ŒUVRES

DE

BLAISE PASCAL.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET

ŒUVRES

DE

BLAISE PASCAL.

NOUVELLE ÉDITION.

TOME CINQUIÈME.

A PARIS,

CHEZ LEFÈVRE, LIBRAIRE,

RUE DE L'ÉPERON, N° 6.

1819.

OUVRAGES
DE MATHÉMATIQUE
DE PASCAL.

TRAITÉ
DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

DÉFINITIONS.

J'APPELLE *Triangle arithmétique*, une figure dont la construction est telle.

Je mène d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires, l'une à l'autre, GV, G ζ, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales et continues à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, etc.; et ces nombres sont *les exposants* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la première division qui sont dans chacune des deux lignes, par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base.*

Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est *la base.*

Et joignant ainsi tous les points de division qui ont un même exposant, j'en forme autant *de triangles et de bases.*

Je mène par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés, que j'appelle *cellules.*

Et les cellules qui sont entre deux parallèles qui vont de gauche à droite, s'appellent *cellules d'un même rang parallèle,* comme les cellules G, σ, π, etc., ou φ, ψ, θ, etc.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire,* comme les cellules G, φ, A, D, etc., et celles-ci, σ, ψ, B, etc.

Et celles qu'une même base traverse diagonalement, sont dites *cellules d'une même base,* comme celles qui suivent, D, B, θ, λ, et celles-ci, A, ψ, π.

Les cellules d'une même base également distantes de ses extrémités, sont dites *réciproques*, comme celles-ci, E, R et B, θ; parce que l'exposant du rang parallèle de l'une est le même que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroît en cet exemple, où E est dans le second rang perpendiculaire, et dans le quatrième parallèle; et sa réciproque R est dans le second rang parallèle, et dans le quatrième perpendiculaire réciproquement; et il est bien facile de démontrer que celles qui ont leurs exposants réciproquement pareils, sont dans une même base, et également distantes de ses extrémités.

Il est aussi bien facile de démonter que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, joint à l'exposant de son rang parallèle, surpasse de l'unité l'exposant de sa base. Par exemple, la cellule F est dans le troisième rang perpendiculaire, et dans le quatrième parallèle, et dans la sixième base, et les deux exposants des rangs 3 + 4 surpassent de l'unité l'exposant de la base 6, ce qui vient de ce que les deux côtés du triangle sont divisés en un pareil nombre de parties; mais cela est plutôt compris que démontré.

Cette remarque est de même nature, que chaque base contient une cellule plus que la précédente, et chacune autant que son exposant d'unités; ainsi la seconde $\varphi\,\sigma$ a deux cellules, la troisième A ✠ π en a trois, etc.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouvent par cette méthode.

Le nombre de la première cellule qui est à l'angle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres sont forcés; et pour cette raison il s'appelle *le générateur* du triangle; et chacun des autres est spécifié par cette seule règle :

Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle. Ainsi la cellule F, c'est-à-dire, le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; et ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs conséquences. En voici les principales, où je considère les triangles, dont le générateur est l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

CONSÉQUENCE PREMIÈRE.

En tout triangle arithmétique, toutes les cellules du premier rang parallèle et du premier rang perpendiculaire sont pareilles à la génératrice.

Car par la construction du triangle, chaque cellule est égale à celle qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la précède dans son rang parallèle; or les cellules du premier rang parallèle n'ont aucunes cellules qui les précèdent dans leurs rangs perpendiculaires, ni celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs parallèles; donc elles sont toutes égales entre elles, et partant au premier nombre générateur.

Ainsi φ égale G + zéro, c'est-à-dire, φ égale G.
Ainsi A égale φ + zéro, c'est-à-dire, φ.
Ainsi σ égale G + zéro, et π égale σ + zéro.
Et ainsi des autres.

CONSÉQUENCE II.

En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement.

Soit une cellule quelconque ω : je dis qu'elle est égale à R + θ + ψ + φ, qui sont celles du rang parallèle supérieur depuis le rang perpendiculaire de ω jusqu'au premier rang perpendiculaire.

Cela est évident par la seule interprétation des cellules, par celles d'où elles sont formées.

Car ω égale R + $\underline{\text{C}}$.

$\theta + \underline{\text{B}}$

$\psi + \underline{\text{A}}$

φ Car A et φ sont égaux entre eux par la précédente.

Donc ω égale R + θ + ψ + φ.

CONSÉQUENCE III.

En tout triangle arithmétique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précédent, comprise depuis son rang parallèle jusqu'au premier inclusivement.

Soit une cellule quelconque C : je dis qu'elle est égale à B + ψ + σ, qui sont celles du rang perpendiculaire précédent, depuis le rang parallèle de la cellule C jusqu'au premier rang parallèle.

Cela paroît de même par la seule interprétation des cellules.

Car C égale B + $\underline{\theta}$.

$\psi + \underline{\pi}$

σ Car π égale σ par la première.

Donc C égale B + ψ + σ.

CONSÉQUENCE IV.

En tout triangle arithmétique, chaque cellule diminuée de l'unité, est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallèle et son rang perpendiculaire exclusivement.

Soit une cellule quelconque ξ : je dis que ξ — G égale $R + \theta + \psi + \varphi + \lambda + \pi + \sigma + G$, qui sont tous les nombres compris entre le rang $\xi\ \omega$ CBA et le rang ξ S μ exclusivement.

Cela paroît de même par l'interprétation.

Car ξ égale $\lambda + R + \underline{\omega}$.

$$\begin{array}{llll} \overline{\pi} + \theta + \underline{C} & & & \\ & \overline{\sigma} + \psi + \underline{B} & & \\ & & \overline{G} + \varphi + \underline{A} & \\ & & & \overline{G} \end{array}$$

Donc ξ égale $\lambda + R + \pi + \theta + \sigma + \psi + G + \varphi + G$.

AVERTISSEMENT.

J'ai dit dans l'énonciation, *chaque cellule diminuée de l'unité*, parce que l'unité est le générateur; mais si c'étoit un autre nombre, il faudroit dire, *chaque cellule diminuée du nombre générateur.*

CONSÉQUENCE V.

En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à sa réciproque.

Car dans la seconde base $\varphi\sigma$, il est évident que les deux cellules réciproques φ, σ sont égales entre elles et à G.

Dans la troisième A, ψ, π, il est visible de même que les réciproques π, A sont égales entre elles et à G.

Dans la quatrième, il est visible que les extrêmes D, λ sont encore égales entre elles et à G.

Et celles d'entre deux, B, θ, sont visiblement égales, puisque B égale A + ψ, et θ égale $\psi + \pi$; or $\pi + \psi$ sont égales à A + ψ par ce qui est montré; donc, etc.

Ainsi l'on montrera dans toutes les autres bases que les réciproques sont égales, parce que les extrêmes sont toujours pareilles à G, et que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la base précédente qui sont réciproques entre elles.

CONSÉQUENCE VI.

En tout triangle arithmétique, un rang parallèle et un perpendiculaire qui ont un même exposant, sont composés de cellules toutes pareilles les unes aux autres.

Car ils sont composés de cellules réciproques.

Ainsi le second rang perpendiculaire $\sigma\,\psi$ BEMQ est entièrement pareil au second rang parallèle $\varphi\,\psi\,\theta$ RSN.

CONSÉQUENCE VII.

En tout triangle arithmétique, la somme des *cellules de chaque base est double de celles de la base précédente.*

Soit une base quelconque D B θ λ : je dis que la somme de ses cellules est double de la somme des cellules de la précédente A ψ π.

Car les extrêmes . . .	$\underline{D}$,	$\underline{\lambda}$,
égalent les extrêmes . . .	A,	π,
et chacune des autres . . .	B,	θ,
en égalent deux de		
l'autre base	$\overline{A+\psi}$,	$\overline{\psi+\pi}$.

Donc D + λ + B + θ égalent 2 A + 2 ψ + 2 π.

La même chose se démontre de même de toutes les autres.

CONSÉQUENCE VIII.

En tout triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression double, qui commence par l'unité, dont l'exposant est le même que celui de la base.

Car la première base est l'unité.

La seconde est double de la première, donc elle est 2.

La troisième est double de la seconde, donc elle est 4. Et ainsi à l'infini.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur n'étoit pas l'unité, mais un autre nombre, comme 3, la même chose seroit vraie; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'unité, savoir : 1, 2, 4, 8, 16, etc., mais ceux d'une autre progression double à commencer par le générateur 3, savoir, 3, 6, 12, 24, 48, etc.

CONSÉQUENCE IX.

En tout triangle arithmétique, chaque base diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes les précédentes.

Car c'est une propriété de la progression double.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur étoit autre que l'unité, il faudroit dire, *chaque base diminuée du générateur.*

CONSÉQUENCE X.

En tout triangle arithmétique, la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de sa base, à commencer par une extrémité, est égale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant, hormis une.

Soit prise la somme de tant de cellules qu'on voudra de la base Dλ, par exemple, les trois premières, D + B + θ : je dis qu'elle est égale à la somme des trois premières de la base précédente A + ψ + π, plus aux deux premières de la même base A + ψ.

Car	D.	B.	θ.
égale	A.	A + ψ.	$\psi + \pi$.

Donc D + B + θ égale 2 A + 2 ψ + π.

DÉFINITION.

J'appelle *cellules de la dividente*, celles que la ligne qui divise l'angle droit par la moitié, traverse diagonalement comme les cellules G, ψ, C, ρ, etc.

CONSÉQUENCE XI.

Chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire.

Soit une cellule de la dividente C : je dis qu'elle est double de θ, et aussi de B.

Car C égale θ + B, et θ égale B, par la cinquième conséquence.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces conséquences sont sur le sujet des égalités qui se rencontrent dans le triangle arithmétique. On va en voir maintenant les proportions, dont la proposition suivante est le fondement.

CONSÉQUENCE XII. √

En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure, comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.

Soient deux cellules contiguës quelconques d'une même base, E, C : je dis que :

E est à C comme 2 à 3

inférieure,	supérieure,	parce qu'il y a deux cellules depuis E jusqu'en bas; savoir, E, H,	parce qu'il y a trois cellules depuis C jusqu'en haut; savoir, C, R, μ.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le deuxième, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième D λ, c'est-à-dire, si D est à B comme 1 à 3, et B à θ comme 2 à 2, et θ à λ comme 3 à 1, etc.; je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, H μ, et que, par exemple, E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse.

Donc $\underline{D + B}$ est à B comme $\underline{1 + 3}$ à 3.

E à B comme 4 à 3.

De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse.
Donc B + θ à B, comme 2 + 2 à 2.

C à B, comme 4 à 2.

Mais B à E, comme 3 à 4, comme il est montré. Donc par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

Ce qu'il falloit démontrer.

On le montrera de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proportion se trouve dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa précédente, plus à sa supérieure; ce qui est vrai partout.

CONSÉQUENCE XIII.

En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang perpendiculaire, l'inférieure est à la supérieure, comme l'exposant de la base de cette supérieure à l'exposant de son rang parallèle.

Soient deux cellules quelconques dans un même rang perpendiculaire, F, C : je dis que

F	est à C	comme 5	à 3
l'inférieure,	la supérieure,	exposant de la base de C,	exposant du rang parallèle de C.

Car E est à C comme 2 à 3.

Donc E + C est à C comme 2 + 3 à 3.

F est à C comme 5 à 3.

CONSÉQUENCE XIV.

En tout triangle arithmétique, deux cellules