в том числе для летательных аппаратов, для ускорителя электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда, для управления мостовым краном при перемещении захвата на заданное расстояние, для оптимального демпфирования вертикальных колебаний кузова автомобиля, для оптимального объезда автомобилем запретных зон движения и др., а также для социально-экономических систем, гипотетически описываемых производственной функцией, моделями развития экономики В. В. Леонтьева, управления вузом, расчета стоимости опциона на покупку (продажу) акций.

Книга содержит 6 разделов.

В первом разделе рассматриваются вопросы управляемости и наблюдаемости линейных систем. Излагается метод наименьших квадратов.

Второй раздел посвящен стохастическим моделям динамики систем, стохастическому исчислению Ито, выводу уравнения Винера–Хопфа.

В третьем разделе содержится решение задач линейной оптимальной фильтрации. Приводятся алгоритмы максимального правдоподобия, оценки условного среднего, фильтра Калмана в дискретном и непрерывном вариантах, минимаксного фильтра с энергетическими и мгновенными ограничениями, а также приложение теории информации к проблемам фильтрации.

В четвертом разделе рассматривается линейная стохастическая теория управления. Приводятся алгоритмы модального управления, совмещенного синтеза управления по теореме разделения.

Пятый раздел посвящен вопросам нелинейной фильтрации.

В шестом разделе изложены материалы сведения задачи совмещенного синтеза оптимального управления к иерархической дифференциальной игре, а также представлен СОРЭ А. А. Красовского.

В приложениях А–Д содержатся решения различных задач управления системами, способствующие восприятию материалов книги.

Автор приносит искреннюю благодарность академику В. Г. Пешехонову и заслуженному деятелю науки РФ, д-ру техн. наук профессору М. Н. Красильщикову за сделанные ими ценные замечания и предложения, которые были учтены при доработке рукописи.

Глава 1

# НАБЛЮДЕНИЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Понятия управляемости и наблюдаемости являются основополагающими в современной теории систем. Этими свойствами должна обладать система для ее успешного управления и наблюдения.

## 1. Матричная импульсная переходная функция (фундаментальная матрица)

Рассмотрим однородную линейную систему, описываемую векторным уравнением

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \in [t_0, t_f],\ t \geqslant t_0 \tag{1.1}$$

при граничном условии $x(t_0) = \delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, т. е. $i$-я координата вектора $\delta_i$ равна 1.

Обозначая $x(t) = \phi_i(t, t_0)$, перепишем систему (1.1) в виде

$$\frac{d}{dt}\phi_i(t,t_0) = A(t)\phi_i(t,t_0), \quad \phi_i(t_0,t_0) = \delta_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Систему векторных уравнений (1.2) удобно записать в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\phi(t,t_0) = A(t)\phi(t,t_0), \quad \phi(t_0,t_0) = E, \tag{1.3}$$

где матрица $\phi(t,t_0)$ имеет размерность $n \times n$, $E = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — единичная матрица.

Так как параметр $t_0$ можно выбрать произвольно, то элементы матрицы $\phi(t,t_0)$ можно представить как функции двух переменных $t$ и $t_0$. Тогда матрица $\phi(t,t_0)$ называется фундаментальной матрицей системы (1.1) или матрицей импульсных переходных функций системы (1.1).

Если $x(t)$ — решение однородной системы (1.1) с условием $x(t_0) = b = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$, то

$$x(t) = \phi(t,t_0)\,b, \tag{1.4}$$

так как, во-первых, полагая в (1.4) $t = t_0$, найдем $x(t_0) = \phi(t_0,t_0)b = b$. Во-вторых, дифференцируя (1.4) по $t$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\phi(t,t_0)}{dt}b = A(t)\phi(t,t_0)b = A(t)x(t).$$

Так как $x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$, то $x(T) = \phi(T, t)x(t) = \phi(T, t)\phi(t, t_0)x(t_0) = \phi(T, t_0)x(t_0)$, т. е. $\phi(T, t_0) = \phi(T, t)\phi(t, t_0)$.

Если $x(t)$ — решение неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x(t) + a(t), \quad a^{\mathrm{T}}(t) = [a_1(t), \ldots, a_n(t)] \tag{1.5}$$

с условием $x(t_1) = b$, то

$$x(t) = \phi(t, t_0)b + \int\limits_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)a(\tau)\, d\tau. \tag{1.6}$$

В самом деле, полагая в (1.6) $t = t_0$, получим $x(t_0) = b$. Далее, дифференцируя (1.6) и учитывая (1.3), (1.6), получим

$$\frac{dx(t)}{dt} = \phi(t, t)a(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\phi(t, \tau)}{dt} a(\tau)\, d\tau + \frac{d\phi(t, t_0)}{dt} b =$$

$$= Ea(t) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t)\phi(t, \tau)a(\tau)\, d\tau + A(t)\phi(t, t_0)b =$$

$$= A(t)\left[\int\limits_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)a(\tau)\, d\tau + \phi(t, t_0)b\right] + a(t)A(t)x(t) + a(t).$$

Рассмотрим случай, когда граничные условия даны на правом конце: $x(t) = b$. Из (1.4) следует $\phi^{-1}(t, t_0)x(t) = x(t_0)$. Обозначим $\phi(t_0, t) = \phi^{-1}(t, t_0)$. Тогда $x(t_0) = \phi(t_0, t)x(t)$.

При $s \leqslant t_0 \leqslant t$ $x(s) = \phi(s, t_0)x(t_0) = \phi(s, t_0)\phi(t_0, t)x(t) = \phi(s, t)x(t)$, т. е. $\phi(s, t) = \phi(s, t_0)\phi(t_0, t)$. Кроме того, $\phi(s, t)\phi(t, t_0) = \phi(s, t_0)\phi(t_0, t)\phi(t, t_0) = \phi(s, t_0)\phi(t_0, t)\phi^{-1}(t_0, t) = \phi(s, t_0)$.

Из тождества $\phi(t_0, t)\phi(t, t_0) = E$ путем дифференцирования с учетом (1.3) получим

$$\frac{d}{dt}[\phi(t_0, t)\phi(t, t_0)] = 0, \quad \frac{d\phi(t_0, t)}{dt}\phi(t, t_0) + \phi(t_0, t)\frac{d\phi(t, t_0)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\phi(t_0, t)}{dt}\phi(t, t_0) + \phi(t_0, t)A(t)\phi(t, t_0) = 0.$$

Домножим последнее уравнение справа на $\phi(t_0, t)$:

$$\frac{d\phi(t_0, t)}{dt} = -\phi(t_0, t)A(t).$$

После транспонирования находим уравнение, называемое сопряженным к уравнению (1.3)

$$\frac{d\phi^{\mathrm{T}}(t_0, t)}{dt} = -A^{\mathrm{T}}(t)\phi^{\mathrm{T}}(t_0, t), \quad \phi(t, t) = E. \tag{1.7}$$

Полагая $\phi^{\mathrm{T}}(t_0,t)=\phi_c(t,t_0)$, матрица $\phi_c(t,t_0)$ соответствует уравнению сопряженной системы $\dot{x}_c=-A^{\mathrm{T}}x_c$. Для неоднородной системы (1.5) с условием $x(t)=b$ решение можно получить из (1.6), домножив его слева на $\phi(t_0,t)$:

$$x(t_0)=\phi(t_0,t)x(t)-\phi(t_0,t)\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)a(\tau)\,d\tau,$$

$$x(t_0)=\phi(t_0,t)x(t)-\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t_0,\tau)a(\tau)\,d\tau,$$

$$x(t_0)=\phi(t_0,t)x(t)+\int\limits_{t}^{t_0}\phi(t_0,\tau)a(\tau)\,d\tau.$$

По аналогии со случаем $x(t_0)=b$ находим

$$\frac{d}{dt_0}x(t_0)=\frac{d}{dt_0}\phi(t_0,t)x(t)+\phi(t_0,t_0)a(t_0)+\int\limits_{t}^{t_0}\frac{d\phi(t_0,t)}{dt_0}a(\tau)\,d\tau=$$

$$=A(t_0)\phi(t_0,t)x(t)+a(t_0)+\int\limits_{t}^{t_0}A(t_0)\phi(t_0,\tau)a(\tau)\,d\tau=$$

$$=A(t_0)\left[\phi(t_0,t)x(t)+\int\limits_{t}^{t_0}\phi(t_0,\tau)a(\tau)\,d\tau\right]+a(t_0)A(t_0)x(t_0)+a(t_0).$$

Полезно отметить, что на основании известного правила дифференцирования $\frac{d}{dt}L^{-1}=-L^{-1}\dot{L}L^{-1}$ выходит также

$$\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t_0,t)=-\phi^{-1}(t_0,t)\frac{d\phi(t_0,t)}{dt}\phi^{-1}(t_0,t)=$$
$$=\phi(t,t_0)\phi(t_0,t)A\phi(t,t_0)=A\phi(t,t_0),$$

что соответствует уравнению (1.3).

## 2. Управляемость

Рассмотрим линейную стационарную систему [44]

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{1.8}$$

$$u\in U, \tag{1.9}$$

где $A=\mathrm{const}$, $B=\mathrm{const}$, $U$ — выпуклое множество, $x$ — $n$-вектор состояния, $u$ — $m$-вектор управления.

Система (1.8) не управляема, если $B = 0$. Пусть $B \neq 0$. в силу линейности системы (1.8) в качестве начальной точки можно взять начало координат: $x(0) = 0$. Найдем множество $D$ (область достижимости) в евклидовом пространстве состояний $x \in R^n$, $(D \subset R^n)$, в каждую точку которого можно привести систему (1.8) с помощью управления (1.9) за фиксированное время $t_f \in (0, \infty)$.

Введем блочную матрицу $Q_у = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$, которая называется матрицей управляемости.

**Лемма 1.1.** *Если* $\operatorname{rank} Q_y = n$, *то множество* $D$ *— выпуклое тело в пространстве* $R^n$ $(\dim D = n)$.

*Доказательство.* Решение системы (1.8) через фундаментальную матрицу имеет вид:

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)Bu(\tau)\, d\tau. \tag{1.10}$$

При $B = 0$ имеем $x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$.

Представим решение в виде разложения в ряд Тейлора $(x_0 = x(t_0))$

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_0^{(i)}(t - t_0)^i}{i!} x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^i x}{i!}.$$

Тогда $\dot{x}_0 = Ax_0$, $\ddot{x}_0 = A\dot{x}_0 = A^2 x_0, \ldots$ и, следовательно,

$$x(t) = \left[ E + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i (t - t_0)^i}{i!} \right] x_0;$$

$E = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ — единичная матрица.

Известно, что функция $e^x$ в представлении рядом Тейлора имеет вид

$$e^x = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Введем по аналогии матричную экспоненциальную функцию

$$e^A t = E + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} \sum_{1=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i.$$

Тогда при $B = 0$ получаем $x = e^{A(t-t_0)} x_0$. Сравнивая это представление с записью решения через фундаментальную матрицу, находим $\phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$. С учетом этого общее решение системы (1.8) примет вид

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\ d\tau + e^{A(t-t_0)} x(t_0)\Big|_{\substack{x_0=0 \\ t_0=0}} = \int\limits_{0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu\ d\tau. \tag{1.11}$$

Так как $U$ — выпуклое множество и $u$ входит линейно в (1.11), то множество $D$ выпукло.

Рассмотрим теперь плоскость $\pi$ в пространстве $R^n$ наименьшей размерности $k$, содержащую выпуклое множество $D \subset \pi$. Так как $u \equiv 0 \in U$, то $x = 0 \in D$ и, следовательно, плоскость $\pi$ является подпространством $R^k \subset R^n$. Докажем, что $0 \in \mathrm{int} D$ (внутренняя в $D$, но $D \subset R^n$), т. е. $k = n$ и $\dim D = n$.

Предположим обратное, что точка 0 лежит на границе $D$. Через любую граничную точку выпуклого множества можно провести хотя бы одну опорную гиперплоскость, т. е. такую плоскость, что все множество $D$ расположено целиком в одном из двух полупространств, на которые эта плоскость делит пространство $R^n$.

Через $\eta \neq 0$ обозначим градиент этой гиперплоскости, расположенный в другом полупространстве.

Тогда для скалярного произведения можно записать

$$x_f^{\mathrm{T}} \eta \leqslant 0 \qquad \forall x \in D,$$

что в виде равенства имеет вид

$$\max_{x \in D} (x_f^{\mathrm{T}} \eta) = 0$$

или, используя (1.11),

$$\max_{x \in D} (x_f^{\mathrm{T}} \eta) = \max_{u \in U} \int\limits_0^{t_f} \eta^{\mathrm{T}} e^{A(t_f - t)} B u(t)\, dt = 0. \tag{1.12}$$

Равенство (1.12) возможно только в том случае, если

$$\eta^{\mathrm{T}} e^{A(t_f - t)} B \equiv 0 \qquad \forall t \in [0, t_f]. \tag{1.13}$$

Положим $t = t_f$, тогда $\eta^{\mathrm{T}} B = 0$. Так как левая часть тождества (1.13) является аналитической вектор-функцией, то, продифференцировав ее $i - 1$ раз, где $i = \overline{2, n}$, и подставив $t = t_f$, получим еще $n - 1$ равенств

$$\eta^{\mathrm{T}} A^j B = 0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Таким образом, имеем следующее матричное равенство:

$$\eta^{\mathrm{T}} Q_{\mathrm{y}} = 0. \tag{1.14}$$

Из равенства (1.14) следует, что $n$ строк матрицы управляемости линейно зависимы, т. е. ее ранг меньше $n$. Получено противоречие с условиями леммы. Следовательно, начало координат является внутренней точкой множества $D$. Лемма доказана.

Пусть $U = R^m$.

**Определение 1.1.** *Система* (1.8) называется *полностью управляемой*, если ее можно перевести из любого начального состояния $x_0$ в любое конечное $x_t$ с помощью управления $u \in U$ за конечное время.

Как уже отмечалось, в силу линейности системы (1.8) в качестве начальной точки можно взять начало координат. Тогда определение полной управляемости можно записать в другом виде.

**Определение 1.2.** Если областью достижимости системы (1.8) является все пространство $R^n$, то *система* называется *полностью управляемой* $(D = R^n)$.

Можно начало координат взять в качестве конечной точки. Введем понятие области управляемости $\widetilde{D} \subset R^n$, из каждой точки которой можно привести систему (1.8) в начало координат за конечное время.

**Определение 1.3.** Если область управляемости системы (1.8) совпадает со всем пространством состояний $R^n$, то *система* (1.8) называется *полностью управляемой* $(\widetilde{D} = R^n)$.

Вычисление ранга матрицы $Q_{\text{у}}$ дает критерий полной управляемости.

**Теорема 1.1.** *Для полной управляемости системы* (1.8) *необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} Q_y = n$.

*Доказательство. Необходимость.* Чтобы доказать необходимость некоторого условия $T$ для условия $S$, нужно доказать переход от $S$ к $T$.

Предположим обратное: $\operatorname{rank} Q_{\text{у}} = k < n$, т.е. $n$ строк матрицы управляемости линейно зависимы. Следовательно, существуют не все равные нулю вещественные числа $\eta_i$, $i = \overline{1, n}$, такие, что $\eta^{\text{T}} Q_{\text{у}} = 0$, где $\eta^{\text{T}} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ и $|\eta| \neq 0$. Этому матричному равенству соответствует $n \times m$ скалярных равенств или $n$ векторных:

$$\eta^{\text{T}} B = 0, \quad \eta^{\text{T}} AB = 0, \ldots, \quad \eta^{\text{T}} A^{n-1} B = 0. \tag{1.15}$$

По теореме Кэли–Гамильтона для квадратной матрицы $A$ справедливо характеристическое уравнение

$$S(\lambda) = \det[\lambda E - A] = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

а согласно следствию этой теоремы любая квадратная матрица удовлетворяет собственному характеристическому уравнению в матричном смысле

$$S(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E = 0.$$

Здесь $a_i$, $i = \overline{1, n}$, — коэффициенты характеристического полинома матрицы $A$.

Из последнего уравнения найдем $\eta^{\text{T}} S(A) B = 0$, откуда с учетом (1.15) следует

$$\eta^{\text{T}} A^n B = -\eta^{\text{T}} (a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E) B = 0.$$

Следовательно, $\eta^{\text{T}} A^i B = 0$, $i = \overline{0, n}$; $A^0 = E$.

Так как матричная экспонента $\exp(A(t - \tau))$ есть ряд

$$e^{A(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} A^i,$$

то получаем $\eta^{\mathrm{T}} e^{A(t-\tau)} B \equiv 0 \quad \forall t \leqslant \tau$ и

$$\eta^{\mathrm{T}} x(t) = \int_0^t \eta^{\mathrm{T}} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \equiv 0 \quad \forall u \in U. \qquad (1.16)$$

Геометрический смысл тождества (1.16) состоит в том, что все траектории системы (1.8) при $x(0) = 0$ находятся в гиперплоскости, проходящей через начало системы координат и имеющей градиент $\eta$. Следовательно, при сделанном предположении область достижимости $D$ не совпадает со всем пространством состояний $R^n$, что противоречит условию полной управляемости ($D = R^n$). Необходимость доказана.

*Достаточность*. Чтобы доказать достаточность условия $T$ для $S$, нужно доказать переход от $T$ к $S$.

Предположим, что $u \in U = |u_i(t)| \leqslant l,\ i = \overline{1,m}$. Тогда при $\operatorname{rank} Q = n$ по лемме 1.1 множество достижимости $D_l$ в момент $t_f$ есть выпуклое тело и начало координат является его внутренней точкой $0 \in \operatorname{int} D_l$.

Пусть теперь $l \to \infty$. Докажем тогда, что $D_\infty = R^n$. Возьмем любое $\widetilde{x} \in R^n$ и соединим эту точку с началом координат. Так как $0 \in \operatorname{int} D_l$, то найдется точка $x^l \in D_l$, лежащая на отрезке $(0, \widetilde{x})$, т. е. $x^l = \rho\widetilde{x}$, где $\rho \in (0,1)$. Поскольку $x^l \in D_l$, то существует управление $u^l \in U_l\{|u_i^l(t)| \leqslant l\}$, такое, что $x^l = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B u^l(\tau)\, d\tau$. Тогда $\widetilde{x} = \frac{1}{\rho} x^l = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B \left[\frac{1}{\rho} u^l(\tau)\right] d\tau$, т. е. существует $\widetilde{u} \frac{1}{\rho} u^l(\tau)$, что точка $\widetilde{x}$ достижима в момент $t_f$. Достаточность доказана.

При $n - \operatorname{rank} Q_y = k > 0$ система не вполне управляема. Здесь $k$ — степень неуправляемости [53].

**Замечание 1.1.** Поскольку полная управляемость определяется видом матриц $A$ и $B$, то принято говорить об управляемости или неуправляемости пары $(A, B)$.

Рассмотрим нестационарные системы вида (1.8), у которых хотя бы одна из матриц $A$ или $B$ не является постоянной. В связи с этим расширим понятие управляемости.

**Определение 1.4.** *Нестационарная система* (1.8) называется *вполне управляемой с момента* $t_0$, если существует момент $t$ и конечное управление $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, переводящее систему из произвольного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в заданное состояние $x(t) = x_t$.

Определим симметричную матрицу $W(t, t_0)$, называемую грамианом управляемости

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau) B(\tau) B^{\mathrm{T}}(\tau) \phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)\, d\tau, \qquad (1.17)$$

где $\phi(t,t_0)$ — переходная (фундаментальная) матрица системы (1.8). С помощью переходной матрицы решение системы (1.8) представляется в виде (1.6):

$$x(t)=\phi(t,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Очевидно, $W^{\mathrm{T}}(t,t_0)=W(t,t_0)\geqslant 0$.

**Теорема 1.2.** *Для того чтобы нестационарная система* (1.8) *была вполне управляемой с момента $t_0$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой момент $t$, для которого матрица $W(t,t_0)$ положительно определена, т. е.* $\det W(t,t_0)\neq 0$, *т. е.* $W(t,t_0)>0$.

**Теорема 1.3** (эквивалентна теореме 1.2). *Для того чтобы нестационарная система* (1.8) *была вполне управляема с момента $t_0$, необходимо и достаточно*, *чтобы уравнение*

$$x_t^{\mathrm{T}}\phi(t,\tau)B(\tau)=0,\quad \tau\in[t_0,t],$$

*имело единственное тривиальное решение $x_t\equiv 0$ для всех $\tau$.*

*Доказательство. Достаточность.* Пусть $\det W(t,t_0)\neq 0$. Сформируем управление

$$u(\tau)=B^{\mathrm{T}}(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)W^{-1}(t,t_0)[x_t-\phi(t,t_0)x_0].$$

Тогда из вида решения

$$x_t=\phi(t,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)W^{-1}(t,t_0)[x_t-\phi(t,t_0)x_0]\,d\tau=$$

$$=\phi(t,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)\,d\tau\,W^{-1}(t,t_0)[x_t-\phi(t,t_0)x_0]=$$

$$=\phi(t,t_0)x_0+W(t,t_0)W^{-1}(t,t_0)[x_t-\phi(t,t_0)x_0]=x_t$$

следует, что управление переводит систему из состояния $x_0$ в состояние $x_t$.

*Необходимость.* Предположим обратное. Пусть система вполне управляема, но $\det W(t,t_0)=0\ \ \forall t$. Тогда найдется такой вектор $x_t\neq 0$, что $x_t^{\mathrm{T}}W(t,t_0)x_t=0$. Раскрывая последнее равенство, получим

$$x_t^{\mathrm{T}}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)\,d\tau\,x_t=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}x_t^{\mathrm{T}}\phi(t,\tau)B(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)x_t\,d\tau=0$$

или $\nu^{\mathrm{T}}(\tau)=x_t^{\mathrm{T}}\phi(t,\tau)B(\tau)\equiv 0\ \ \forall\tau\in[t_0,t]$.

С другой стороны, поскольку система полностью управляема, существует управление $u(\tau)$, переводящее ее из состояния 0 в состояние $x_t \neq 0$:

$$x_t = \int\limits_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Но тогда

$$x_t^{\mathrm{T}} x_t = x_t^{\mathrm{T}} \int\limits_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau \int\limits_{t_0}^{t} \nu^{\mathrm{T}}(\tau)u(\tau)\,d\tau = 0,$$

так как $\nu(\tau) \equiv 0$, что противоречит первоначальному условию $x_t \neq 0$.

Определение матрицы управляемости $W(t,t_0)$ по формуле (10) трудоемко, так как требуется знание фундаментальной матрицы $\phi(t,\tau)$ и вычисление определенного интеграла.

Для нахождения этой матрицы из соответствующего дифференциального уравнения умножим выражение (10) слева на $\phi(t_0,t)$ и справа на $\phi^T(t_0,t)$

$$\phi(t_0,t)W(t,t_0)\phi^T(t_0,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \phi(t_0,t)\phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)[\phi(t_0,t)\phi(t,\tau)]^T\,d\tau,$$

или

$$\phi(t_0,t)W(t,t_0)\phi^T(t_0,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\phi^T(t_0,\tau)\,d\tau.$$

Дифференцированием последнего уравнения по $t$ найдем

$$\frac{d\phi(t_0,t)}{dt}W(t,t_0)\phi^T(t_0,t) + \phi(t_0,t)\frac{W(t,t_0)}{dt}\phi^T(t_0,t) + \\ + \phi(t_0,t)W(t,t_0)\frac{d\phi^T(t_0,t)}{dt}\phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\phi^T(t_0,t).$$

С учетом дифференциальных уравнений для $\phi(t_0,t)$ и $\phi^T(t_0,t)$ имеем

$$-\phi(t_0,t)A(t)W(t,t_0)\phi^T(t_0,t) + \phi(t_0,t)\frac{dW(t,t_0)}{dt}\phi^T(t_0,t) - \\ - \phi(t_0,t)W(t,t_0)\phi^T(t_0,t) = \phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\phi^T(t_0,t)$$

или, после сокращений,

$$\frac{dW(t,t_0)}{dt} = A(t)W(t,t_0) + W(t,t_0)A^T(t) + B(t)B^T(t).$$

Полученное уравнение является линейным матричным дифференциальным уравнением для определения матрицы управляемости $W(t,t_0)$.