

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ

$$(B[f]) (\lambda) \equiv -\lambda^2 f(\lambda) - \sum_{k=1}^n (0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21}^k \\ \alpha_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1}(l_k) \\ f_{k+1}'(l_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^k & 0 \\ \beta_{12}^k & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \delta_{11}^k & \gamma_{11}^k \\ \delta_{12}^k & \gamma_{12}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\nu_k, \alpha_k} [f_k \\ \frac{d}{dr} B_{\nu_k, \alpha_k} [f_k$$

$$- \begin{pmatrix} \delta_{12}^k & \gamma_{11}^k \\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} [f_{k+1} \\ \frac{d}{dr} B_{\nu_{k+1}, \alpha_{k+1}} [f_{k+1}$$

УДК 78.3 (077)
ББК 22.11Я73
Б 135

Рецензенты:

А. А. Фомин, доктор физ/мат наук, профессор;
Н. И. Нижников, кандидат физ/мат наук, доктор
педагогических наук, профессор.

Баврин, Иван Иванович.

Б 135 Операторы преобразования для краевых задач, интегральных представлений и восстановления зависимостей / И. И. Баврин, В. Л. Матросов, О. Э. Яремко.
– М.: Издательство «Прометей», 2016. – 358 с.

Предлагаемая монография развивает операторный метод для задач анализа, математической физики неоднородных сред и теории восстановления зависимостей. Операторный метод открывает возможность решения задачи для кусочно однородной среды сведением к соответствующей задаче для однородной среды. В итоге решение получается в форме удобной для изучения. Метод операторов преобразования позволяет в ряде случаев уточнить результаты, полученные методом интегральных преобразований или методами теории потенциалов. Решение, полученное с помощью операторов преобразования, имеет форму удобную для изучения асимптотических свойств. При этом существенно упрощается вычислительный алгоритм, определяется поведение решения вблизи границы.

Метод операторов преобразования раскрывает природу интегральных преобразований, приспособленных для решения задач кусочно-однородных сред. В свою очередь с помощью интегральных преобразований удалось эффективно построить основные операторы преобразования. Рассмотрен стохастический вариант задачи восстановления функциональных зависимостей. Аппаратом решения этой задачи является метод операторов преобразования. Также рассматривается проблема поиска корректных алгоритмов, распознающих данную выборку без ошибок.

ISBN 978-5-9907453-8-4

© Баврин И. И., Матросов В. Л.,
Яремко О. Э., 2016
© Издательство «Прометей», 2016

Оглавление

0.1 Введение	3
I Матричные интегральные преобразования со спектральным параметром в граничных условиях и в условиях сопряжения	8
1 Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n + 1)$-слойного пространства	9
1.1 Смешанная краевая задача для оператора Фурье в R_n . . .	9
1.2 Прямая и двойственная задачи Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n	14
1.3 Теоремы разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n	15
1.4 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n	20
2 Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n + 1)$-слойного полупространства	23
2.1 Прямая и двойственная задачи Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n^+	23
2.2 Теоремы разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n^+	28
2.3 Прямое F_{n+} и обратное F_{n+}^{-1} матричные интегральные преобразования Фурье на действительной полуоси с n точками сопряжения	36
2.4 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n^+	36

3	Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n + 1)$-слояного сегмента	39
3.1	Смешанная задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n	39
3.2	Прямая и двойственная задачи Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n	44
3.3	Теорема разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n	48
3.4	Прямое и обратное интегральные преобразования Фурье на отрезке с точками деления	50
3.5	Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n	50
4	Матричные интегральные преобразования Фурье - Бесселя на $(n + 1)$- слойной полярной оси	52
4.1	Смешанная краевая задача для оператора Фурье- Бесселя	52
4.2	Теорема разложения по собственным функциям оператора Фурье-Бесселя	59
4.3	Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье- Бесселя	61
4.4	Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье-Бесселя	62
II	Оператор Римана - Лиувилля	65
5	Оператор Римана - Лиувилля в классе функций, гармонических в областях со сферической симметрией, и его применения	66
5.1	Определение и свойства оператора Римана- Лиувилля . . .	66
5.2	Обобщенная формула Пуассона, ассоциированная с функцией $\omega(x) \in \Omega$	70
5.3	Класс функций, ассоциированных с функцией $\omega(x) \in \Omega$, и его структурное представление.	72
5.4	Проблема моментов на компактной поверхности.	76
6	Оператор Римана- Лиувилля для функций, гармонических в верхней полуплоскости	80
6.1	Оператор Римана- Лиувилля и его свойства	80

6.2	Обобщенная формула Пуассона, ассоциированная с функцией $\omega(x) \in \Omega$	83
6.3	Класс функций, ассоциированных с функцией $\omega(x) \in \Omega$, и его структурное представление.	85
6.4	Функциональные множители для преобразования Фурье- Стильтьеса, ассоциированные с функцией $\omega(x) \in \Omega$	90
7	Интегральные преобразования Фурье с неразделенными переменными на компактах из R^n	93
7.1	Постановка задачи	93
7.2	Прямое и обратное преобразования Фурье на S	95
8	Преобразования Фурье с неразделенными переменными на некомпактных поверхностях.	99
8.1	Постановка задачи	99
8.2	Прямое и обратное интегральные преобразования Фурье на S	101
III Краевые задачи и операторы преобразования		105
9	Неоднородные краевые задачи для функций, гармонических в кусочно-однородном полупространстве	106
9.1	Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n^+ . . .	106
9.2	Функции влияния в I_n^+	108
9.3	Краевые задачи для уравнения Лапласа в $R_{n,+}^2$	109
9.4	Краевые задачи и операторы преобразования в $R_{n,+}^2$	111
9.5	Уравнение Лапласа в $R_{n,+}^{m+1}$	114
9.6	Краевые задачи и операторы преобразования в $R_{n,+}^{m+1}$. . .	116
10	Неоднородные краевые задачи для функций, гармонических в кусочно-однородном пространстве	118
10.1	Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n . . .	118
10.2	Функции влияния в I_n	120
10.3	Уравнение Лапласа в R_n^2	121
10.4	Краевые задачи и операторы преобразования в R_n^2	123
10.5	Уравнение Лапласа в $R_{n,+}^{m+1}$	125

10.6	Краевые задачи и операторы преобразования в R_{n+}^{m+1}	126
11	Неоднородные краевые задачи для функций, гармонических в кусочно-однородной полосе	128
11.1	Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n	128
11.2	Уравнение Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$	130
11.3	Краевые задачи и операторы преобразования в $I_n \times (-\infty, \infty)$	133
11.4	Разложение операторов преобразования в ряд отражений и сдвигов.	135
11.5	Уравнение Лапласа в $I_n \times R^m$	136
11.6	Краевые задачи и операторы преобразования в $I_n \times R^m$	138
12	Неоднородные краевые задачи для m- гармонических функций в кусочно-однородном полупространстве	140
12.1	Итерированная задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье.	140
12.2	Уравнение Лапласа в R_{n+}^2	142
12.3	Краевые задачи и операторы преобразования для итерированного уравнения Лапласа	146
12.4	Итерированное уравнение Лапласа в $R_{n,+}^{q+1}$	148
12.5	Краевые задачи и операторы преобразования в $R_{n,+}^{q+1}$	150
13	Неоднородные краевые задачи для m- гармонических функций в кусочно-однородном пространстве	152
13.1	Задача Штурма- Лиувилля для итерированного оператора Фурье в I_n	152
13.2	Итерированное уравнение Лапласа в R_n^2	154
13.3	Краевые задачи и операторы преобразования в R_n^2	156
13.4	Итерированное уравнение Лапласа в R_n^{q+1}	158
13.5	Краевые задачи и операторы преобразования в R_n^{q+1}	160
14	Неоднородные краевые задачи для функций, m-гармонических в кусочно-однородной полосе	161
14.1	Задача Штурма- Лиувилля для итерированного оператора Фурье в I_n	161
14.2	Итерированное уравнение Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$	163

14.3	Краевые задачи и операторы преобразования в $I_n \times (-\infty, \infty)$. 166	
14.4	Разложение операторов преобразования в ряд отражений и сдвигов.	168
14.5	Итерированное уравнение Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$	169
14.6	Краевые задачи и операторы преобразования для итери- рованного уравнения Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$	171
15	Неоднородные краевые задачи для функций, кусочно- гармонических в шаре	173
15.1	Постановка краевых задач	173
15.2	Краевые задачи и соответствующие операторы преобразо- вания	177
16	Неоднородные краевые задачи для функций, кусочно- гармонических в сферически-однородном пространстве	179
16.1	Краевые задачи с сопряжениями на сферах	179
16.2	Краевые задачи и соответствующие операторы преобразо- вания	182
17	Неоднородные краевые задачи для функций кусочно-гармонических в сферическом слое	184
17.1	Краевые задачи с условиями сопряжения в сферическом слое	184
17.2	Задачи сопряжения и операторы преобразования	189
IV	Операторный метод в задачах анализа и мате- матической физики	191
18	Разложение оператора преобразования в произведение граничного оператора и оператора сглаживания	192
18.1	Операторы Γ_i , порождаемые граничными условиями, и их свойства.	192
18.2	Операторы сглаживания L_i	193
18.3	Применение операторов преобразования в теории интеграль- ных преобразований.	194

18.4	Операторы L и Γ для кусочно- однородного пространства.	195
19	Операторный метод для функций кусочно-аналитических в правой полуплоскости	198
19.1	Операторы Γ_i и их свойства.	198
19.2	Операторы сглаживания L_i	199
19.3	Формула Шварца для кусочно- однородного полупространства.	200
19.4	Формула Пуассона для кусочно- однородного полупространства.	200
20	Операторный метод для функций кусочно-аналитических в круге	202
20.1	Операторы Γ_i и их свойства	202
20.2	Операторы сглаживания L_i	203
20.3	Формула Шварца для функций кусочно-аналитических в круге.	204
21	Метод операторов преобразования в задачах математи- ческой физики однородных сред	205
21.1	Третья краевая задача со сдвигом для однородного полу- пространства.	205
21.2	Задача Дирихле для однородной полосы.	206
21.3	Условия периодичности для однородной полосы.	207
21.4	Теплопроводность в ограниченном стержне.	208
22	Метод операторов преобразования в задачах математиче- ской физики кусочно-однородных сред	210
22.1	Кусочно-однородное пространство	210
22.2	Задача Дирихле для кусочно-однородного полупространства.	212
22.3	Полупространство с неоднородными условиями сопряжения.	213
22.4	Операторы преобразования и векторные краевые задачи	215

23	Операторы преобразования в задаче о структуре электромагнитного поля в многослойной среде	223
24	Краевые задачи для функций, бигармонических в кусочно-однородном полупространстве	230
24.1	Краевые задачи для бигармонических функций в кусочно-однородном полупространстве с одной гиперплоскостью сопряжения.	230
24.2	Краевые задачи для бигармонических функций в однородном полупространстве.	232
24.3	Краевые задачи для бигармонических функций в кусочно-однородном полупространстве.	233
25	Операторный метод для функций кусочно-гармонических в шаре	237
25.1	Краевые задачи для гармонических функций в шаре. . . .	237
25.2	Краевые задачи для бигармонических функций в шаре. . .	241
26	Операторный метод для функций, обобщенно кусочно-плюригармонических в областях класса (T)	244
26.1	Постановка задачи	244
26.2	Формула Темлякова-Пуассона	246
27	Интегральные уравнения теории интерпретации результатов косвенных наблюдений	248
27.1	Ретроспективная задача для уравнения теплопроводности. .	248
27.2	Ретроспективная задача для итерированного уравнения теплопроводности.	252
27.3	Обобщения результатов для q -итерации дифференциального оператора второго порядка общего вида.	256
V	Корректные алгоритмы теории распознавания	259
28	Восстановление зависимостей в классе кусочно-полиномиальных функций	260
28.1	Постановка задачи.	260
28.2	Операторы преобразования в классе кусочно-полиномиальных функций.	261

28.3	Обобщенные сплайны.	264
28.4	Обобщенные сплайны для кусочно- однородной полуоси.	270
28.5	Операторы преобразования сплайнов.	276
28.6	Некорректные задачи измерения для кусочно- однородных сред.	277
29	Операторный метод решения некорректных задач кусочно- однородных сред	280
29.1	Ретроспективная задача о структуре температурного поля конечного кусочно-однородного стержня.	280
29.2	Восстановление производной кусочно- гладкой функции.	281
30	Корректные алгебры ограниченной емкости над множе- ством алгоритмов вычисления оценок	284
30.1	Ведение	284
30.2	Обозначения, определения	287
30.3	Постановка задачи	290
30.4	Вспомогательные построения	294
30.5	Основная теорема	299
31	О неполноте модели алгоритмов вычисления оценок	305
31.1	Предварительные определения	306
31.2	Основная теорема	310
31.3	Алгебра, порожденная выборкой $\tilde{S}^q$	313
31.4	Корректность $\mathcal{LA}$ над множеством эффективно отделимых задач	315
32	Нижние границы емкости L-мерных алгебр алгоритмов вычисления оценок	324
32.1	Максимальный индекс системы событий	325
32.2	Нижняя граница емкости алгебры алгоритмов в простран- стве M_0	328
32.3	Емкость алгебры алгоритмов в пространстве $R(n)$	330
32.4	Емкость L -ограниченного линейного замыкания модели $\mathcal{M}_1$	336
33	Оптимальные алгоритмы в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок	339

Часть I

Матричные интегральные преобразования со спектральным параметром в граничных условиях и в условиях сопряжения

Глава 1

Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n + 1)$ – слойного пространства

1.1 Смешанная краевая задача для оператора Фурье в R_n

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве

$$D^+ = (0, \infty) \times I_n, \quad I_n = \left\{ x : x \in \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}, l_j), \quad , \quad l_j < l_{j+1} \right\}$$

решения сепаратной матричной системы $(n + 1)$ уравнений параболического типа

$$\left(A_j^{-2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_j(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D^+, \quad j = \overline{1, n+1} \quad (1.1)$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & \cdots & a_{1r}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}^j & \cdots & a_{rr}^j \end{pmatrix} -$$

положительно определенная матрица [28],
по начальным условиям

$$U_j(t, x) |_{t=0} = g_j(x), \quad x \in I_n \quad (1.2)$$

по краевым условиям

$$U_1|_{x=-\infty} = 0, \quad U_{n+1}|_{x=\infty} = 0 \quad (1.3)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial x} + (\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k \frac{\partial}{\partial t}) \right] U_k = \\ & = \left[(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial x} + (\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k \frac{\partial}{\partial t}) \right] U_{k+1}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$x = l_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, 2},$$

здесь $U_j(t, x)$ - неизвестная вектор- функция, $g_j(x)$ - заданная вектор- функция, α_{mi}^k , β_{mi}^k , γ_{mi}^k , δ_{mi}^k - матрицы размера $r \times r$.

В образах Лапласа получаем задачу о конструкции ограниченного на множестве I_n решения сепаратной матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 U_j^*}{dx^2} - q_j^2 U_j^* = -\bar{g}_j(x), \quad (1.5)$$

$$q_j^2 = A_j^{-2} p, \quad \bar{g}_j(x) = A_j^{-2} g_j(x), \quad j = \overline{1, n+1}$$

по краевым условиям

$$U_{n+1}^*|_{x=\infty} = 0, \quad U_1^*|_{x=-\infty} = 0 \quad (1.6)$$

и условиям контакта в точках стыка

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k p) \frac{d}{dx} + (\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k p) \right] U_k^* = \\ & = \left[(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k p) \frac{d}{dx} + (\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k p) \right] U_{k+1}^* + \\ & + \left(\gamma_{m1}^k \frac{d}{dx} f_k(x) + \delta_{m1}^k f_k(x) \right) - \left(\gamma_{m2}^k \frac{d}{dx} f_{k+1}(x) + \delta_{m2}^k f_{k+1}(x) \right), \quad (1.7) \\ & x = l_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Примем обозначения

$$M_{ki} = \begin{pmatrix} \beta_{1i}^k + \delta_{1i}^k p & \alpha_{1i}^k + \gamma_{1i}^k p \\ \beta_{2i}^k + \delta_{2i}^k p & \alpha_{2i}^k + \gamma_{2i}^k p \end{pmatrix},$$

$$N_{ki} = \begin{pmatrix} \beta_{1i}^k & \alpha_{1i}^k \\ \beta_{2i}^k & \alpha_{2i}^k \end{pmatrix}, \quad T_{ki} = \begin{pmatrix} \delta_{1i}^k & \gamma_{1i}^k \\ \delta_{2i}^k & \gamma_{2i}^k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}; \quad i = \overline{1, 2}.$$

Матричнозначную функцию φ_1 определим равенством:

$$\varphi_1(x, p) = e^{A_1^{-1}(x-l_1)\sqrt{p}};$$

другие матричнозначные функции φ_k , $k = \overline{2, n+1}$ определяются последовательно по индукции с помощью условия:

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k p) \frac{d}{dx} + (\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k p) \right] \varphi_{k+1} = \\ & = \left[(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k p) \frac{d}{dx} + (\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k p) \right] \varphi_k, \quad x = l_k, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Считая известной матрицу φ_k , для матрицы φ_{k+1} получим выражение

$$\varphi_{k+1} = \left(chA_{k+1}^{-1}(x-l_k)\sqrt{p} \quad \frac{A_{k+1}shA_{k+1}^{-1}(x-l_k)\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right) M_{k2}^{-1} M_{k1} \begin{pmatrix} \varphi_k(l_k) \\ \varphi_k'(l_k) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, матричнозначная функция ψ_{n+1} определяется условием $\psi_{n+1}(x, p) = e^{-A_{n+1}^{-1}(x-l_k)\sqrt{p}}$, другие матричнозначные функции $\psi_n, \psi_{n-1}, \dots, \psi_1$ определяются последовательно по индукции с помощью условия:

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k p) \frac{d}{dx} + (\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k p) \right] \psi_k = \\ & = \left[(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k p) \frac{d}{dx} + (\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k p) \right] \psi_{k+1}, \\ & x = l_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Считая известной матрицу ψ_{k+1} , для матрицы ψ_k получим выражение

$$\psi_k = \left(chA_k^{-1}(x-l_k)\sqrt{p} \quad \frac{A_kshA_k^{-1}(x-l_k)\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right) M_{k1}^{-1} M_{k2} \begin{pmatrix} \psi_{k+1}(l_k) \\ \psi_{k+1}'(l_k) \end{pmatrix}.$$

Далее, матрицы Ω_k -размера $2r \times 2r$ определены соотношениями:

$$\Omega_k(\xi, \sqrt{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_k(\xi, \sqrt{p}) & \psi_k(\xi, \sqrt{p}) \\ \varphi_k'(\xi, \sqrt{p}) & \psi_k'(\xi, \sqrt{p}) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Лемма 1.1 *Определители $\det \Omega_k$, $k = \overline{1, n+1}$ не зависят от переменной x . Если матрицы N_{ki} , T_{ki} , $k = \overline{1, n}$; $i = \overline{1, 2}$ - положительно определенные, т.е.*

$$\omega^* N_{ki} \omega > 0, \quad \omega^* T_{ki} \omega > 0, \quad \omega \in R_*^n, \quad k = \overline{1, n}; \quad i = \overline{1, 2}$$

и, если $\det M_{ki} \equiv C_{ki} \neq 0$, то выполнено условие неограниченной разрешимости задачи:

$$\text{для } p = \sigma + i\tau \text{ с } \operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0, \operatorname{Im} p = \tau \in (-\infty, \infty),$$

$$\det \Omega_k \neq 0, \quad k = \overline{1, n+1}. \quad (1.10)$$

Лемма 1.2 *.Ограниченное на множестве I_n решение сепаратной системы (1.5)-(1.7) имеет вид*

$$\begin{aligned} & U_j^*(p, x) = \\ & = \sum_{m=0}^n \int_{l_m}^{l_{m+1}} H_{j,m+1}^*(p, x, \xi) \bar{f}_{m+1}(\xi) d\xi + \varphi_j(EO) \sum_{m=j}^{n+1} P_m - \psi_j(OE) \sum_{m=0}^{j-1} P_m, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$P_m = \Omega_m^{-1} M_{m1}^{-1}.$$

$$\cdot \left(\begin{pmatrix} \gamma_{11}^m f_m^/ (l_m) + \delta_{11}^m f_m (l_m) \\ \gamma_{21}^m f_m^/ (l_m) + \delta_{21}^m f_m (l_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{12}^m f_{m+1}^/ (l_m) + \delta_{12}^m f_{m+1} (l_m) \\ \gamma_{22}^m f_{m+1}^/ (l_m) + \delta_{22}^m f_{m+1} (l_m) \end{pmatrix} \right),$$

$$m, j = \overline{1, n}; \quad P_0 = 0, \quad P_{n+1} = 0,$$

здесь через $H_{j,s}^*$ обозначены образы матричнозначных функций влияния $H_{j,s}$:

$$\text{при } k < s$$

$$H_{k,s}^* = \varphi_k(x, p) (EO) \Omega_s^{-1}(\xi, p) \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}, \quad l_{k-1} < x < l_k, \quad l_{s-1} < \xi < l_s,$$

$$\text{при } k > s$$

$$H_{k,s}^* = -\psi_k(x, p) (OE) \Omega_s^{-1}(\xi, p) \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}, \quad l_{k-1} < x < l_k, \quad l_{s-1} < \xi < l_s,$$

при $k = s$

$$H_{k,k}^* = \begin{cases} \varphi_k(x, p) (EO) \Omega_k^{-1}(\xi, p) \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}, & l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ -\psi_k(x, p) (OE) \Omega_k^{-1}(\xi, p) \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}, & l_{k-1} < \xi < x < l_k. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении каждого из условий (1.5)- (1.7). Приступим к определению функций влияния $H_{j,s}^*$. Конструкция образов Лапласа функций влияния $H_{j,s}^*$ такова, что их особыми точками являются точки ветвления $p = 0$ и $p = \infty$.

В силу леммы Жордана и теоремы Коши [29] находим, что

$$H_{ks}(t, x, \xi) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \varphi_k(x, \lambda) (EO) \Omega_s^{-1}(\xi, \lambda) \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix} e^{-\lambda^2 t} \lambda d\lambda, \quad (1.12)$$

$$k, s = \overline{1, n+1}.$$

Возвращаясь в формулах (1.11) к оригиналам, получим решение задачи (1.1)-(1.4) в виде:

$$U_k(t, x) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty \left(\sum_{m=0}^n \int_{l_m}^{l_{m+1}} \varphi_k(x, \lambda) \varphi_{m+1}^*(\xi, \lambda) f_{m+1}(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \varphi_k(x, \lambda) (EO) \Omega_m^{-1}(l_m, \lambda) M_{m1}^{-1}(\lambda) \cdot \right. \quad (1.13)$$

$$\cdot \left(\left(\gamma_{11}^m f_m'(l_m) + \delta_{11}^m f_m(l_m) \right) - \left(\gamma_{12}^m f_{m+1}'(l_m) + \delta_{12}^m f_{m+1}(l_m) \right) \right) \left(\left(\gamma_{21}^m f_m'(l_m) + \delta_{21}^m f_m(l_m) \right) - \left(\gamma_{22}^m f_{m+1}'(l_m) + \delta_{22}^m f_{m+1}(l_m) \right) \right) \right) e^{-\lambda^2 t} \lambda d\lambda,$$

где

$$\varphi_m^*(\xi, \lambda) = (EO) \Omega_m^{-1}(\xi, \lambda) \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix} A_m^{-2}, \quad m = \overline{1, n+1}.$$

1.2 Прямая и двойственная задачи Штурма-Лиувилля для оператора Фурье в I_n

Рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dx^2} + A_m^{-2} \lambda^2 \right) y_m(x, \lambda) = 0, \quad m = \overline{1, n+1}, \\ & \left[(\alpha_{m1}^k - \lambda^2 \gamma_{m1}^k) \frac{d}{dx} + (\beta_{m1}^k - \lambda^2 \delta_{m1}^k) \right] y_k = \\ & = \left[(\alpha_{m2}^k - \lambda^2 \gamma_{m2}^k) \frac{d}{dx} + (\beta_{m2}^k - \lambda^2 \delta_{m2}^k) \right] y_{k+1}, \\ & x = l_k, \quad \|y_1\|_{|x=-\infty} < \infty, \quad \|y_{n+1}\|_{|x=\infty} < \infty, \\ & y_m(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_{1m}(x, \lambda) \\ \vdots \\ y_{rm}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \|y_m\| = \sqrt{y_{1m}^2 + \dots + y_{rm}^2}, \quad m = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пусть при некотором λ , рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=2}^{n+1} \theta(x - l_{k-1}) \theta(l_k - x) y_k(x, \lambda) + \theta(l_1 - x) y_1(x, \lambda)(x, \lambda).$$

В этом случае число λ называется собственным значением, а соответствующее решение $y(x, \lambda)$ - собственной вектор-функцией.

Теорема 1.1 . *Спектр задачи (1.14) непрерывен и заполняет всю ось $(-\infty, \infty)$. Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению λ соответствует ровно r линейно независимых собственных вектор-функций $y^j(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(x, \lambda) \\ \vdots \\ \varphi_{rj}(x, \lambda) \end{pmatrix}, j = \overline{1, r}$.*

Рассмотрим двойственную краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$y_m^*(\xi, \lambda) \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + A_m^{-2} \lambda^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, n+1},$$

$$\begin{aligned}
& \left(y_k^*, -\frac{d}{d\xi} y_k^* \right) \begin{pmatrix} \beta_{11}^k - \delta_{11}^k \lambda^2 & \alpha_{11}^k - \gamma_{11}^k \lambda^2 \\ \beta_{12}^k - \delta_{12}^k \lambda^2 & \alpha_{12}^k - \gamma_{12}^k \lambda^2 \end{pmatrix}^{-1} = \\
& = \left(y_{k+1}^*, -\frac{d}{d\xi} y_{k+1}^* \right) \begin{pmatrix} \beta_{21}^k - \delta_{21}^k \lambda^2 & \alpha_{21}^k - \gamma_{21}^k \lambda^2 \\ \beta_{22}^k - \delta_{22}^k \lambda^2 & \alpha_{22}^k - \gamma_{22}^k \lambda^2 \end{pmatrix}^{-1}, \xi = l_k, \\
& k = \overline{1, n+1}, \quad \|y_1^*\|_{|\xi=-\infty} < \infty, \quad \|y_{n+1}^*\|_{|\xi=\infty} < \infty.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Решение рассматриваемой краевой задачи будем записывать в виде

$$\begin{aligned}
y^*(\xi, \lambda) &= \sum_{k=2}^{n+1} \theta(\xi - l_{k-1}) \theta(l_k - \xi) y_k^*(\xi, \lambda) + \theta(l_1 - \xi) y_1^*(\xi, \lambda), \\
y_m^*(\xi, \lambda) &= (y_{m1}^*(\xi, \lambda) \quad \dots \quad y_{mr}^*(\xi, \lambda)), \\
\|y_m^*\| &= \sqrt{(y_{1m}^*)^2 + \dots + (y_{rm}^*)^2}, m = \overline{1, n+1}.
\end{aligned}$$

Теорема 1.2 . *Спектр задачи (1.15) непрерывен и заполняет всю ось $(-\infty, \infty)$. Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению λ соответствует ровно r линейно независимых собственных строк- функций*

$$y^{*j}(\xi, \lambda) = (\varphi_{j1}^*(\xi, \lambda) \quad \dots \quad \varphi_{jr}^*(\xi, \lambda)), j = \overline{1, r}.$$

1.3 Теоремы разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n

В силу начальных условий из (1.13) получаем интегральное представление:

$$\begin{aligned}
f_j(x) &= -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x, \lambda) \left(\sum_{k=0}^n \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_{k+1}^*(\xi, \lambda) f_{k+1}(\xi) d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n (E \quad 0) \Omega_{k1}^{-1}(l_k, \lambda) M_{k1}^{-1}(\lambda) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\begin{pmatrix} \gamma_{11}^k f_k'(l_k) + \delta_{11}^k f_k(l_k) \\ \gamma_{21}^k f_k'(l_k) + \delta_{21}^k f_k(l_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{12}^k f_{k+1}'(l_k) + \delta_{12}^k f_{k+1}(l_k) \\ \gamma_{22}^k f_{k+1}'(l_k) + \delta_{22}^k f_{k+1}(l_k) \end{pmatrix} \right) \right) \lambda d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$j = \overline{1, n+1}.$$

Интегральное представление (1.16) приводит к интегральному представлению меры Дирака [65]

$$\delta(x - \xi) E = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \varphi(x, \lambda) \left(\varphi^*(\xi, \lambda) + \sum_{k=1}^n (EO) \Omega_{k1}^{-1}(l_k, \lambda) M_{k1}^{-1}(\lambda) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \left(\begin{array}{cc} \gamma_{21}^k & \delta_{21}^k \\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \delta_+(\xi - l_k) \\ \delta'_+(\xi - l_k) \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \gamma_{11}^k & \delta_{11}^k \\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \delta_-(\xi - l_k) \\ \delta'_-(\xi - l_k) \end{array} \right) \right\} \right) \lambda d\lambda, \quad (1.17)$$

где

$$\varphi^*(\xi, \lambda) = \sum_{k=2}^{n+1} \theta(\xi - l_{k-1}) \theta(l_k - \xi) \varphi_k^*(\xi, \lambda) + \theta(l_1 - \xi) \varphi_1^*(\xi, \lambda).$$

Справедливы утверждения.

Теорема 1.3 . Если вектор- функция $f(x)$ определена, кусочно- непрерывна, абсолютно суммируема и имеет ограниченную вариацию на I_n , то для каждого $x \in I_n$ справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)] = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \varphi(x, \lambda) \hat{f}(\lambda) d\lambda, \quad (1.18)$$

где

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n (EO) \Omega_{k1}^{-1}(l_k, \lambda) M_{k1}^{-1}(\lambda) \cdot \\ \cdot \left(\left(\left(\begin{array}{c} \gamma_{11}^k f'_k(l_k) + \delta_{11}^k f_k(l_k) \\ \gamma_{21}^k f'_k(l_k) + \delta_{21}^k f_k(l_k) \end{array} \right) \right) - \left(\begin{array}{c} \gamma_{12}^k f'_{k+1}(l_k) + \delta_{12}^k f_{k+1}(l_k) \\ \gamma_{22}^k f'_{k+1}(l_k) + \delta_{22}^k f_{k+1}(l_k) \end{array} \right) \right) \right).$$

Теорема разложения в терминах спектральной функции формулируется следующим образом.

Теорема 1.4 .Если вектор-функция $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ определена, кусочно- непрерывна, абсолютно суммируемая и имеет ограниченную вариацию на $(-\infty, \infty)$, то для $x \in (-\infty, \infty)$ справедливо интегральное представление:

$$\frac{1}{2} [\hat{f}(\lambda - 0) + \hat{f}(\lambda + 0)] = -\frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x, \lambda) f(x) dx + \sum_{k=1}^n (EO) \Omega_{k1}^{-1}(l_k, \lambda) \cdot \right. \\ \left. \cdot M_{k1}^{-1}(\lambda) \cdot \left(\left(\left(\gamma_{11}^k f'_k(l_k) + \delta_{11}^k f_k(l_k) \right) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\left(\gamma_{12}^k f'_k(l_k) + \delta_{21}^k f_k(l_k) \right) \right) \right) \right) - \\ \left. - \left(\left(\gamma_{12}^k f'_{k+1}(l_k) + \delta_{12}^k f_{k+1}(l_k) \right) \right) \right) \right) d\lambda,$$

где

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \beta) \hat{f}(\beta) \beta d\beta.$$

Доказательство. Введем пару матричнозначных решений задачи Штурма-Лиувилля (1.14):

$$(c, s) = \sum_{m=2}^{n+1} \theta(x - l_m) \theta(l_{m+1} - x) (c_m, s_m) + \theta(l_1 - x) (c_1, s_1),$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\begin{pmatrix} c_1(l_1) & s_1(l_1) \\ c'_1(l_1) & s'_1(l_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E \\ i\lambda E & -i\lambda E \end{pmatrix}.$$

Матрицы $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ определим из условий:

$$c_1 + m_1(\lambda) s_1 = \varphi_1; \quad c_{n+1} + m_2(\lambda) s_{n+1} = \psi_{n+1}.$$

Выберем два числа $N_1 > l_n$ и $N_2 < l_1$ ($N_2 < 0$). Изучим выражение

$$\int_{N_2}^{l_1} \varphi_1^*(x, \lambda) \varphi_1(x, \beta) dx + \sum_{m=1}^{n-1} \int_{l_m}^{l_{m+1}} \varphi_{m+1}^*(x, \lambda) \varphi_{m+1}(x, \beta) dx +$$

$$+ \int_{l_n}^{N_1} \varphi_{n+1}^*(x, \lambda) \varphi_{n+1}(x, \beta) dx.$$

Непосредственным вычислением правой части с использованием свойств матричнозначных функций φ_k и φ_k^* найдем:

$$\varphi_k^*(x, \lambda) \varphi_k(x, \beta) = \frac{1}{\lambda^2 - \beta^2} \frac{d}{dx} \left[\varphi_k^*(x, \lambda) \cdot \frac{d\varphi_k(x, \beta)}{dx} - \frac{d\varphi_k^*(x, \lambda)}{dx} \varphi_k(x, \beta) \right];$$

тогда выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \int_{N_2}^{N_1} \varphi^*(x, \lambda) \varphi(x, \beta) dx = \\ & = -\frac{1}{\lambda^2 - \beta^2} \left[\varphi_1^*(N_2, \lambda) \frac{d\varphi_1(N_2, \beta)}{dx} - \frac{d\varphi_1^*(N_2, \lambda)}{dx} \varphi_1(N_2, \beta) \right] + \\ & + \frac{1}{\lambda^2 - \beta^2} \left[\varphi_{n+1}^*(N_1, \lambda) \frac{d\varphi_{n+1}(N_1, \beta)}{dx} - \frac{d\varphi_{n+1}^*(N_1, \lambda)}{dx} \varphi_{n+1}(N_1, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Все остальные слагаемые исчезли вследствие условий сопряжения из (1.14). Изучим оба слагаемых в формуле (1.20).

Непосредственным вычислением для первого слагаемого в формуле (1.20) найдем

$$\begin{aligned} & \varphi_1^*(N_2, \lambda) \frac{d\varphi_1(N_2, \beta)}{dx} - \frac{d\varphi_1^*(N_2, \lambda)}{dx} \varphi_1(N_2, \beta) = \\ & = (E \quad 0) \Omega_1^{-1}(\lambda) \begin{pmatrix} \varphi_1(N_2, \beta) \\ \varphi_1'(N_2, \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Функции c, s определены таким образом, что

$$\begin{aligned} & \varphi_1^* \frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{d\varphi_1^*}{dx} \varphi_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\lambda) & m_2(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \hat{\Omega}_1^{-1}(x, \lambda) \cdot \\ & \cdot \hat{\Omega}_1(x, \beta) \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\beta) & m_2(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\hat{\Omega}_j = \begin{pmatrix} c_j & s_j \\ c_j & s_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Заметим, что условие (1.10) позволяет утверждать, что

$$\det \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\lambda) & m_2(\lambda) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \lambda \in (-\infty, \infty).$$

Непосредственным вычислением установим тождество:

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega}_1^{-1}(N_2, \lambda) \hat{\Omega}_1(N_2, \beta) = \\ & = -\frac{A_1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -iA_1^{-1}(\lambda - \beta) e^{-iA_1^{-1}(\lambda+\beta)N_2} \\ -iA_1^{-1}(\lambda - \beta) e^{iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2} & 0 \end{pmatrix} - \\ & -\frac{A_1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} -iA_1^{-1}(\lambda + \beta) e^{-iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2} & 0 \\ 0 & -iA_1^{-1}(\lambda + \beta) e^{iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

На основании леммы Римана [60], слагаемое в формуле (1.20) соответствующее первому слагаемому в формуле (1.22) имеет пределом при $N_2 \rightarrow \infty$ число нуль. Изучим слагаемое в формуле (1.20) отвечающее второму слагаемому в (1.22). Прежде преобразуем это слагаемое:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{e^{-iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2}}{\lambda-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{e^{iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2}}{\lambda-\beta} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\cos A_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2 - E}{\lambda-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\cos A_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2 - E}{\lambda-\beta} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \frac{-i \sin A_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2}{\lambda-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{i \sin A_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2}{\lambda-\beta} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}}{(\lambda - \beta)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Совершенно аналогично разложим второе слагаемое в формуле (1.20) на три слагаемых. В итоге правая часть формулы (1.20) представлена как сумма шести слагаемых.

Так как функция $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая на $(-\infty, \infty)$, то леммы Римана и Дирихле [60] позволяет сделать вывод о том, что вклад первого и четвертого слагаемых равен нулю.

Далее вклад в величину предела второго и пятого слагаемых в формуле (1.20) равен $\hat{f}(\beta)$, $\beta \in (-\infty, \infty)$. Для того, чтобы подсчитать величину вклада в предел третьего и шестого слагаемых, воспользуемся равенством [29]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_c^d \frac{1 - \cos \frac{A^{-1}(\lambda - \beta)N}{\lambda - \beta}}{\lambda - \beta} \hat{f}(\lambda) d\lambda = v.p. \int_c^d \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda - \beta} d\lambda \equiv T_{\hat{f}}(\beta), \quad \beta \in [c, d].$$

Заключаем, что общий вклад указанных слагаемых в величину предела в (1.20) равен:

$$-\frac{1}{2}T_{\hat{f}}(\beta) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\beta) & m_2(\beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\beta) & m_2(\beta) \end{pmatrix} T_{\hat{f}}(\beta) = 0.$$

Теорема доказана.

1.4 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n

Интегральное представление меры Дирака (1.17) порождает прямое F_n и обратное F_n^{-1} преобразования типа Фурье на декартовой оси с n - точками деления по правилам:

$$F_n[f](\lambda) \equiv \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \sum_{m=1}^n (EO) \Omega_m^{-1}(l_m, \lambda) M_{m1}^{-1}(\lambda) \cdot \left(\begin{pmatrix} \gamma_{11}^m f'_m(l_m) + \delta_{11}^m f_m(l_m) \\ \gamma_{21}^m f'_m(l_m) + \delta_{21}^m f_m(l_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{12}^m f'_{m+1}(l_k) + \delta_{12}^m f_{m+1}(l_k) \\ \gamma_{22}^m f'_{m+1}(l_k) + \delta_{22}^m f_{m+1}(l_k) \end{pmatrix} \right), \quad (1.24)$$

$$F_n^{-1}[\hat{f}](x) \equiv f(x) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \varphi(x, \lambda) \hat{f}(\lambda) d\lambda. \quad (1.25)$$

Приведем основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$B = \sum_{k=1}^n A_k^2 \theta(x - l_{k-1}) \theta(l_k - x) \frac{d^2}{dx^2} + \theta(x - l_n) A_{n+1}^2 \frac{d^2}{dx^2},$$

где

$$\theta(x - l_0) \equiv 1.$$

Теорема 1.5 .Для трижды непрерывно- дифференцируемой на множестве I_n вектор- функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \theta(x - l_{k-1}) \theta(l_k - x) f_k(x) + \theta(x - l_n) f_{n+1}(x),$$

удовлетворяющей условиям на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\varphi_1^* \frac{d}{dx} f_1(x) - \frac{d}{dx} \varphi_1^* f_1(x) \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\varphi_{n+1}^* \frac{d}{dx} f_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} \varphi_{n+1}^* f_{n+1}(x) \right) = 0,$$

справедливо тождество:

$$F_n[B(f)] = -\lambda^2 \hat{f}(\lambda) - (E0) \sum_{m=1}^n \Omega_m^{-1}(l_m, \lambda) M_{m1}^{-1}(\lambda) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[\begin{pmatrix} \beta_{21}^m & \alpha_{21}^m \\ \beta_{22}^m & \alpha_{22}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m+1}(l_m) \\ f_{m+1}'(l_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{21}^m & \delta_{21}^m \\ \gamma_{22}^m & \delta_{22}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{m+1}^2 f_{m+1}^{//}(l_m) \\ A_{m+1}^2 f_{m+1}^{///}(l_m) \end{pmatrix} \right] - \right. \\ \left. - \left[\begin{pmatrix} \beta_{11}^m & \alpha_{11}^m \\ \beta_{12}^m & \alpha_{12}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_m(l_m) \\ f_m'(l_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11}^m & \delta_{11}^m \\ \gamma_{12}^m & \delta_{12}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m^2 f_m^{//}(l_m) \\ A_m^2 f_m^{///}(l_m) \end{pmatrix} \right] \right\}. \quad (1.26)$$

здесь

$$B(f) = \sum_{k=2}^n \theta(x - l_{k-1}) \theta(l_k - x) A_k^2 \frac{d^2}{dx^2} f_k + \\ + \theta(l_1 - x) A_1^2 \frac{d^2}{dx^2} f_1 + \theta(x - l_n) A_{n+1}^2 \frac{d^2}{dx^2} f_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\left(A_j^{-2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_j(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D^+, \quad j = \overline{1, n+1}$$

$$u_j(t, x)|_{t=0} = B_j(f_j)(x), \quad x \in I_n$$

$$u_1|_{x=-\infty} = 0, \quad u_{n+1}|_{x=\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] u_k = \\ & = \left[\left(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] u_{k+1}. \end{aligned}$$

Предположим для простоты, что вектор- функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \theta(x - l_{k-1}) \theta(l_k - x) f_k(x) + \theta(x - l_n) f_{n+1}(x),$$

удовлетворяет условиям сопряжения вида

$$\begin{aligned} & \left[\left(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{d}{dx} + \left(\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] f_k = \\ & = \left[\left(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{d}{dx} + \left(\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] f_{k+1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что вектор-функция $B(u)$ служит решением задачи Коши с начальными условиями

$$B(u)|_{t=0} = B(f),$$

из интегрального тождества (1.16) имеем:

$$B(u) = F_n^{-1} \left(e^{-\lambda^2 t} F_n(B(f)) \right). \quad (1.27)$$

С другой стороны, в виду интегрального тождества (1.16), дифференцированием последнего по t получим равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = F_n^{-1} \left(e^{-\lambda^2 t} (-\lambda^2) F_n(f) \right).$$

Замечая, что $\frac{\partial}{\partial t}(u) = B(u)$ найдем

$$B(u) = F_n^{-1} \left(e^{-\lambda^2 t} (-\lambda^2) F_n(f) \right).$$

Сравнивая правые части обоих полученных равенств, в виду однозначности преобразования Фурье F_n , заключаем, что доказываемое тождество справедливо.