Боголюбов Н.Н.
Логунов А.А.
Оксак А.И.
Тодоров И.Т.

Общие принципы квантовой теории поля

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.1.01
ББК 22.31
Б74

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 04-01-14118д

Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. **Общие принципы квантовой теории поля** / Под общ. ред. А.Д. Суханова. — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 744 с. — ISBN 5-9221-0612-0.

Посвящена систематическому изложению результатов аксиоматического направления в квантовой теории поля. Часть I содержит необходимые сведения из функционального анализа и теории обобщенных функций, а также элементы теории функций нескольких комплексных переменных. Центральное место (части II–IV) занимают различные подходы в аксиоматической квантовой теории поля — алгебраический подход, формализмы Уайтмана и Лемана–Симанзика–Циммермана, S-матричный метод. Здесь изложены фундаментальные результаты квантовой теории поля — TCP-теорема, связь спина со статистикой, теорема Хаага, теорема Голдстоуна и др. Включены разделы, посвященные теориям с индефинитной метрикой. Общая теория проиллюстрирована на явно решаемых двумерных моделях. Часть V содержит применения развитого аппарата к аналитическим свойствам амплитуд рассеяния и к теории взаимодействия элементарных частиц при высоких энергиях. Многочисленные упражнения составляют неразрывную часть текста.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся по квантовой теории поля и математической физике.

ISBN 5-9221-0612-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2006
© Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, 2006

Предисловие

Большинство «запоминающихся» результатов релятивистской квантовой теории было получено в рамках локального квантовополевого подхода. Выяснение основных принципов локальной теории и ее математической структуры накладывает отпечаток на всю современную деятельность в этой области.

Первоначально аксиоматический подход возник из попытки придать математический смысл квантовополевой теории сильных взаимодействий (юкавского типа). Поля в такой теории реализуются операторами в гильбертовом пространстве с положительным пуанкаре-инвариантным скалярным произведением. Эта «классическая» часть аксиоматического подхода достигла своего современного вида еще в 60-х годах*).

Она сохранила свое значение и по сей день, несмотря на то, что теперь основные надежды на описание как электрослабых, так и сильных взаимодействий связываются с теорией калибровочных полей. Действительно, с точки зрения кварковой модели теория сильных взаимодействий уайтмановского типа получается ограничением рассмотрения лишь «физическими» локальными операторами (такими, как адронные поля, составленные из «фундаментальных» кварковых полей), действующими в гильбертовом пространстве физических состояний. В принципе таких «физических» полей достаточно для описания адронной физики, хотя это означает отказ от традиционного локального лагранжева формализма (связь восстанавливается в приближении низкоэнергетических «феноменологических» лагранжианов). Поэтому желание включить в рассмотрение такие «ненаблюдаемые» (т. е. калибровочно зависимые) фундаментальные поля, как четырехвекторные потенциалы, локальное поле электрона или кварка, которые используются в реальных расчетах по теории возмущений, требуют некоторого расширения и модификации уайтмановской схемы.

Настоящая монография посвящена последовательному изложению принципов локальной квантовой теории поля, включающему калибровочные теории с индефинитной метрикой. Хотя относительное место, выделенное в книге собственно калибровочным теориям, невелико, их включение отразилось на всем ее построении. Большой упор (по сравнению с [Б5]) был сделан на алгебраический подход.

Наряду с преобладающим чисто теоретическим материалом в последнюю часть включены применения развитого аппарата к выводу дисперсионных соотношений и к исследованию поведения сечений взаимодействия элементарных частиц при высоких энергиях.

Книга рассчитана на физиков-теоретиков и математиков, интересующихся проблемами квантовой теории поля и математической физики. Хотя мы стремились по возможности сделать изложение не зависимым от других источников, настоящую книгу нельзя рекомендовать для первоначального ознакомления с квантовой теорией. Кроме знакомства с обычным курсом квантовой механики и с общими представлениями об элементарных частицах и их взаимодействиях, полезно иметь понятия об основах квантовой теории поля, например в рамках [Б9] (или первых

---

*) Тогда же она стала объектом специальных монографий [С8, И5, Б5]. Предлагаемая монография была вначале задумана как второе издание [Б5]. В процессе работы, однако, замысел значительно разросся, и в итоге возникла настоящая новая книга. (Содержание книги шире, чем это отражено в заглавии: наряду с принципами излагаются и математические методы квантовой теории поля.)

четырех глав [Б8]; см. также [Х3, Ш4]). Вспомогательный математический аппарат, выходящий за рамки обязательных курсов на физических факультетах (сведения из функционального анализа, теории обобщенных функций, теории аналитических функций нескольких переменных, словарь теории групп Ли и их представлений), излагается в тексте.

Мы считаем своим приятным долгом поблагодарить наших коллег из Математического института им. В. А. Стеклова, Объединенного института ядерных исследований, Института физики высоких энергий, Института ядерных исследований АН СССР и Института ядерных исследований и ядерной энергетики Болгарской Академии наук за многочисленные полезные обсуждения. Один из авторов (И. Т. Т.) благодарен М. К. Поливанову за гостеприимство в Математическом институте им. В. А. Стеклова в заключительный период работы над книгой.

Январь 1984 г.

Список принятых обозначений

$\overset{(-)}{A}{}^{(*)}(p,\ \overset{(-)}{\omega},\ \varkappa)$ 321, 322
Ad_g 185
$A(s,\ t)$ 603
$A(s,\ t,\ \zeta_2,\ \zeta_4)$ 593
A^t 353, 519
$\mathscr{A}^{[\varkappa]}$ 517
$\overline{\mathfrak{A}}$ 56
$\mathfrak{A}^c$, $\mathfrak{A}^{cc}$ 56
$\mathfrak{A}_h$ 255
$\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$ 345
$\mathfrak{A}(\mathscr{O})$ 345
$\mathfrak{A}_1$ 56
$\mathfrak{A}'_{1+}$ 48
adm 209
ad_y 185
$\overset{(-)}{a}{}^{(*)}(p,\ \overset{(-)}{\omega},\ \varkappa)$ 323
$a^{(\varkappa_n\ldots\varkappa_1;\varkappa)}_{l_n\ldots l_1;l}(x_n,\ \ldots,\ x_1;\ x)$ 543
$a^*(\Phi)$, $a(\Phi)$ 315, 317
B_s, B_u 590
$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 45
C, CP 325
C_2 188
$\boldsymbol{C}$ 14
$\boldsymbol{C}^n$ 16, 22
$\boldsymbol{CM}$ 335, 384
$\boldsymbol{CM}^n$ 386
$\boldsymbol{C}S^2$ 586
$\boldsymbol{C}\Gamma_{\sqrt{\lambda}}$ 209
$\mathscr{C}([a,\ b])$ 19
$\mathscr{C}(\mathscr{O})$ 30
$\mathscr{C}^\infty$ 30
c 55
c^k_{ij} 180
D_A 37, 38
$D^{\mathrm{adv}}_m(x)$, $D^{\mathrm{ret}}_m(x)$ 379
$D_m(x)$ 361, 378
$D^c_m(x)$ 379
$D^{(\pm)}_m(x)$ 361, 378
$D_{(n)}(x)$ 196
D^α 30
$D^s_{\sigma\sigma'}(V)$ 305
$\mathscr{D}(\mathscr{O})$, $\mathscr{D}_r(\mathscr{O})$ 31
$\mathscr{D}'(\mathscr{O})$ 60
$\mathfrak{D}^{(j,k)}$ 142
$\mathfrak{D}_\lambda(\Omega)$ 122
$d(K,\ \partial D)$ 235
disc 189
$d_n p$ 76
$d^n x$ 58, 76
$|d^n z\, d^n \bar{z}|$ 130
$(dp)_m$ 304
$d\sigma_{\mathrm{el}}/d\cos\theta$ 634
$d\Xi_{\varkappa_3\ldots\varkappa_n}$ 330
$d\sigma_{\varkappa_1\varkappa_2\to\varkappa_3\ldots\varkappa_n}/d\Xi_{\varkappa_3\ldots\varkappa_n}$ 329
$d\sigma_{\varkappa_1\varkappa_2\to\boldsymbol{K}\ldots}/d\Xi_{\boldsymbol{K}}$ 652
$d\tau_{\varkappa_1\varkappa_2\to\boldsymbol{K}\ldots}/d\Xi_{\boldsymbol{K}}$ 653
∂A 220
∂^α 217
$\widehat{\partial}$ 338
$\overleftrightarrow{\partial}_0$ 519
$\mathfrak{D}_\lambda(\Omega)$ 122
$E(4)$ 421
$E_j(s)$ 332
$E(s)$ 581
$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}^n$ 396, 397
$\boldsymbol{E}^n_{\neq}$, $\boldsymbol{E}^n_{<}$ 423
$\mathscr{E}(\mathscr{O})$ 30
$\mathscr{E}_{12,34}(s)$ 596
ex 516
$F^{(\varkappa)}$ 403
$\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_{x\to p}$ 76
$\mathscr{F}^{(\varkappa)}$ 566
$\mathscr{F}_\wedge(U)$, $\mathscr{F}_\vee(U)$ 315
$\mathscr{F}_\wedge(\mathfrak{H}_1)$, $\mathscr{F}_\vee(\mathfrak{H}_1)$ 314
$\mathfrak{F}$ 351
$\mathfrak{F}(\mathscr{O})$ 351
$f_l(s)$ 633
G_{phys} 332
$G_\varkappa$, $G^\pm_\varkappa$ 544, 550
$\mathscr{G}$ 452
$\mathscr{G}_0$ 453
$g_{\lambda\mu}$ 134
$H(D)$ 241
$\mathscr{H}(D)$ 216
$\mathscr{H}^{\mathrm{in}}$, $\mathscr{H}^{\mathrm{out}}$ 326, 327
$\mathscr{H}_{\mathrm{phys}}$ 259
$\mathfrak{H}^{[m,s]}$ 309
$\mathfrak{H}^{\otimes n}_1$, $\mathfrak{H}^{\vee n}_1$, $\mathfrak{H}^{\wedge n}_1$ 313
$\mathfrak{H}^{[\varkappa]}$ 516
I_s, I_t, I_{st} 136, 137
$\mathfrak{I}$ 294
in 326
int 104
$J^{(\varkappa)l}(x)$ 569
$\mathscr{J}_n$ 392
$j^{(\varkappa)}(x)$ 547
K, $K^{(\varkappa)}_x$ 364, 546, 547
$K(p;\ p',\ \lambda)$ 191
$K_{12}(s)$, $K_{34}(s)$ 332
$k(s)$ 631
L, $L^\uparrow_+$ 135, 136
$L(C)$, $L_+(C)$ 385
$\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{x\to k}$ 104
$\mathscr{L}_1(\mathscr{H})$ 54
$\mathscr{L}^1(\boldsymbol{R}^n)$ 82
$\mathscr{L}^2([a,\ b])$ 23
$\mathscr{L}^2(X,\ \mu)$ 42
$\mathscr{L}^2(\Gamma^+_m)$ 305
M^j 296
$M^{\lambda\mu}$ 295
M_j, M_{ij} 581
$\boldsymbol{M}$ 134, 480
$\overline{\boldsymbol{M}}^{n-1}_+$ 423
$\mathscr{M}_+$, $\mathscr{M}_-$, $\mathscr{M}$ 150, 153
$\mathfrak{M}$ 329, 331
$\mathfrak{M}^R$ 483
m_{ij} 581
N, N_{in} 631, 655
N^J 296
$\mathfrak{N}(\alpha)$ 587
$\mathfrak{N}(\zeta^R)$ 485
$O(3)$, $O_+(3)$ 179
$O(4)$, $O(4,\ C)$ 421
$O(d)$, $O_+(d)$ 161

$O(d, C)$, $O_+(d, C)$ 228
out 326
P 296, 324
P^μ 295
$P_l(z)$ 631
$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ 305
$P_{\sigma\sigma'}^{(J)}(\nu)$ 439
$PS(\mathfrak{A})$ 255
PS_π 258
$P(w;\rho)$ 217
$\mathscr{P}(D)$ 237
$\mathscr{P}(\boldsymbol{M})$ 350
$\mathscr{P}(\mathscr{O})$ 350
$\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^n;\mathscr{X})^G$ 167
$\mathfrak{P}$ 293
$\mathfrak{P}_0$ 293
$\mathfrak{P}_+^\uparrow$ 293
$\mathfrak{P}^{(j.k)}$ 142
$\widehat{p}$ 339
$Q(a, b)$, $Q[a, b]$ 204
$\mathcal{Q}_n(a, b)$ 194, 195
$R_b(z, \partial D)$ 232
$\boldsymbol{R}$ 14
$\boldsymbol{R}_+$, $\overline{\boldsymbol{R}}_+$ 119
$\boldsymbol{R}^n$ 19
$\boldsymbol{R}_n$ 76
$\mathring{\boldsymbol{R}}^n$ 122
$\boldsymbol{R}_\infty$ 100, 101
$\Re(x;\eta)$ 541
$r_{l_n\ldots l_1;l}^{(\varkappa_n\ldots\varkappa_1;\varkappa)}(x_n,\ldots,x_1;x)$ 542
S 326
$SL(2, C)$ 138
$S_m(x)$ 373
$SU(2)$ 179
$S(\mathfrak{A})$ 255
S_π 258
$S(\chi)$, $S^*(\chi)$ 464
$S_{l_1\ldots l_n}^{(\varkappa_1\ldots\varkappa_n)}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ 425
$\mathscr{S}(\mathscr{O})$ 96
$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 31
$\mathscr{S}_r(\boldsymbol{R}^n)$ 31
$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)^G$ 160
$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n;\mathscr{X})$ 166
$\mathscr{S}_{\lambda,m}(\boldsymbol{R}^n)$ 19
$\mathscr{S}(\Omega)$ 98
$\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ 59
$\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n\,|\,\Omega)$ 99
$\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)^G$ 160
$\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n;\mathscr{X}')$ 166
$\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n;\mathscr{X}')^G$ 166, 167
$\mathfrak{S}(\chi)$ 564
s, s_{phys} 331
$s_{\min}(\tau)$ 633
supp 63, 64
$s_{l_1\ldots l_n}^{(\varkappa_1\ldots\varkappa_n)}(x_1,\ldots,x_n)$ 423
T 324, 334
TCP 324, 401
$T_\rho(s, t)$ 334
$T(s, t, \zeta_2, \zeta_4)$ 589
T_n^+ 113
T_{n-1}^- 359
$T_l(z)$ 634
$\mathscr{T}$ 328
$\mathscr{T}_n$ 390
$\mathscr{T}^K$ 105
$\mathscr{T}_n^-$ 359
$\mathscr{T}_n^S$ 393
$\mathfrak{T}(\eta)$, $\widetilde{\mathfrak{T}}(\eta)$ 536
t 331
$t_{\min}$, $t_{\max}$ 332
tr 53
$U^{\otimes n}$, $U^{\vee n}$, $U^{\wedge n}$ 315
$U(I_s)$, $U(I_t)$, $U(I_{st})$ 324
$\mathscr{U}(I_s)$, $\mathscr{U}(I_t)$, $\mathscr{U}(I_{st})$ 325
$\mathscr{U}^{[m,s]}$ 309
u 331
V, $\overline{V}$ 135
$V^\pm$, $\overline{V}^\pm$, $\overline{V}_m^\pm$ 135
V_α^ε 29
$V_{lm}^{(\varkappa)}$ 349
$W(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ 358
$X(s)$ 597
$\mathscr{X}$ 155, 166
$x(s)$, $x_{12}(s)$, $x_{34}(s)$ 581
$\underline{x}$, $\widetilde{x}$ 139
$|x|$ 19
$Y_l^m(\boldsymbol{n})$ 632
$Y(s)$ 639
$y(s)$ 639
$\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}_+$, $\overline{\boldsymbol{Z}}_+$ 31
$\boldsymbol{Z}_2$ 179
$\alpha_{(a.\Lambda)}$, $\alpha_{(a.\underline{\Lambda})}$ 297, 350
$\alpha(I_s)$, $\alpha(I_t)$, $\alpha(I_{st})$ 323
$\alpha(\varkappa, \varkappa')$ 408
$\alpha!$ 217
$|\alpha|$, $|\beta|$ 19
Γ 453
$\Gamma(A)$ 38
$\Gamma(f)$, $\mathring{\Gamma}(f)$ 104
Γ_m^+, Γ_m^- 135, 137
Γ^μ 442
γ_μ 335
γ_5 335
$\delta_m^+(p)$, $\delta_m^-(p)$ 308
$\delta(x)$ 60
$\delta(z)$ 130
ε 139
ε_{jkl} 138
$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ 140
$\varepsilon(t)$ 196
$\varepsilon_F(\pi)$ 393
Θ 452
Θ_0 520
$\Theta_c(\boldsymbol{R}^n)$ 79
$\Theta_M(\boldsymbol{R}^n)$ 69
$\theta(x)$ 67
$\varkappa$, $\widetilde{\varkappa}$ 320, 348
Π 328, 331
π_F 50
π_{phys} 259
$\sigma_{\text{el}}(s)$, $\sigma_{\text{tot}}(s)$ 634
$\widetilde{\sigma}_s$, $\widetilde{\sigma}_t$, $\widetilde{\sigma}_{st}$ 294
$\widehat{\sigma}_{\text{tot}}(s)$ 641
$\sigma(\overline{V})$, $\sigma(\overline{V}, \mathscr{A})$ 190
$\sigma^{(\varkappa,\varkappa')}$ 352
$\sigma_{\varkappa_1\varkappa_2\to\varkappa_3\ldots\varkappa_n}$ 330
$\sigma_{\varkappa_1\varkappa_2\to\boldsymbol{K}\ldots}$ 652
τ_j 138
$\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ 601
$\tau_{l_1\ldots l_n}^{(\varkappa_1\ldots\varkappa_n)}(x_1,\ldots,x_n)$ 535
$\overline{\tau}_{l_1\ldots l_n}^{(\varkappa_1\ldots\varkappa_n)}(x_1,\ldots,x_n)$ 535
$\tau_{\varkappa_1\varkappa_2\to\boldsymbol{K}\ldots}$ 653
Φ_F 50
Φ^{ex}, Φ^{in}, Φ^{out} 519, 520
$\varphi_l^{(\varkappa)}$, $\varphi_l^{(\widetilde{\varkappa})}$ 348
$\varphi^{(\varkappa)}(x, \omega, \bar{\omega})$ 351
χ^+ 436
Ψ_0 298
$\|\ \|^K$ 30
$\|\ \|_{lm}$ 19
$\|\ \|_{lm}^\Omega$ 69
$\wedge$, $\vee$ 209, 314
$\square$ 149
$\square_{(n)}$ 194
$\otimes$ 17
$\sim$ 346
$\lesssim$, $\gtrsim$ 535
$::$ 368, 374
$*$ 44, 83
$|0\rangle$ 298, 449

Введение

Место аксиоматического подхода в квантовой теории поля. В физике, как и в математике, аксиоматический метод играет двоякую роль. С одной стороны, он проясняет логические основы данной области, выявляя независимые посылки (скажем, евклидовой геометрии или ньютоновской механики), и тем самым открывает новые возможности. С другой стороны, путем выделения фундаментальных структур он позволяет найти связь между далекими на первый взгляд разделами науки. Такой подход характерен для современной математики, где он привел к возникновению ряда новых областей. Менее склонны замечать роль аксиоматического метода в теоретической физике, где он, однако, еще со времен Ньютона приобрел широкое распространение — и как способ систематизации полученных результатов, и как метод описания новых явлений с помощью выработанных ранее формальных схем. В основе всякой аксиоматики физической дисциплины лежат глубокие физические представления, выраженные в математически непротиворечивой форме. Замечательно то, что формальные схемы порой содержат больше, чем в них первоначально закладывалось (примеры: принцип действия, канонический формализм, ансамбль Гиббса). Отсюда проистекает и обратное влияние математических структур теоретической физики на формирование физических представлений.

В 30-е годы аксиоматический метод был с успехом применен (в работах Иордана, фон Неймана, Вигнера) к квантовой механике (см. [H4]; в качестве примеров более позднего развития этого направления можно рекомендовать книги [M1, X7]). Структурный анализ квантовой механики привел к замечательному синтезу физических и математических идей, которые стали частью общепринятого формализма квантовой теории и оказали влияние на развитие математики. (Под стимулирующим влиянием квантовой теории родились новые разделы функционального анализа: теория операторов в гильбертовом пространстве, операторные алгебры, унитарные представления групп, гармонический анализ.) Математические проблемы квантовой теории в большой мере определили интересы современной математической физики.

В квантовой теории поля аксиоматический подход был вызван к жизни в 50-е годы в связи с успехами и трудностями метода возмущений в лагранжевой квантовой теории поля. Разработанный в методе возмущений аппарат перенормировок привел к блестящему успеху в квантовой электродинамике, где параметр разложения — константа связи — мал, так что для сопоставления с экспериментом можно было ограничиться первыми членами ряда теории возмущений. Однако этот метод оказался непригодным для описания сильных взаимодействий элементарных частиц (где эффективная константа связи больше единицы). Лучшее, что дает теория перенормировок, — это формальный бесконечный ряд для решений квантовополевых уравнений в классе физически интересных перенормируемых лагранжианов. Аксиоматический подход был призван в первую очередь ответить на вопрос, что скрывается за этими формальными бесконечными рядами. Для этого потребовалось создание новых принципов квантовой теории поля, отличных от лагранжева метода с его теорией возмущений *).

---

*) Здесь уместно напомнить аналогичную ситуацию, имевшую место в теории вероятностей: аксиоматика Колмогорова (предложенная в конце 20-х годов) вызвала решительную перестройку этой дисциплины на вполне математических основаниях.

Первая попытка выйти за рамки лагранжева подхода восходит к Гейзенбергу (1943). Анализируя, что на самом деле измеряется в физике элементарных частиц, Гейзенберг приходит к выводу, что основной наблюдаемой является матрица рассеяния, и предлагает строить теорию непосредственно в терминах элементов S-матрицы, устраняя понятие поля, адиабатическую гипотезу выключения взаимодействия (лежащую в основе теории возмущений) и т. п. Оказалось, однако, что подход Гейзенберга слишком радикален. Полное изгнание локальных величин из теории лишает нас возможности рассматривать развитие системы в пространстве и времени, учитывать принцип причинности. Поэтому развитие аксиоматического метода пошло по пути изучения локальных величин. При этом в самом начале (в 50-е годы) определились по крайней мере три направления.

Формализм Уайтмана выделяет в качестве основных объектов наиболее регулярные величины — квантованные поля в представлении Гейзенберга и вакуумные средние их обычных произведений (функции Уайтмана, аналогичные корреляционным функциям в статистической физике). Функции Уайтмана в принципе позволяют извлечь всю физическую информацию, заключенную в теории. В частности, асимптотическое условие (которое было первоначально сформулировано Хаагом как один из постулатов теории) и матрица рассеяния являются производными понятиями (лишь условие асимптотической полноты остается независимой гипотезой).

В подходе Лемана, Симанзика и Циммермана (LSZ) основными понятиями являются хронологические (или T-) произведения полей (а также их вакуумные средние — функции Грина) и асимптотическое условие. При этом может показаться, что нет смысла говорить здесь о независимом подходе, поскольку функции Грина и T-произведения формально выражаются через функции Уайтмана и обычные произведения гейзенберговских полей. На самом деле это формальное определение математически некорректно, так как включает произведение (операторной) обобщенной функции на разрывные θ-функции (это приводит к расходимостям того же типа, что и в теории возмущений). Именно это обстоятельство заставляет принять альтернативную точку зрения, что T-произведения (или, эквивалентно, запаздывающие произведения) являются исходными объектами теории наряду с гейзенберговскими полями и определяются лишь косвенно при помощи некоторого набора свойств. Такой подход не является наиболее экономичным (поскольку теорию рассеяния можно в принципе развить и не вводя заранее понятия T-произведения; см. гл. 12), но он практически удобен и приближает нас к традиционному лагранжеву методу.

Подход Боголюбова, Медведева и Поливанова, в котором основным объектом является расширенная (за массовую оболочку) S-матрица, внешне ближе к первоначальной программе Гейзенберга. В содержательном отношении он тесно связан с параллельно возникшим подходом LSZ, так как расширенная S-матрица является по существу производящим функционалом T-произведений операторов тока. В то время как в формализме Уайтмана или LSZ вывод формул редукции (выражающих S-матричные элементы через функции Грина) нетривиален, в S-матричном методе эти формулы выводятся автоматически формальным вариационным дифференцированием S-оператора (или выраженных через него радиационных операторов) по асимптотическим полям. Эффективный учет сложной комбинаторики в операциях такого рода обусловливает практическое удобство S-матричного метода. Не случайно именно на этом пути впервые были доказаны дисперсионные соотношения.

В 60-е годы в значительной мере были выявлены связи между этими исторически независимо возникшими направлениями. Если отвлечься от некоторых математических тонкостей и технических различий, можно сказать, что все три подхода с равным успехом приложимы к классу квантовополевых теорий с условием

асимптотической полноты. Поскольку это условие существенно используется лишь в последних двух подходах, то формализм Уайтмана является несколько более общим.

Наряду с этим в 60-е годы возникло еще более общее аксиоматическое направление. В работах Хаага, Араки и Кастлера принципы локальной квантовой теории были сформулированы на языке алгебраического подхода, ведущего свое начало от работ фон Неймана и Сигала. Значение этого подхода для общей постановки задач физики систем с бесконечным числом степеней свободы все более возрастает. В частности, он предоставляет способ описания калибровочных теорий, спонтанного нарушения симметрий (а в статистической физике — фазовых переходов, что, однако, выходит за рамки настоящей книги).

Среди различных путей, по которым движется современная теория элементарных частиц, аксиоматический подход занимает сравнительно небольшое место (в особенности, если судить по числу публикаций). Однако недолговечность феноменологических результатов теорий, основанных на ряде специальных допущений, увеличивает интерес к результатам, вытекающим из основных принципов квантовой теории; эти принципы — релятивистская инвариантность, существование полной системы состояний с положительной энергией, причинность.

До сих пор нет полного ответа на основной вопрос, из-за которого возник аксиоматический подход, — совместимы ли принципы релятивистской локальной квантовой теории поля (в четырехмерном пространстве-времени) с существованием нетривиальной матрицы рассеяния. В последнее десятилетие здесь произошел большой сдвиг. Возникла по существу новая область — конструктивная квантовая теория поля (см. [Г7]), в результате развития которой были построены нетривиальные модели в двумерном и трехмерном пространстве-времени. Однако эти модели являются суперперенормируемыми*) и не требуют бесконечной перенормировки заряда. Рассмотрение реалистических перенормируемых моделей в четырехмерном пространстве-времени требует существенно новых методов. Тем не менее достигнутые на этом пути успехи, наряду с обнаружением перенормируемости и асимптотической свободы неабелевых калибровочных полей в традиционном (формальном) подходе**), открывают дальнейшие перспективы развития локальной квантовой теории поля.

План изложения. Часть I носит предварительный характер: она содержит необходимые для дальнейшего сведения из функционального анализа и теории функций. Эта часть местами довольно конспективна и, разумеется, не может заменить систематического изложения всех затрагиваемых вопросов: некоторые доказательства опущены (и заменены подробными литературными ссылками), далеко не все определения и утверждения сопровождаются наводящими соображениями.

Систематическое изложение начинается с части II. После изложения основных понятий квантовой феноменологии на алгебраическом языке формулируются те принципы релятивистской квантовой теории, которые не требуют введения локальных величин: принцип инвариантности относительно группы Пуанкаре (т. е. неоднородной группы Лоренца) и условие спектральности (т. е. существование полной системы физических состояний с неотрицательной энергией).

В части III излагается в основном уайтмановская формулировка теории локальных квантованных полей. Подробно разбираются примеры свободных (и обобщен-

*) Т. е. обладают конечным числом примитивно расходящихся (одночастично неприводимых) диаграмм (см. определение, например, в [Ш4], § 16).

**) См., например, сборник [К7] и обзор Крюзера (1976).

ных свободных) полей. Здесь приводится ряд общих результатов: TCP-теорема, теорема о связи спина со статистикой, теоремы Хаага и Голдстоуна. Одна из глав посвящена обобщению уайтмановского формализма для полей в индефинитной метрике (важность этого класса теорий заключается в том, что сюда попадают калибровочные теории в локальных ковариантных калибровках). Глава о двумерных явно решаемых моделях служит как бы иллюстрацией к формализму Уайтмана и его обобщениям.

Часть IV включает обзор теории рассеяния Хаага–Рюэля, ее связь с теорией LSZ, а также S-матричный подход.

В части V развитый аппарат применяется к аналитическим свойствам амплитуд элементарных процессов. Несмотря на простоту, идея аналитичности оказала весьма плодотворное влияние ни развитие теории сильных взаимодействий (в этой связи отметим хотя бы дуальные резонансные модели). В нашем изложении представлены основополагающие результаты, выводимые из принципов квантовой теории поля; в первую очередь, это аналитичность по косинусу угла рассеяния, дисперсионные соотношении, кроссинг. Приложениям результатов локальной квантовой теории поля к высокоэнергетическим процессам элементарных частиц посвящена обширная литература (подробную информацию о ней читатель найдет в обзорах [O1]). Несколько таких характерных примеров приведено в заключительной главе.

Каждой части предшествует краткое изложение содержания.

В книгу включены дополнения, излагающие вспомогательный материал или вопросы, представляющие самостоятельный интерес. Многочисленные упражнения составляют неразрывную часть текста. На них имеются ссылки в дальнейшем, и, как правило, они снабжены указаниями. Дополнения, упражнения, доказательства, а также некоторые замечания набраны петитом.

Список литературы разделен на две части. В первой из них помещены учебники и монографии; ссылки на них заключены в квадратные скобки (например, [A1]). Вторая часть содержит журнальные статьи, препринты и лекции на семинарах и школах. В тексте ссылки на эту часть списка даются фамилиями авторов (или только первого с добавлением «и др.», если авторов больше двух) и годом публикации (например, Яух и Пирон, 1963).

В конце книги имеется сводка часто встречающихся обозначений. Отметим, что все координаты 4-векторов пространства-времени Минковского $\boldsymbol{M}$ у нас вещественны и метрический тензор в $\boldsymbol{M}$ определяется равенствами

$$g^{00} = -g^{kk} = 1 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3 \qquad (g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3).$$

Трехмерная (пространственная) часть 4-вектора p обозначается жирным шрифтом, так что $p \equiv (p^0, \boldsymbol{p})$, $p^2 \equiv (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2$. Всюду принята система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

ЧАСТЬ I

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Краткий обзор

С понятием гильбертова пространства и со спектральным анализом самосопряженных операторов в нем читатель, безусловно, встретился еще при изучении квантовой механики. Параграфы 1.1 и 1.4 содержат дальнейшие сведения из этой области. Из остального материала главы 1 выделим понятие локально выпуклого пространства и конструкцию Гельфанда–Наймана–Сигала (ГНС) представления C^*-алгебры.

Неотрицательная функция $p(u)$ на векторном пространстве Ω называется полунормой, если она положительно однородна: $p(\lambda u) = |\lambda|\, p(u)$ (для любого скаляра λ), и удовлетворяет неравенству треугольника $p(u+v) \leqslant p(u) + p(v)$. Всякая система полунорм $\{p_\alpha\}$ в пространстве Ω, обладающая свойством отделимости $[p_\alpha(u) = 0$ для всех α из данного набора $\mathscr{A}$ влечет за собой $u = 0]$, определяет (отделимую) локально выпуклую топологию на Ω. В п. 1.2.А вводится некоторое естественное понятие эквивалентности (взаимной подчиненности) двух систем полунорм; две локально выпуклые топологии над данным линейным пространством Ω совпадают в точности тогда, когда эквивалентны порождающие их системы полунорм. Полное (отделимое) локально-выпуклое пространство со счетной системой полунорм называется пространством Фреше. Всякое пространство Фреше метризуемо, и, следовательно, к нему применима теорема Бэра «о категории» (теорема 1.3, п. 1.2.Б).

Инволютивная банахова алгебра $\mathfrak{A}$ называется C^*-алгеброй, если $\|A^*A\| \equiv \|A\|^2$ (п. 1.5.А). Это понятие абстрагировано из алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Линейный функционал F над инволютивной алгеброй $\mathfrak{A}$ называется положительным, если $F(A^*A) \geqslant 0$ при всех A из $\mathfrak{A}$ (п. 1.5.В). Конструкция ГНС позволяет по данному положительному функционалу F над C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ построить (циклическое) представление π_F алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_F$ с циклическим вектором Φ_F так, что $F(A) = \langle \Phi_F,\, \pi_F(A)\, \Phi_F \rangle$ при всех $A \in \mathfrak{A}$ (теорема 1.25 п. 1.5.Г).

Важным примером пространства Фреше является пространство (комплексных) бесконечно гладких (кратко, $\mathscr{C}^\infty$) быстро убывающих основных функций $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ (п. 1.2.В); в нем можно задать топологию при помощи возрастающей системы гильбертовых норм

$$\|u\|_m^2 = \int \bar{u}(x)(|x|^2 - \Delta + 1)^m\, u(x)\, d^n(x) \qquad \left(|x|^2 \equiv x_1^2 + \ldots + x_n^2,\ \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

(эквивалентной системе (1.42)). Обобщенные функции определяются (п. 2.1.А) как линейные непрерывные функционалы над $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$. (Иногда для этого же объекта используется термин «обобщенная функция умеренного роста»; для более общего понятия линейного непрерывного функционала над пространством финитных $\mathscr{C}^\infty$-функций $\mathscr{D}(\mathscr{O})$ мы оставляем термин Шварца «распределение».) Обобщенные функции (так же, как и распределения) можно дифференцировать и умножать на некоторые полиномиально ограниченные гладкие функции, не выходя из пространства $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ (соответственно $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$). Свойством, присущим пространст-

ву $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ и ему сопряженному, является их стабильность при преобразовании Фурье: если $u(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, то

$$\widetilde{u}(p) = \int e^{ipx}\, u(x)\, d^n x \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}_n),$$

где $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}_n)$ — пространство функций от p с мерой $d_n p = d^n p/(2\pi)^n$ (предложение 2.6). Равенство Парсеваля

$$\int \overline{f(x)}\, u(x)\, d^n x = \int \overline{\widetilde{f}(p)}\, \widetilde{u}(p)\, d_n p,$$

справедливое для произвольных пробных функций u и f, используется для определения преобразования Фурье обобщенной функции f. В рамках теории преобразования Фурье обобщенных функций (п. 2.5.Б) получают обоснование формулы типа $\delta(x) = \int e^{-ipx}\, d_n p$.

В § 2.7 вводятся понятия векторной и операторной обобщенных функций. Первое из них позволяет определить обобщенные собственные векторы (соответствующие непрерывному спектру самосопряженного оператора — п. 2.7.В); второе понадобится нам при формулировке полевых аксиом в третьей части.

Глава 3 посвящена изучению лоренц-инвариантных н ковариантных обобщенных функций. В качестве введения приводится классификация конечномерных представлений группы $SL(2, C)$ (квантовомеханической группы Лоренца). Предложение 3.2 (п. 3.2.Б) является точной формулировкой интуитивного представления о том, что любая четная лоренц-инвариантная функция одного 4-вектора p является функцией p^2. Сюда относятся также инвариантные обобщенные функции, сосредоточенные в точке, которые имеют вид $P(\Box)\,\delta(p)$ (см. (3.89)). Произвольная нечетная инвариантная функция f задается, со своей стороны, функционалом типа

$$(f,\, u) = \int f(p)\, u(p)\, d_4 p = \int d\tau \psi_f(\tau) \int d_4 p \varepsilon(p^0)\, \delta(\tau - p^2)\, u(p) \qquad (u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{M})),$$

где ψ_f — обобщенная функция из $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$, исчезающая при $\tau < 0$ (п. 3.2.В).

При изучении лоренц-ковариантных (обобщенных) функций (§ 3.3) мы пользуемся формализмом однородных полиномов от спинорных переменных $\omega\,(\in \boldsymbol{C}^2)$ и $\bar{\omega}$ (вместо того чтобы работать со спин-тензорами). Функция $f(p;\, \omega,\, \bar{\omega})$ ковариантна, если $f(\Lambda(\underset{\sim}{\Lambda})\, p;\ \underset{\sim}{\Lambda}\omega,\ \underset{\sim}{\Lambda}\bar{\omega}) = f(p;\, \omega,\, \bar{\omega})$. Нетривиальная ковариантная функция f существует, лишь если степень однородности по ω совпадает со степенью однородности по $\bar{\omega}$. Обозначая эту общую степень через n, будем иметь $f_n(p;\, \omega,\, \bar{\omega}) = f_0(p)(\omega \underset{\sim}{p} \bar{\omega})^n$, где f_0 — лоренц-инвариантная (обобщенная) функция (см. (3.127)).

Обобщенная функция $f_+(x)$ из $\mathcal{S}'(\boldsymbol{M})$ называется запаздывающей, если ее носитель содержится в конусе будущего $\overline{V}^+$; аналогично, $f_-(x)$ — опережающая функция, если $\operatorname{supp} f_- \in \overline{V}^-$. В дополнении Б доказано, что преобразование Фурье запаздывающей (опережающей) функции является предельным значением аналитической функции, голоморфной в трубчатой области $T^{\pm} = R^4 + iV^{\pm}$.

Пусть $h_+(p)$ и $h_-(p)$ — преобразования Фурье запаздывающей и опережающей функций и пусть их разность $g(p) = h_+(p) - h_-(p)$ сосредоточена в области $((-m,\, 0) + \overline{V}_M^+) \cup \cup\, ((m,\, 0) + \overline{V}_M^-)$, где $\overline{V}_M^{\pm} = \{p \in R^4;\ \pm p^0 \geqslant \sqrt{M^2 + \boldsymbol{p}^2}\,\}$. Тогда справедливо представление Йоста–Лемана

$$g(p) = \varepsilon(p^0) \int\limits_0^{\infty} d\lambda \int d_3 q\, \delta(p_0^2 - (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})^2 - \lambda)[\Phi_0(\boldsymbol{q},\, \lambda) + p^0 \Phi_1(\boldsymbol{q},\, \lambda)],$$

где Φ_0, Φ_1 — обобщенные функции из $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}_3 \times \overline{\boldsymbol{R}}_+)$, сосредоточенные на множестве

$$\{\boldsymbol{q},\, \lambda) \in \boldsymbol{R}_3 \times \overline{\boldsymbol{R}}_+; \qquad |\boldsymbol{q}| \leqslant m, \qquad \sqrt{\lambda} \geqslant M - \sqrt{m^2 - \boldsymbol{q}^2}\,\}.$$

Глава 4 посвящена выводу представления Йоста–Лемана–Дайсона (ИЛД), которое обобщает формулу на случай более общей (несимметричной) области исчезновения функции $g(p)$.

Представление ИЛД дает возможность аналитически продолжить единую функцию $h(k)$, первоначально заданную в объединении областей $T^+ \cup T^- \cup \mathscr{O}$ (где $\mathscr{O}$ — (вещественная) область совпадения h_+ и h_-):

$$h(k) = \begin{cases} h_+(k) & \text{при} \quad k \in T^+, \\ h_-(k) & \text{при} \quad k \in T^-, \end{cases}$$

в некоторую более широкую область 4-мерного комплексного пространства. Это — простейший пример теоремы «об острие клина» (теорема 5.12). Она иллюстрирует важный факт, отличающий теорию аналитических функций нескольких комплексных переменных от соответствующей теории функций одной переменной. В то время как любая область D комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$ является областью голоморфности некоторой аналитической функции, не допускающей аналитического продолжения вне D, в случае нескольких переменных существуют области, не являющиеся областями голоморфности ни одной аналитической функции. Это позволяет ввести понятия аналитического расширения, области голоморфности и оболочки голоморфности, изучению которых посвящена глава 5.

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1.1. Нормированные пространства

А. Линейные пространства. При изучении бесконечномерных линейных пространств методами функционального анализа акцент делается на топологические свойства. Оставляя пока в стороне топологические детали, мы здесь кратко перечислим основные понятия, связанные с линейными пространствами и известные из линейной алгебры.

Линейным пространством является множество элементов любой природы, для которых определены операции сложения и умножения на вещественное (или комплексное) число с выполнением обычных для этих действий законов. Элементами линейного пространства могут быть, например, векторы в n-мерном евклидовом пространстве или множество непрерывных (или интегрируемых) функций, заданных на некотором точечном множестве в конечномерном пространстве, или функционалы, заданные на некотором классе функций. Для абстрактной теории линейных пространств конкретная природа их элементов безразлична.

Приведем точные определения.

Множество Ω называется *линейным пространством* (над полем $\boldsymbol{R}$ вещественных или $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел), если выполнены условия I–III.

I. В Ω определено коммутативное и ассоциативное сложение. Это означает, что для каждых двух элементов u и v множества Ω однозначно определен третий элемент $u+v$, причем

Iа. $u+v=v+u$;

Iб. $u+(v+w)=(u+v)+w$;

Iв. При любых u и v существует элемент x, зависящий от u и v, такой, что $u+x=v$ (этот элемент обозначается как $v-u$).

II. В пространстве Ω определено умножение на числа λ, $\mu, \ldots$, причем

IIа. $1\cdot u=u$;

IIб. $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)\,u$ для любого $u\in\Omega$.

III. Операции сложения и умножения на число связаны законами дистрибутивности:

IIIа. $(\lambda+\mu)\,u=\lambda u+\mu u$;

IIIб. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$.

Элементы линейного пространства называются также точками или векторами, а само линейное пространство — *векторным пространством* (вещественным или комплексным в зависимости от выбора $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$ в качестве поля скаляров; в дальнейшем в этой книге мы будем иметь дело главным образом с комплексными пространствами).

Условие Iв эквивалентно одновременному выполнению следующих условий:

Iв′. Существует элемент $0\in\Omega$ такой, что для всех u $u+0=u$;

Iв″. Для каждого $u\in\Omega$ существует противоположный элемент $-u$ такой, что $u+$ $+(-u)=0$.

Упражнение 1.1. Доказать эквивалентность условия Iв совокупности условий Iв′ и Iв″.

Упражнение 1.2. Доказать, что из сформулированных аксиом следует: $0 \cdot u = 0$, $(-1)\,u = -u$.

Подмножество X в Ω называется *линейным подпространством*, если оно само является линейным пространством относительно линейных операций (сложения и умножения на скаляры), заимствованных из X. Если X — линейное подпространство в Ω, то в Ω можно ввести отношение эквивалентности, объявляя два вектора $u, v \in \Omega$ эквивалентными, если $u - v \in X$. Таким образом, класс эквивалентности элемента $u \in \Omega$ есть подмножество $\dot{u} = u + X \equiv \{u + v\colon v \in X\}$ в Ω. Множество классов эквивалентности называется *фактор-пространством* пространства Ω по модулю подпространства X и обозначается посредством Ω/X. Нетрудно видеть, что это — линейное пространство, если определить линейные операции посредством $(u+v)^{\cdot} = \dot{u} + \dot{v}$, $(\lambda u)^{\cdot} = \lambda \dot{u}$.

Для произвольного множества X в Ω имеется наименьшее линейное подпространство в Ω, содержащее X; оно называется *линейной оболочкой* множества X (или линейным подпространством, натянутым на X) и состоит из всевозможных линейных комбинаций элементов из X, т. е. из векторов вида $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$, где λ_j — произвольные скаляры, а $u_j \in X$. Если равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = 0$ возможно только, когда все λ_j равны нулю, то векторы из X называются *линейно независимыми*. Пространство Ω, в котором любое множество линейно независимых векторов конечно, называется конечномерным, а всякое такое максимальное множество называется *базисом* в Ω. Если базис состоит из n элементов, пространство Ω называется n-мерным.

Фундаментальными понятиями теории линейных пространств являются линейные функционалы и линейные операторы. Вообще, *функционалом* на линейном пространстве Ω называют (обычно числовую) функцию, определенную на Ω. Функционал F называется *линейным*, если он принимает значения в поле скаляров и удовлетворяет условию линейности

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v), \tag{1.1}$$

где λ, μ — произвольные скаляры, u, $v \in \Omega$. (Значение $F(u)$ линейного функционала на элементе F иногда записывают в виде $(F,\, u)$ или $\langle F,\, u\rangle$.)

Пусть Ω_1 и Ω_2 — два линейных пространства над одним и тем же полем скаляров; *линейным оператором* из Ω_1 в Ω_2 называют функцию, скажем, $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, определенную на Ω_1 со значениями в Ω_2 и удовлетворяющую условию линейности типа (1.1). Значение $T(u)$ линейного оператора на элементе u обычно записывают в виде Tu. Если $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, то T называется линейным оператором в Ω. Если $T(\Omega_1) = \Omega_2$ (т. е. если образ Ω_1 совпадает с Ω_2), то T называется оператором из Ω_1 на Ω_2. Взаимно однозначное линейное отображение Ω_1 на Ω_2 называется *изоморфизмом* линейных пространств (изоморфизм Ω на себя называется *линейным преобразованием* Ω).

Линейный функционал есть частный случай оператора, когда Ω_2 есть поле скаляров. Другим важным примером линейного оператора является *естественная проекция* $J\colon \Omega \to \Omega/X$, сопоставляющая вектору $u \in \Omega$ его класс эквивалентности $\dot{u} = u + X$.

В случае, когда Ω_1 и Ω_2 — комплексные линейные пространства, употребительно также понятие *антилинейного оператора*; это функция $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, удовлетворяющая условию антилинейности

$$T(\lambda u + \mu v) = \bar{\lambda} T(u) + \bar{\mu} T(v) \tag{1.2}$$

при всех $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$, $u, v \in \Omega_1$. Примером антилинейного оператора служит операция комплексного сопряжения в $\boldsymbol{C}^n$: $(Tu)_i = \bar{u}_i$.

Существует теорема о продолжении линейного функционала, согласно которой всякий линейный функционал F_0, заданный на линейном подпространстве X, может быть продолжен до линейного функционала F на всем пространстве Ω.

Доказывается теорема посредством леммы Цорна — своеобразного заменителя «трансфинитной индукции». Ввиду дальнейших ссылок мы приведем ее здесь в форме, удобной для применений. (Различные формулировки и обсуждение леммы Цорна можно найти в [K14], § 1.5.)

Лемма 1.1 (Цорна). *Пусть $\mathscr{A}$ есть некоторое семейство подмножеств некоторого множества A, обладающее тем свойством, что объединение любой цепи подмножеств из семейства $\mathscr{A}$ содержится в некотором подмножестве из $\mathscr{A}$. Тогда в семействе $\mathscr{A}$ имеется максимальное подмножество.*

При этом подсемейство семейства $\mathscr{A}$ подмножеств называется *цепью*, если любые два его элемента U, V связаны либо соотношением $U \subset V$, либо $V \subset U$. Подмножество U семейства $\mathscr{A}$ называется *максимальным*, если из условий $U \subset V$ для множества V из семейства $\mathscr{A}$ следует $U = V$.

Упражнение 1.3. (а) Доказать теорему о продолжении линейного функционала. (Указание: в качестве множества A в лемме Цорна взять $\Omega \times K$, где $K = \boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$ есть поле скаляров; в качестве семейства $\mathscr{A}$ подмножеств в A рассмотреть множество графиков линейных функционалов F, определенных на линейных подпространствах в Ω, содержащих X и совпадающих с F_0 на X.)

(б) Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — линейно независимые векторы в Ω. Доказать, что существуют n линейных функционалов $f_1, \ldots, f_n$ на Ω таких, что $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). (Указание: воспользоваться теоремой о продолжении.)

Нуль-пространство линейного оператора T определяется равенством $\ker T = \{u \in \Omega_1 : Tu = 0\}$; очевидно, это линейное подпространство в Ω_1.

Упражнение 1.4. Пусть нуль-пространство линейного оператора $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ содержит линейное подпространство $X \subset \Omega_1$. Доказать, что существует единственный линейный оператор $S\colon \Omega_1/X \to \Omega_2$ такой, что $T = Sp$, где $p\colon \Omega_1 \to \Omega_1/X$ — естественная проекция. (В этом случае говорят, что оператор T опускается оператором S с Ω_1 на Ω_1/X.)

Б. Прямая сумма и тензорное произведение линейных пространств. Из имеющихся в распоряжении линейных пространств можно строить новые. Пусть $\{\Omega_\nu\}_{\nu \in N}$ есть некоторое семейство линейных пространств, различающихся индексом ν (пробегающим индексное множество N). Рассмотрим множество Ω, состоящее из всевозможных семейств $\{u_\nu\}_{\nu \in N} \equiv u$, где u_ν пробегает элементы из Ω_ν, причем для каждого такого семейства u только конечное число элементов u_ν отлично от нуля. Элемент u_ν называется ν-й проекцией (или компонентой) элемента u. В частности, в Ω имеется нулевой элемент, у которого все проекции равны нулю. Легко видеть, что Ω становится линейным пространством, если определить сумму $u + v$ и произведение $\lambda \cdot u$ на число λ в терминах проекций: $(u+v)_\nu = u_\nu + v_\nu$, $(\lambda u)_\nu = \lambda u_\nu$. Оно называется (алгебраической*) *прямой суммой* пространств Ω_ν.

Еще одним важным конструктивным приемом является тензорное умножение. Пусть имеется конечное семейство линейных пространств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Введем множество $\mathscr{F}$, состоящее из всевозможных функций f от n переменных $v_1 \in \Omega_1, \ldots$

*) Алгебраическую прямую сумму (или алгебраическое тензорное произведение) следует отличать от топологической прямой суммы (или топологического тензорного произведения; см., например, п. 1.1.Д).

$\ldots, v_n \in \Omega_n$ со значениями в поле скаляров, причем предполагается, что $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ всюду за исключением конечного числа точек $(v_1, \ldots, v_n) \in \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$. Очевидно, $\mathscr{F}$ является линейным пространством, если определить линейные операции посредством

$$(f+g)(v_1, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_n) + g(v_1, \ldots, v_n),$$
$$(\lambda f)(v_1, \ldots, v_n) = \lambda \cdot f(v_1, \ldots, v_n).$$

Любой фиксированной точке $(u_1, \ldots, u_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ сопоста́вим элемент $f_{u_1,\ldots,u_n} \in \mathscr{F}$, полагая

$$f_{u_1,\ldots,u_n}(v_1, \ldots, v_n) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (v_1, \ldots, v_n) \neq (u_1, \ldots, u_n), \\ 1, & \text{если} \quad (v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n). \end{cases}$$

Линейная оболочка элементов $f_{u_1,\ldots,u_n}$ есть все пространство $\mathscr{F}$ (более того, эти элементы образуют базис в $\mathscr{F}$). Рассмотрим линейное подпространство X в $\mathscr{F}$, натянутое на векторы вида

$$f_{u_1,\ldots,u_\nu+v_\nu,\ldots,u_n} - f_{u_1,\ldots,u_\nu,\ldots u_n} - f_{u_1,\ldots,v_\nu,\ldots,u_n},$$
$$f_{u_1,\ldots,\lambda u_\nu,\ldots,u_n} - \lambda f_{u_1,\ldots,u_\nu,\ldots,u_n},$$

где ν пробегает произвольные значения от 1 до n; $u_1, \ldots, u_j, v_j, \ldots, u_n$ — произвольные векторы из соответствующих пространств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$; λ — произвольный скаляр. Фактор-пространство $\mathscr{F}/X$ называется (алгебраическим) *тензорным произведением* линейных пространств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. В частности, класс эквивалентности $\dot{f}_{u_1,\ldots,u_n}$ элемента $f_{u_1,\ldots,u_n}$ называется тензорным произведением элементов $u_1, \ldots \ldots, u_n$ и обозначается посредством $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$.

Характеристические свойства тензорного умножения таковы.

(а) Тензорное произведение пространств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ натянуто на элементы $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$.

(б) Полилинейность:

$$u_1 \otimes \ldots \otimes (\lambda u_\nu + \mu v_\nu) \otimes \ldots \otimes u_n = \lambda u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu \otimes \ldots \otimes u_n + \mu u_1 \otimes \ldots \otimes v_\nu \otimes \ldots \otimes u_n.$$

(в) Если $v_1^{(1)}, \ldots, v_\nu^{(m_\nu)}$ — набор линейно независимых векторов в Ω_ν, то векторы $v_1^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes v_n^{i_n)}$ (где i_ν пробегает значения от 1 до m_ν) линейно независимы.

Упражнение 1.5. Доказать свойство (в) тензорного умножения. (Указание: пусть

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} \lambda_{i_1 \ldots i_n} v_1^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes v_n^{(i_n)} = 0. \tag{1.3}$$

Для доказательства, например, того, что $\lambda_{1\ldots 1} = 0$, ввести для каждого ν линейный функционал h_ν на Ω_ν такой, что $h_\nu(u_\nu^{(1)}) = 1$ и $h_\nu(u_\nu^{(j)}) = 0$ при $j > 1$. Далее на введенном выше пространстве функций $\mathscr{F}$ определим линейный функционал H посредством

$$H(f) = \sum_{v_1 \in \Omega_1} \ldots \sum_{v_n \in \Omega_n} f(v_1, \ldots, v_n)\, h_1(v_1) \ldots h_n(v_n).$$

Убедиться, что этот функционал опускается до некоторого линейного функционала h на фактор-пространстве $\mathscr{F}/X = \Omega_1 \otimes \ldots \otimes \Omega_n$, причем $h(v_1^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes v_n^{(i_n)})$ равно 1 при $i_1 = = 1, \ldots, i_n = 1$ и равно 0 при всех прочих значениях $i_1, \ldots, i_n$. Наконец, подействовать функционалом h на равенство (1.3).)

Упражнение 1.6. Пусть каждое из пространств Ω_ν конечномерно и $\{v_\nu^{(j)}\}_{j=1,\ldots,m_\nu}$ есть базис в Ω_ν. Доказать, что тогда векторы $v_1^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes v_n^{i_n)}$ образуют базис в тензорном

произведении пространств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, так что размерность тензорного произведения равна произведению размерностей пространств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$.

В. Понятие нормированного пространства. Перейдем к топологическим понятиям. Начнем с простейшего примера линейного топологического пространства — нормированного пространства. Более общий класс линейных топологических пространств (класс локально выпуклых пространств) будет введен в § 1.2.

Вещественная функция $p(u)$, заданная в Ω, называется *нормой*, если выполнены следующие условия:

(а) для любого скаляра λ $p(\lambda u) = |\lambda|\, p(u)$ (положительная однородность);

(б) $p(u+v) \leqslant p(u) + p(v)$ (неравенство треугольника, или выпуклость нормы);

(в) если $p(u) = 0$, то $u = 0$ (отделимость).

Из условий (а) и (б) следует неотрицательность нормы:

$$0 = p(u-u) \leqslant p(u) + p(-u) = 2p(u).$$

Функции, удовлетворяющие лишь условиям (а) и (б) (но, возможно, не удовлетворяющие (в)), называются *полунормами*.

Линейное пространство, в котором определена норма, называется *нормированным*. Норма элемента u иногда обозначается через $\|u\|$.

Определив расстояние между двумя элементами u, v как $d(u, v) = p(u-v)$, мы тем самым превращаем нормированное пространство в метрическое [т. е. в множество Ω, снабженное неотрицательной функцией $d(u, v)$ на $\Omega \times \Omega$, называемой *метрикой*, которая должна по определению удовлетворять условиям симметрии ($d(u, v) \equiv d(v, u)$), неравенству треугольника ($d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(v, w)$ при всех $u, v, w \in \Omega$) и отделимости ($d(u, v) = 0 \Rightarrow u = v$)]. Говорят, что последовательность $\{u_n\}$ в Ω сходится к u, если расстояние между u_n и u стремится к нулю при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$. Определенная таким образом сходимость называется *сходимостью по норме* или *сильной сходимостью*.

Упражнение 1.7. (а) Доказать непрерывность нормы, т. е. что $\|u_n\| \to \|u\|$, если $u_n \to u$ по норме при $n \to \infty$.

(б) Доказать непрерывность суммы $u+v$ по u, v, а также непрерывность произведения λu по u, λ, т. е. что $u_n + v_n \to u + v$, если $u_n \to u$, $v_n \to v$ при $n \to \infty$, и что $\lambda_n u_n \to \lambda u$, если $u_n \to u$, $\lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{u_n\}$ элементов нормированного (или метрического) пространства Ω называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ $d(u_n; u_m) < \varepsilon$ (т. е. если $\lim\limits_{\min(m,n)\to\infty} d(u_n; u_m) = 0$). (Иногда фундаментальная последовательность называется последовательностью, сходящейся в себе, или последовательностью Коши.) Нетрудно видеть, что если последовательность $\{u_n\}$ сходится к некоторому элементу $u \in \Omega$, то она фундаментальна. Обратное утверждение не всегда имеет место. Нормированное (или метрическое) пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу того же пространства, называется *полным*. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*. Справедлива теорема, согласно которой любое нормированное пространство может быть пополнено до банахова пространства (см., например, [ИЗ], п. 1.10). Банахово пространство Ω называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное множество, всюду плотное в Ω (т. е. такое, что любой элемент из Ω представляется как предел последовательности элементов из этого счетного множества).

Тривиальным примером банахова пространства является n-мерное вещественное евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$, в котором норма определяется формулой

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{1.4}$$

Другим примером (уже комплексного) банахова пространства является пространство $\mathscr{C}([a, b])$ комплексных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$p(u) = \sup_{x \in [a,b]} |u(x)|. \tag{1.5}$$

Упражнение 1.8. Доказать полноту пространства $\mathscr{C}([a, b])$.

В качестве следующего примера банахова пространства рассмотрим пространства $\mathscr{S}_{\lambda,m}(\boldsymbol{R}^n)$, играющие важную роль в теории обобщенных функций. Здесь λ, m — произвольные целые неотрицательные числа. Пространство $\mathscr{S}_{\lambda,m}(\boldsymbol{R}^n$ состоит из всех комплексных функций от n вещественных переменных $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, имеющих непрерывные частные производные до порядка m включительно и убывающих на бесконечности не медленнее, чем $|x|^{-\lambda}$. Другими словами, для функций из $\mathscr{S}_{\lambda,m}(\boldsymbol{R}^n)$ все произведения вида

$$x^\alpha D^\beta u(x) \equiv x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \tag{1.6}$$

ограничены для всех мультииндексов α и β целочисленными компонентами таким, что

$$|\alpha| \equiv \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant \lambda, \qquad |\beta| \equiv \beta_1 + \ldots + \beta_n \leqslant m. \tag{1.7}$$

Норма в пространстве $\mathscr{S}_{\lambda,m}(\boldsymbol{R}^n)$ определяется равенством

$$\|u\|_{m,\lambda,} = \max_{\substack{|\alpha| \leqslant \lambda \\ |\beta| \leqslant m}} \sup_{x \in R^n} \left| x^\alpha D^\beta u(x) \right|. \tag{1.8}$$

В следующем пункте мы рассмотрим примеры гильбертовых пространств, являющихся важным специальным случаем банаховых пространств.

Два нормированных пространства называются *изоморфными* *), если между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции и норму векторов (т. е. линейное изометрическое отображение одного пространства на другое).

Упражнение 1.9. Пусть X — замкнутое линейное подпространство банахова пространства Ω.

(а) Доказать, что X само по себе является банаховым пространством (с линейными операциями и нормой, заимствованными из Ω).

(б) Доказать, что фактор-пространство Ω/X является банаховым пространством с нормой

$$\|\dot{u}\| = \inf_{v \in X} \|u + v\| \quad \text{для всех} \quad u \in \Omega. \tag{1.9}$$

Г. Гильбертовы пространства. Функция ω, сопоставляющая каждой паре u, v комплексного линейного пространства Ω комплексное число $\omega(u, v)$, называется

*) Более общим является понятие топологического изоморфизма (нормированных) пространств (см. п. 1.3.А).

полуторалинейной формой на Ω, если $\omega(u, v)$ линейно по v и антилинейно по u, т. е. если

$$\omega(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \omega(u, v_1) + \lambda_2 \omega(u, v_2),$$

$$\omega(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \bar{\lambda}_1 \omega(u_1, v) + \bar{\lambda}_2 \omega(u_2, v)$$

для всех $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \Omega$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{C}$. Если к тому же выполнено условие эрмитовости

$$\omega(u, v) = \overline{\omega(v, u)},$$

то ω называется *эрмитовой формой*.

Выражение $\omega(u, v)$ называют *скалярным произведением* векторов $u, v \in \Omega$, если эрмитова форма *невырождена*, т. е. если из условия $\omega(u, v) = 0$ при всех $v \in \Omega$ следует $u = 0$ (другими словами, если для любого элемента $u \neq 0$ существует элемент $v \in \Omega$ такой, что $\omega(u, v) \neq 0$). Для скалярного произведения $\omega(u, v)$ используют обычно обозначение $\langle u, v\rangle$ (или $\langle u \mid v\rangle$).

Очевидно, «скалярный квадрат» $\langle u, u\rangle$ любого вектора $u \in \Omega$ есть вещественное число. Если он принимает любые вещественные значения, то Ω называется *пространством с индефинитной метрикой*.

Нас здесь интересует другой случай. Эрмитова форма ω называется *неотрицательно определенной*, если скалярный квадрат любого вектора неотрицателен:

$$\omega(u, u) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \Omega, \tag{1.10}$$

и *положительно определенной**), если в дополнение к (1.10) выполнено условие

$$\omega(u, u) = 0, \quad \text{только если} \quad u = 0. \tag{1.11}$$

Из следующего упражнения (точнее, из неравенства (1.12)) вытекает, что неотрицательно определенная форма ω является положительно определенной в точности тогда, когда она невырождена, и, значит, выражение $\omega(u, v) \equiv \langle u, v\rangle$ можно называть скалярным произведением векторов u, v. (Отсюда нетрудно вывести методом от противного, что в пространстве с индефинитной формой существует вектор $u \neq 0$, для которого $\langle u, u\rangle = 0$.)

Упражнение 1.10. Пусть ω — неотрицательно определенная эрмитова форма на Ω.

(а) Доказать, что для любых векторов $u, v \in \Omega$ справедливо неравенство (называемое неравенством Коши–Буняковского–Шварца)

$$|\omega(u, v)|^2 \leqslant \omega(u, u)\,\omega(v, v). \tag{1.12}$$

(Указание: выражение $\omega(\lambda u + v, \lambda u + v)$ неотрицательно при всех $\lambda \in \boldsymbol{C}$.)

(б) Доказать, что выражение

$$p(u) = \sqrt{\omega(u, u)} \tag{1.13}$$

есть полунорма на Ω; она является нормой в точности тогда, когда форма ω невырождена.

Пространство Ω с заданной на нем положительно определенной эрмитовой формой $\omega(u, v) = \langle u, v\rangle$ называется (комплексным) *предгильбертовым пространством*.

Из упражнения 1.10 следует, что всякое предгильбертово пространство является нормированным с нормой

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}\,. \tag{1.14}$$

При этом выполняется неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|. \tag{1.15}$$

---

*) Иногда неотрицательно определенные и положительно определенные формы называют соответственно положительно определенными и строго положительно определенными.

Полное предгильбертово пространство $\mathscr{H}$ называется *гильбертовым пространством**).

Упражнение 1.11. Доказать непрерывность по u, v скалярного произведения, т. е. что $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$, если $u_n \to u$, $v_n \to v$ по норме.

В гильбертовом (а также предгильбертовом) пространстве имеет смысл понятие ортогональности: два вектора Φ, Ψ называются ортогональными, если их скалярное произведение $\langle \Phi, \Psi\rangle$ равно нулю. Множество X гильбертова пространства $\mathscr{H}$ называется *тотальным*, если замыкание линейной оболочки множества X совпадает с $\mathscr{H}$.

Упражнение 1.12. (а) Доказать *закон параллелограмма* для нормы гильбертова пространства:

$$\|\Phi + \Psi\|^2 + \|\Phi - \Psi\|^2 = 2\|\Phi\|^2 + 2\|\Psi\|^2. \tag{1.16}$$

(б) Доказать *тождество поляризации*:

$$\langle \Phi, \Psi\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\omega = \sqrt[4]{1}} \omega \|\omega\Phi + \Psi\|^2; \tag{1.17}$$

здесь ω пробегает четыре комплексных корня из единицы (т. е. $\omega = \pm 1, \pm i$).

Тождество поляризации показывает, что скалярное произведение в гильбертовом пространстве полностью определяется нормой. Представляет интерес вопрос, какие свойства нормы выделяют гильбертовы пространства в классе всех банаховых пространств. Оказывается, закон параллелограмма является таким характеристическим свойством нормы гильбертова пространства (Иордан и фон Нейман, 1935). Другими словами, если норма в банаховом пространстве удовлетворяет закону параллелограмма, то $\mathscr{H}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением (1.17). Докажем это. Очевидно, достаточно проверить равенства

$$\langle \Phi, \Psi_1 + \Psi_2\rangle = \langle \Phi, \Psi_1\rangle + \langle \Phi, \Psi_2\rangle \quad \text{при} \quad \Phi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{H}, \tag{1.18}$$

$$\langle \Phi, \lambda\Psi\rangle = \lambda\langle \Phi, \Psi\rangle \quad \text{при} \quad \Phi, \Psi \in \mathscr{H}, \quad \lambda \in \boldsymbol{C}. \tag{1.19}$$

Из (1.17) следует:

$$4\mathrm{Re}\,\langle \Phi, \Psi_1 + \Psi_2\rangle = \|\Phi + \Psi_1 + \Psi_2\|^2 - \|\Phi - \Psi_1 - \Psi_2\|^2.$$

Преобразуем правую часть с помощью закона параллелограмма:

$$= \left(2\|\Phi + \Psi_1\|^2 + 2\|\Psi_2\|^2 - \|\Phi + \Psi_1 - \Psi_2\|^2\right) - \|\Phi - \Psi_1 - \Psi_2\|^2 \equiv$$

$$\equiv \|\Phi + \Psi_1\|^2 + \|\Phi + \Psi_1\|^2 + 2\|\Psi_2\|^2 - \left(\|\Phi + \Psi_1 - \Psi_2\|^2 + \|\Phi - \Psi_1 - \Psi_2\|^2\right) =$$

$$= \|\Phi + \Psi_1\|^2 + \left(-\|\Phi - \Psi_1\|^2 + 2\|\Phi\|^2 + 2\|\Psi_1\|^2\right) + 2\|\Psi_2\|^2 - \left(2\|\Phi - \Psi_2\|^2 + 2\|\Psi_1\|^2\right) =$$

$$= \left(\|\Phi + \Psi_1\|^2 - \|\Phi - \Psi_1\|^2\right) + \left(2\|\Phi\|^2 + 2\|\Psi_2\|^2 - 2\|\Phi - \Psi_2\|^2\right) =$$

$$= 4\mathrm{Re}\,\langle \Phi, \Psi_1\rangle + 4\mathrm{Re}\,\langle \Phi, \Psi_2\rangle.$$

Отсюда и из тождества $\mathrm{Im}\,\langle \Phi, \Psi\rangle \equiv \mathrm{Re}\,\langle i\Phi, \Psi\rangle$ следует (1.18). Для $\lambda = \sqrt[4]{1}$ (1.19) следует из (1.17), поэтому достаточно доказать (1.19) для $\lambda > 0$. Для целых $\lambda > 0$, а также для рациональных $\lambda > 0$ (1.19) следует из (1.18); для прочих $\lambda > 0$ оно вытекает из непрерывности скалярного произведения.

Упражнение 1.13. Пусть $\mathscr{H}_1$ — замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства и Φ — произвольный вектор из $\mathscr{H}$.

---

*) Мы ограничились здесь только комплексными гильбертовыми пространствами, представляющими для нас первостепенный интерес.

(а) Доказать, что существует вектор $\Phi_1 \in \mathscr{H}_1$ такой, что

$$\inf_{\Psi \in \mathscr{H}_1} \|\Phi - \Psi\| = \|\Phi - \Phi_1\|. \tag{1.20}$$

(Указание: пусть $d = \inf\limits_{\Psi \in \mathscr{H}_1} \|\Phi - \Psi\|$ и Ψ_n — последовательность в $\mathscr{H}_1$ такая, что $\|\Phi - \Psi_n\| \to d$ при $n \to \infty$. Из тождества параллелограмма (1.16), примененного к векторам $\Phi - \Psi_m$, $\Phi - \Psi_n$, заключить, что $\|\Psi_m - \Psi_n\| \to 0$ при $\min(m, n) \to \infty$, т. е., что последовательность Ψ_n фундаментальна.)

(б) Положим $\Phi_2 = \Phi - \Phi_1$. Доказать, что вектор Φ_2 ортогонален $\mathscr{H}_1$. (Указание: из (1.20) следует, что $\|\Phi_2 + \lambda\Psi_1\|^2 \geqslant \|\Phi_2\|^2$ при всех $\Psi_1 \in \mathscr{H}_1$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$.)

Ясно, что всякое замкнутое линейное подпространство $\mathscr{H}_1$ гильбертова пространства $\mathscr{H}$ само по себе является гильбертовым пространством. Множество

$$\mathscr{H}_1^{\perp} = \{\Phi \in \mathscr{H}\colon \langle \Phi, \Psi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \Psi \in \mathscr{H}_1\} \tag{1.21}$$

называется *ортогональным дополнением* подпространства $\mathscr{H}_1$.

Упражнение 1.14. Пусть $\mathscr{H}_1$ — замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

(а) Доказать, что $\mathscr{H}_1^{\perp}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathscr{H}$, причем $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_1^{\perp} = \{0\}$.

(б) Доказать, что любой вектор из $\mathscr{H}$ однозначно представим в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где $\Phi_1 \in \mathscr{H}_1$, $\Phi_2 \in \mathscr{H}_1^{\perp}$. (Указание: воспользоваться предыдущим упражнением и частью (а) настоящего упражнения.)

Результат части (б) упражнения 1.14 формулируют еще так: гильбертово пространство $\mathscr{H}$ разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_1^{\perp}$; записывают этот факт в виде

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_1^{\perp}.$$

(Ортогональное дополнение иногда называют «ортогональной разностью» и используют обозначение $\mathscr{H}_1^{\perp} = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_1$.) Входящие в разложение $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ векторы $\Phi_1 \in \mathscr{H}_1$, $\Phi_2 \in \mathscr{H}_1^{\perp}$ называют (*ортогональными*) *проекциями* вектора Φ на подпространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_1^{\perp}$.

Упражнение 1.15. (а) Доказать, что множество $X \subset \mathscr{H}$ является тотальным в точности тогда, когда множество всех векторов в $\mathscr{H}$, ортогональных X (т. е. всем векторам из X), состоит только из нуля. (Указание: применить упражнение 1.14 к замыканию линейной оболочки множества X.)

(б) Доказать, что гильбертово пространство $\mathscr{H}$ является сепарабельным в точности тогда, когда в нем существует конечное или счетное ортонормированное (т. е. ортогональное и нормированное) семейство векторов $\{e_n\}$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, которое образует тотальное множество *) в $\mathscr{H}$. (Указание: использовать процесс ортогонализации последовательности векторов.)

Тривиальным примером гильбертова пространства является n-мерное комплексное евклидово пространство $\boldsymbol{C}^n$ со скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i \Psi_i. \tag{1.22}$$

Гильбертово пространство образуют комплексные измеримые функции вещественной переменной x с интегрируемым квадратом модуля на интервале $[a, b]$. Точнее, это

*) Такое семейство векторов называется (*ортонормированным*) базисом (конечно- или счетномерного) гильбертова пространства.

есть пространство классов эквивалентных функций при условии, что эквивалентными объявляются функции, отличающиеся значениями лишь на множестве нулевой лебеговой меры. Это пространство обычно обозначается $\mathscr{L}^2([a, b])$. Скалярное произведение в нем определяется по формуле

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_a^b \overline{\Phi}(x)\, \Psi(x)\, dx. \tag{1.23}$$

Гильбертовы пространства часто получают с помощью следующей общей конструкции. Пусть на комплексном линейном пространстве Ω задана неотрицательно определенная эрмитова форма ω. Следовательно, выражение (1.13) определяет полунорму $p(u)$ на Ω. Пусть Ω_0 есть множество всех векторов нулевой полунормы в Ω, т. е. $\Omega_0 = \{u \in \Omega\colon p(u) = 0\}$. Ясно, что Ω_0 есть линейное пространство, а из неравенства (1.12) следует, что Ω_0 ортогонально всем векторам из Ω. Нетрудно видеть, что формула

$$\langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \omega(u, v) \quad \text{при всех} \quad u, v \in \Omega \tag{1.24}$$

корректно определяет положительно определенную эрмитову форму (или скалярное произведение) на фактор-пространстве Ω/Ω_0, которое тем самым превращается в предгильбертово пространство. Пополняя его, мы получаем гильбертово пространство $\mathscr{H}$ (в котором Ω/Ω_0 является всюду плотным линейным подпространством).

Д. Прямая сумма и тензорное произведение гильбертовых пространств. В п. 1.1.Б мы ввели понятия алгебраической прямой суммы и алгебраического тензорного произведения линейных пространств. В том случае, когда исходные пространства являются гильбертовыми, получающиеся пространства, вообще говоря, являются (неполными) предгильбертовыми пространствами, нуждающимися в пополнении для того, чтобы стать гильбертовыми пространствами. Рассмотрим эти конструкции подробнее.

Пусть задано семейство $\{\mathscr{H}_\nu\}_{\nu \in N}$ гильбертовых пространств $\mathscr{H}_\nu$. Введем семейства $\Phi = \{\Phi_\nu\}_{\nu \in N}$, у которых Φ_ν есть произвольный вектор из $\mathscr{H}_\nu$ при условии, что

$$\|\Phi\|^2 \equiv \sum_\nu \|\Phi_\nu\|^2 < \infty. \tag{1.25}$$

Ясно, что $\Phi_\nu \neq 0$ только для конечного или счетного множества индексов ν. Множество всех таких семейств обозначается посредством $\bigoplus\limits_{\nu \in N} \mathscr{H}_\nu$ и называется *прямой суммой гильбертовых пространств*.

Очевидно, прямая сумма наделена структурой линейного пространства с линейными операциями, выполняемыми покомпонентно. Более того, она является гильбертовым пространством, если определить скалярное произведение двух векторов Φ, Ψ формулой

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{\nu \in N} \langle \Phi_\nu, \Psi_\nu \rangle. \tag{1.26}$$

Мы предлагаем читателю убедиться, что условие полноты гильбертова пространства действительно выполнено.

Упражнение 1.16. (а) Пусть Ω есть алгебраическая прямая сумма семейства гильбертовых пространств $\{\mathscr{H}_\nu\}$. Доказать, что Ω есть всюду плотное линейное подпространство в $\bigoplus\limits_\nu \mathscr{H}_\nu$.

(б) Пусть все гильбертовы пространства $\mathscr{H}_\nu$ сепарабельны и отличны от $\{0\}$. Доказать, что их прямая сумма $\oplus\mathscr{H}_\nu$ сепарабельна в точности тогда, когда индексное множество N не более чем счетно. (Указание: воспользоваться упражнением 1.15.)

В приведенной конструкции прямой суммы исходные пространства $\mathscr{H}_\nu$ являются чем-то внешним по отношению к прямой сумме. Однако их можно естественным образом отождествить с определенными подпространствами в прямой сумме. Действительно, фиксируем некоторый индекс $\lambda \in N$ и каждому $u \in \mathscr{H}_\lambda$ сопоставим вектор Φ из прямой суммы такой, что $\Phi_\lambda = u$, а все остальные компоненты Φ_ν вектора Φ равны нулю. В результате мы получаем отображение $\mathscr{H}_\lambda \to \bigoplus\limits_\nu \mathscr{H}_\nu$, которое является изоморфизмом гильбертова пространства $\mathscr{H}_\lambda$ на замкнутое линейное подпространство $\mathscr{H}'_\lambda \subset \oplus\mathscr{H}_\nu$ (состоящее из всех векторов прямой суммы, у которых компоненты Φ_ν при $\nu \neq \lambda$ равны нулю). Если отождествить $\mathscr{H}_\lambda$ с $\mathscr{H}'_\lambda$, то мы можем заключить, что гильбертово пространство $\oplus\mathscr{H}_\nu$ является прямой суммой своих подпространств $\mathscr{H}_\nu$.

Упражнение 1.17. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ выделено семейство $\{\mathscr{H}_\nu\}$ замкнутых линейных подпространств $\mathscr{H}_\nu$. Доказать, что $\mathscr{H}$ является прямой суммой своих подпространств $\mathscr{H}_\nu$ в точности тогда, когда подпространства $\mathscr{H}_\nu$ попарно ортогональны, и в $\mathscr{H}$ не существует ненулевого вектора, ортогонального всем подпространствам $\mathscr{H}_\nu$.

Выбирая в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ ортонормированный базис, мы получаем пример разложения $\mathscr{H}$ в прямую сумму одномерных подпространств. Под таким ортонормированным базисом подразумевается всякое семейство $\{e_\nu\}_{\nu\in N}$ векторов в $\mathscr{H}$, обладающее свойствами:

1) $\langle e_\lambda, e_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$,

2) множество векторов $\{e_\nu\}_{\nu\in N}$ тотально в $\mathscr{H}$.

Отсюда легко заключить, что произвольный вектор $u \in \mathscr{H}$ однозначно представим в виде

$$\Phi = \sum_{\nu\in N} \lambda_\nu e_\nu, \tag{1.27а}$$

где

$$\lambda_\nu = \langle e_\nu, \Phi\rangle. \tag{1.27б}$$

Сумму ряда (1.27а) нужно понимать в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное подмножество индексов $M_0 \subset N$ такое, что

$$\left\|\Phi - \sum_{\mu\in M} \lambda_\nu e_\nu\right\| < \varepsilon$$

для любого конечного подмножества индексов $M \supset M_0$. Скалярное произведение двух векторов $\Phi = \sum\limits_\nu \lambda_\nu e_\nu$ и $\Psi = \sum\limits_\nu \mu_\nu e_\nu$ дается формулой

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = \sum_{\nu\in N} \bar\lambda_\mu \mu_\nu.$$

В каждом гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис $\{e_\nu\}_{\nu\in N}$, и мощность этого базиса (т. е. мощность множества индексов N) называется размерностью гильбертова пространства (см., например, [ИЗ], гл. III, п. 4).

Перейдем к тензорному произведению. Пусть Ω есть алгебраическое тензорное произведение конечного семейства гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n$. Произвольная пара Φ, Ψ векторов из Ω представима в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{M} u_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes u_n^{(i)}, \qquad \Psi = \sum_{j=1}^{N} v_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes v_n^{(j)}, \tag{1.28}$$

где $u_\nu^{(i)}$, $v_\nu^{(j)} \in \mathscr{H}_\nu$. Определим скалярное произведение этой пары векторов формулой

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \langle u_1^{(i)}, v_1^{(j)} \rangle \ldots \langle u_n^{(i)}, v_n^{(j)} \rangle. \tag{1.29}$$

Однако поскольку представления (1.28) не обладают свойством единственности, неочевидно, что правая часть (1.29) зависит только от векторов u, v и не зависит от конкретного представления (1.28). Следующее упражнение показывает, что данное определение корректно, т. е. что правая часть (1.29) не зависит от выбора представления (1.28).

Упражнение 1.18. (а) На пространстве $\mathscr{F}$ из п. 1.1.Б определим эрмитову форму, полагая

$$\omega(f, g) = \sum_{u_1, v_1 \in \Omega_1, \ldots, u_n, v_n \in \Omega_n} \overline{f(u_1, \ldots, u_n)}\, g(v_1, \ldots, v_n) \langle u_1, v_1 \rangle \ldots \langle u_n, v_n \rangle. \tag{1.30}$$

Доказать, что форма ω неотрицательно определена.

(б) Доказать, что если $f \in X$ или $g \in X$, то $\omega(f, g) = 0$. Вывести отсюда, что форму ω можно опустить на $\mathscr{F}/X = \Omega$, т. е. что существует такая форма $\widetilde{\omega}$ на Ω, что $\widetilde{\omega}(\dot{f}, \dot{g}) = \omega(f, g)$ при всех $f, g \in \mathscr{F}$. Убедиться, что форма $\widetilde{\omega}(u, v)$ совпадает с выражением $\langle u, v \rangle$, определенным формулой (1.29).

(в) Пусть вектор Φ выбран в виде (1.28) и пусть $\{e_\nu^{(j)}\}_{j=1,\ldots m_\nu}$ — ортонормированный базис в подпространстве $\mathscr{H}_\nu$, натянутом на векторы $u_\nu^{(1)}, \ldots, u_\nu^{(M)}$. Тогда Φ можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1 \ldots i_n} e_1^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes e_n^{(i_n)}.$$

Доказать формулу

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{i_1, \ldots, i_n} |\lambda_{i_1 \ldots i_n}|^2.$$

Вывести отсюда, что эрмитова форма $\langle \Phi, \Psi \rangle$ является положительно определенной.

Итак, согласно упражнению 1.18 Ω является предгильбертовым пространством со скалярным произведением (1.29). Его пополнение является гильбертовым пространством, которое называется *тензорным произведением гильбертовых пространств* $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n$ и обозначается $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$.

Упражнение 1.19. Пусть $\{e_\nu^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathscr{A}_\nu}$ есть ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_\nu$. Доказать, что векторы $e_1^{(\alpha_1)} \otimes \ldots \otimes e_n^{(\alpha_n)}$ (где α_ν пробегает $\mathscr{A}_\nu$) образуют ортонормированный базис в $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$.

Е. Линейные функционалы и сопряженные пространства. Как известно из анализа, непрерывность числового функционала на нормированном пространстве можно определять двумя эквивалентными способами — в терминах последовательностей и в терминах «$\varepsilon - \delta$».

Упражнение 1.20. Доказать, что линейный функционал F на нормированном пространстве Ω непрерывен в точности тогда, когда существует константа $c \geqslant 0$ (зависящая от F) такая, что

$$|F(u)| \leqslant c\|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \Omega. \tag{1.31}$$

Таким образом, для непрерывного линейного функционала на нормированном пространстве определена величина

$$p'(F) = \sup_{u\in\Omega,\, \|u\|\leqslant 1} |F(u)|. \tag{1.32}$$

Непрерывные линейные функционалы на нормированном пространстве называют также *ограниченными линейными функционалами*. (Как правило, мы будем иметь дело с такими функционалами и иногда именовать их для краткости просто линейными функционалами.) Совокупность всех непрерывных линейных функционалов на нормированном пространстве Ω называется сопряженным пространством и обозначается Ω' (иногда используют обозначение Ω^*). Это — нормированное пространство, в котором норма (обозначаемая также $\|F\|$) определена формулой (1.32).

Упражнение 1.21. Доказать, что пространство, сопряженное нормированному пространству, является банаховым пространством.

Рассмотрим несколько примеров сопряженных пространств.

1) Пространство $\mathscr{C}'([a, b])$, сопряженное пространству $\mathscr{C}([a, b])$, определенному в п. 1.1.B, состоит из функционалов вида интеграла Стилтьеса

$$F(u) = \int_a^b u(x)\, d\varphi(x), \tag{1.33}$$

где $\varphi(x)$ — (комплексная) функция с ограниченным изменением (см. [K11], гл. VI, § 6, теорема $4'$ — теорема Рисса). Норма функционала равна полной вариации функции φ:

$$p'(F) = V_a^b \varphi(x) \equiv \sup_k \sup_{a=x_0<x_1<\ldots<x_k=b} \sum_{j=0}^{k-1} |\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)|. \tag{1.34}$$

При этом функция $\varphi(x)$ выбирается равной нулю при $x = a$ и непрерывной справа на интервале (a, b). Линейный функционал $F \in \mathscr{C}'([a, b])$ называется положительным, если для любой неотрицательной функции $u \in \mathscr{C}([a, b])$ $F(u) \geqslant 0$. Ф. Риссу принадлежит также теорема о том, что любой положительный функционал на $\mathscr{C}([a, b])$ представим в виде (1.33) с неотрицательной монотонно неубывающей функцией φ. В дальнейшем мы будем пользоваться также многомерным обобщением теоремы Рисса: пусть $\mathscr{C}(K)$ — пространство комплексных непрерывных функций на компактном подмножестве $K \subset \boldsymbol{R}^n$; тогда пространство $\mathscr{C}(K)$, сопряженное $\mathscr{C}(K)$, состоит из функционалов вида

$$F(u) = \int u(x)\, d\mu(x), \tag{1.35}$$

где μ — произвольная (комплексная борелева) мера на K (см., например, [K2], гл. VI, § 3).

2) Пространство $\mathscr{H}'$, сопряженное гильбертову пространству, состоит из функционалов вида

$$F(\Phi) = \langle \Psi, \Phi \rangle, \tag{1.36}$$

где $\Psi \in \mathscr{H}$ (теорема Рисса; см., например, [K2], гл. V, § 3). Нетрудно убедиться, что норма функционала F равна норме соответствующего вектора

$$\Psi\colon p'(F) = \|v\|.$$

Таким образом, формула (1.36) устанавливает взаимно однозначное антилинейное отображение пространства $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$, сохраняющее норму *).

Важную роль в теории сопряженных пространств играет теорема Хана–Банаха о продолжении линейного функционала.

Теорема 1.2 (Хана–Банаха). *Пусть Ω — нормированное пространство с нормой p и F_0 — непрерывный линейный функционал, заданный на некотором линейном подпространстве $\Omega_0 \subset \Omega$. Тогда существует непрерывный линейный функционал F, заданный на всем пространстве Ω, такой, что $F(u) = F_0(u)$ при $u \in \Omega_0$ и $p'(F) = p'(F_0)$.*

Доказательство (существенно использующее лемму Цорна) и различные применения этой теоремы см., например, в [K2], гл. II, § 4.

Из теоремы Хана–Банаха следует существование нетривиального (т. е. не равного тождественно нулю) непрерывного линейного функционала на любом нормированном пространстве Ω, отличном от $\{0\}$. Достаточно задать произвольное ненулевое значение функционала F на некотором элементе $u \in \Omega$, $u \neq 0$, скажем, $F(u) = \|u\|$; тогда на одномерном линейном подпространстве Ω_0, натянутом на u, будет задан линейный функционал F_0 $(F_0(\lambda u) = \lambda\|\boldsymbol{u}\|)$ и по сформулированной теореме функционал F_0 может быть продолжен (как линейный непрерывный функционал) на все пространство Ω (причем F можно выбрать так, что $\|F\| = 1$).

В действительности из этого рассуждения можно извлечь далеко идущие выводы. Будем говорить, что данное множество S линейных функционалов на линейном пространстве Ω *разделяет* элементы из Ω, если из условия $F(u_1) = F(u_2)$ для всех $F \in S$ следует $u_1 = u_2$.

Упражнение 1.22. Доказать, что пространство, сопряженное нормированному пространству Ω, разделяет элементы из Ω.

Пространство $\Omega'' \equiv (\Omega')'$, сопряженное Ω', называется *вторым сопряженным* нормированному пространству Ω. Это — банахово пространство с нормой p''. Пространство Ω можно всегда рассматривать как линейное подпространство в Ω'' (с нормой, заимствованной из Ω'').

Упражнение 1.23. Сопоставим произвольному элементу $u \in \Omega$ функционал $\sigma(u)$ над Ω' по формуле $\sigma(u)(F) = F(u)$, $F \in \Omega'$. Доказать, что построенное отображение σ: $\Omega \to \Omega''$ является линейным изометрическим отображением.

Итак, мы можем отождествить Ω с подпространством в Ω'' посредством отображения σ (из упражнения 1.23). Если $\Omega = \Omega''$, т. е. если это отображение σ является изоморфизмом, то пространство Ω называется *рефлексивным*.

Пространство $\mathscr{C}([a, b])$ из примера 1) является нерефлексивным, в то время как всякое гильбертово пространство рефлексивно.

1.2. Локально выпуклые пространства

А. Эквивалентные системы полунорм. Структура ЛВП. Наряду с нормированными пространствами важную роль для приложений играют более общие классы линейных пространств со сходимостью. Из них ближайшими обобщениями нормированных пространств являются так называемые пространства Фреше, или F-пространства, ознакомление с которыми составляет цель настоящего параграфа.

*) В терминологии Дирака при этом «кет-векторы» (т. е. элементы из $\mathscr{H}$) переходят в «бра-векторы» (элементы из $\mathscr{H}'$).

Пусть Ω — линейное пространство (для определенности комплексное). Для оценки степени близости произвольного вектора $u \in \Omega$ к нулю фиксируют некоторое семейство полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ на Ω; здесь α — индекс, различающий полунормы и пробегающий значения в некотором (конечном или бесконечном) множестве $\mathscr{A}$. Говорят, что система полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ на Ω *подчинена* системе полунорм $\{q_\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}}$ на Ω, если для любого $\alpha \in \mathscr{A}$ существуют конечное множество индексов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ из $\mathscr{B}$ и число $c \geqslant 0$ такие, что $p_\alpha \leqslant c \sup\limits_{j=1,\ldots,k} q_{\beta_j}$.

Величина, стоящая в правой части последнего неравенства, является полунормой на Ω согласно следующему упражнению.

Упражнение 1.24. Пусть $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ — некоторая система полунорм на Ω такая, что величина $p(u) = \sup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} p_\alpha(u)$ конечна для всех $u \in \Omega$. Доказать, что функция p есть полунорма на Ω.

Две системы полунорм на Ω называются *эквивалентными*, если каждая из этих систем подчинена другой. Линейное пространство Ω, наделенное системой полунорм $\{p_\alpha\}$, называется *локально выпуклым пространством* (сокращенно ЛВП), причем по определению две различные системы полунорм определяют на Ω одну и ту же структуру ЛВП в точности тогда, когда они эквивалентны*). Фиксированную систему полунорм на Ω, задающую структуру ЛВП, мы будем называть *определяющей системой полунорм*, а для ЛВП Ω будем применять также более подробную запись $(\Omega, \{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}})$, содержащую указание на определяющую систему полунорм.

Определяющую систему полунорм на ЛВП можно без всякого ущерба заменить эквивалентной системой. Благодаря этому мы можем (и будем) впредь считать, что определяющая система $\{p_\alpha\}$ полунорм удовлетворяет условию: любая ее конечная подсистема подчинена некоторой полунорме данной системы. (Если это условие не выполнено, то мы заменяем исходную систему эквивалентной системой полунорм $p_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \sup\limits_{j=1,\ldots,k} p_{\alpha_j}$; здесь k пробегает все натуральные числа, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ пробегают все индексы из $\mathscr{A}$). Данное соглашение, не ограничивая общности, имеет своей целью упростить ряд формулировок. (Так, пришлось бы соотношения типа (1.37), (1.43) — см. ниже — заменить более громоздкими.)

ЛВП $(\Omega, \{p_\alpha\})$ называется *отделимым*, если из условия $p_\alpha(u - v) = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{A}$ следует $u = v$, т.е. если для любого ненулевого вектора $u \in \Omega$ существует индекс $\alpha \in \mathscr{A}$ такой, что $p_\alpha(u) > 0$. (В частности, ЛВП $(\Omega, \{p_\alpha\})$ отделимо, если хотя бы одна из полунорм p_α является нормой.) В отделимом ЛВП можно определить понятие предела подобно тому, как это сделано для нормированных пространств. Именно, последовательность u_k в Ω сходится к элементу $u \in \Omega$ $\big(u_k \to u$ или $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k\big)$, если

$$\lim_{k\to\infty} p_\alpha(u_k - u) = 0 \quad \text{при любом} \quad \alpha \in \mathscr{A};$$

этим условием предельный элемент u определен однозначно (благодаря отделимости).

Впредь мы будем предполагать (не оговаривая это особо), что все рассматриваемые ЛВП отделимы.

Если X — линейное пространство в ЛВП $(\Omega, \{p_\alpha\})$, то сужения полунорм p_α на X определяют на X структуру ЛВП, называемую *индуцированной* (из Ω).

---

*) Из дальнейшего станет ясно, что структуры ЛВП совпадают в точности тогда, когда совпадают определяемые ими топологии.

На произвольное ЛВП легко перенести все топологические понятия, безусловно, хорошо известные читателю в контексте евклидовых пространств. Так, аналогом открытых шаров в нуле (соответственно в точке $u \in \Omega$) служат множества

$$V_\alpha^\varepsilon = \{v \in \Omega \colon p_\alpha(v) < \varepsilon\} \tag{1.37}$$

(соответственно $u + V_\alpha^\varepsilon$), сопоставляемые каждому индексу $\alpha \in \mathscr{A}$ и числу $\varepsilon > 0$. Множество X в Ω называется *открытым* (в Ω), если любая точка $u \in X$ входит в X вместе с множеством вида $u + V_\alpha^\varepsilon$ (при некоторых $\alpha \in \mathscr{A}$, $\varepsilon > 0$). Дополнение к открытому множеству в Ω называется *замкнутым множеством* (в Ω). *Замыкание* множества X в Ω есть наименьшее замкнутое множество, содержащее X; оно обозначается посредством $\overline{X}$. *Окрестностью* (открытой) точки $u \in \Omega$ называют всякое открытое множество, содержащее эту точку. Говорят, что множество $X \subset \Omega$ *плотно* в множестве $Y \subset \Omega$, если $X \subset Y$ и $\overline{X} \supset Y$. (Последнее включение эквивалентно тому, что любая окрестность любой точки из Y имеет непустое пересечение с X.)

Сказанное можно резюмировать так: на всяком ЛВП канонически определена топология.

Б. Пространства Фреше. Следует заметить, что в случае нормированных (и, в частности, евклидовых) пространств понятия замкнутости и замыкания допускают переформулировки в терминах последовательностей (т. е. секвенциальные характеристики). А именно, замкнутость множества X в нормированном пространстве Ω означает, что X содержит пределы всех сходящихся в Ω последовательностей точек из X, а соотношение $\overline{X} = Y$ означает, что Y есть множество пределов всевозможных сходящихся в Ω последовательностей точек из X.

Для перехода к таким характеристикам в ЛВП $(\Omega, \{p_\alpha\})$ следует наложить условие: из множества окрестностей нуля V_α^ε можно выбрать семейство $\{V_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, образующее счетный базис окрестностей нуля. (Подобный базис характеризуется тем, что всякое V_α^ε содержит хотя бы одно множество $V_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$ выбранной системы.) Как и в случае нормированных пространств, существование такого базиса является решающим для секвенциальных формулировок замкнутости и замыкания (а также полноты и непрерывности). В частности, это условие оказывается выполненным для всех ЛВП с конечной или счетной определяющей системой полунорм. (Случай конечного числа полунорм мы рассматриваем как частный случай счетного, так как добавление полунорм, подчиненных исходной системе, приводит к эквивалентной системе.)

Упражнение 1.25. (а) В ЛВП со счетной определяющей системой полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ существует счетный базис окрестностей нуля. (Указание: рассмотреть семейство множеств $V_\alpha^{\varepsilon_k}$, где α пробегает счетное множество индексов $\mathscr{A}$, а ε_k — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел.)

(б) Топология ЛВП Ω со счетной системой полунорм $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ совпадает с топологией на Ω, определяемой метрикой

$$d(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \frac{p_k(u-v)}{1 + p_k(u-v)}.$$

Среди ЛВП, в которых определяющая система полунорм может быть выбрана счетной, мы выделим класс пространств, представляющий наибольший интерес. Отделимое ЛВП со счетной системой полунорм называется *полным*, если всякая последовательность Коши в Ω сходится в Ω. (Аналогично случаю нормирующих пространств последовательность Коши u_k в Ω определяется тем, что при любом $\alpha \in \mathscr{A}$ $p_\alpha(u_n - u_m) \to 0$ при $\min(n, m) \to \infty$.) Отделимое полное ЛВП со счетной системой полунорм называется *F-пространством* (или *пространством Фреше*). Наше внимание будет сосредоточено в основном именно на таких пространствах.

Из метризуемости F-пространств [см. упражнение 1.25(б)] следует, что к ним применима следующая теорема.

Теорема 1.3 (теорема Бэра «о категории»). *Пересечение любого счетного семейства* $\{\mathcal{M}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *открытых подмножеств* $\mathcal{M}_k$ *полного метрического пространства* Ω, *плотных в* Ω, *плотно в* Ω.

◀ Достаточно доказать, что для любой точки $u_0 \in \Omega$ и любого $\varepsilon_0 > 0$ открытый «шар» $U_0 = \{u \in \Omega\colon d(u, u_0) < \varepsilon_0\}$ с центром в u_0 и с радиусом ε_0 имеет непустое пересечение с $\cap\, \mathcal{M}_k$. Из плотности $\mathcal{M}_1$ в Ω следует существование $u_1 \in \mathcal{M}_1 \cap U_0$. В силу открытости $\mathcal{M}_1$ u_1 входит в $\mathcal{M}_1 \cap U_0$ вместе с некоторым замкнутым шаром $\overline{U}_1$ с центром в u_1 и с радиусом ε_1 $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0)$. Продолжая этот процесс по индукции, можно доказать существование последовательности точек $u_k \in \Omega$ и монотонно убывающей последовательности чисел $\varepsilon_k \to 0$ таких, что u_k входит в $\mathcal{M}_k \cap U_{k-1}$ вместе с некоторым замкнутым шаром $\overline{U}_k$ с центром в u_k и с радиусом ε_k. По построению u_k есть последовательность Коши: $d(u_m, u_n) \to 0$ при $\min(m, n) \to \infty$. Следовательно, она имеет предел u_∞, который принадлежит $\overline{U}_{k+1}$ при любом $k \geqslant 0$. Так как по построению $\overline{U}_{k+1} \subset \mathcal{M} \cap U_k$, то u_∞ принадлежит пересечению U_0 с $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. ▶

В. Примеры. Разумеется, банаховы пространства входят в класс пространств Фреше. Приведем здесь ряд других (комплексных) пространств Фреше, которые встречаются в приложениях.

1) Пространство $\mathscr{C}(\mathcal{O})$. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество в $\boldsymbol{R}^n$. Посредством $\mathscr{C}(\mathcal{O})$ мы обозначаем пространство всех комплексных непрерывных функций в (или на) $\mathcal{O}$, снабженное системой полунорм

$$\|u\|^K = \sup_{x \in K} |u(x)|, \tag{1.38}$$

где K пробегает все компакты*) в $\mathcal{O}$ (или хотя бы счетное семейство компактов, внутренности которых накрывают $\mathcal{O}$). В этом примере можно на самом деле допустить в качестве $\mathcal{O}$ произвольное локально компактное множество**) в $\boldsymbol{R}^n$.

2) Пространство $\mathscr{E}(\mathcal{O})$. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество в $\boldsymbol{R}^n$. Посредством $\mathscr{E}(\mathcal{O})$ обозначают пространство всех комплексных бесконечно дифференцируемых (сокращенно $\mathscr{C}^\infty$) функций на $\mathcal{O}$. Для частных производных функции $u \in \mathscr{E}(\mathcal{O})$ будем использовать обозначения

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\, u(x), \tag{1.39}$$

где $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ есть упорядоченный набор n целых неотрицательных чисел (называемый *n-индексом* или *мультииндексом*), причем при $\alpha = (0, \ldots, 0)$ $D^\alpha u(x) \equiv u(x)$. Порядок производной D^α обозначается через

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \tag{1.40}$$

Снабдим теперь $\mathscr{E}(\mathcal{O})$ системой полунорм

---

*) *Компактом* в $\mathcal{O}$ называется всякое множество $K \subset \mathcal{O}$ такое, что любая последовательность точек из K обладает сходящейся подпоследовательностью с пределом в K. (Эквивалентно, K можно определить как ограниченное замкнутое (в $\boldsymbol{R}^n$) подмножество в $\mathcal{O}$.)

**) Множество Γ евклидова пространства *локально компактно*, если для любой точки $\gamma \in \Gamma$ множество $\{y \in \Gamma\colon \|y - \gamma\| \leqslant \rho\}$ компактно хотя бы при одном значении $\rho = \rho_0 > 0$ (а значит, и при всех $\rho \in (0, \rho_0]$). В частности, открытые и замкнутые подмножества евклидова пространства локально компактны.

$$\|u\|_{l,0}^K = \max_{|\alpha|\leqslant l} \sup_{x\in K} |D^\alpha u(x)|; \tag{1.41}$$

здесь l принимает всевозможные целые неотрицательные значения, а K пробегает компакты в $\mathcal{O}$ (или хотя бы счетное семейство компактов, внутренности которых покрывают $\mathcal{O}$).

В математическом анализе ([Ш3], гл. IV, § 8) существуют $\mathscr{C}^\infty$-вариант классической *теоремы Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации*: для произвольной комплексной $\mathscr{C}^\infty$-функции $u(x)$ на открытом множестве $\mathcal{O}$ и любого компакта $K \subset \mathcal{O}$, любых $l \in \overline{\boldsymbol{Z}}_+$ *), $\varepsilon > 0$ существует комплексная полиномиальная функция $P(x)$ на $\mathcal{O}$ (или, что то же, на $\boldsymbol{R}^n$) такая, что $\|u - P\|_{l,0}^K < \varepsilon$. Другими словами, комплексные полиномиальные функции на $\mathcal{O}$ образуют всюду плотное линейное подпространство в пространстве $\mathscr{E}(\mathcal{O})$.

3) Пространство $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$. Пусть $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ есть пространство тех комплексных $\mathscr{C}^\infty$-функций в $\boldsymbol{R}^n$, для которых все выражения

$$\|u\|_{l,m} = \max_{|\alpha|\leqslant l} \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n} (1+|x|)^m \cdot |D^\alpha u(x)| \tag{1.42}$$

конечны при всех целых неотрицательных l, m. Пространство $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$, снабженное системой полунорм $\|u\|_{l,m}$, называют *пространством быстро убывающих основных функций* в $\boldsymbol{R}^n$. Оно будет играть важную роль в дальнейшем изложении.

Упражнение 1.26. Доказать, что пространства $\mathscr{C}(\mathcal{O})$, $\mathscr{E}(\mathcal{O})$ и $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$, являются пространствами Фреше.

Упражнение 1.27. Доказать, что

(а) $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ плотно в $\mathscr{S}_{\lambda,m}(\boldsymbol{R}^n)$ при любых λ, m (см. пример в п. 1.1.B),

(б) $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ плотно в $\mathscr{E}(\boldsymbol{R}^n)$,

(в) $\mathscr{E}(\mathcal{O})$ плотно в $\mathscr{C}(\mathcal{O})$.

Отметим, что ЛВП в приведенных примерах не эквивалентны нормированным пространствам.

В качестве примера ЛВП, не являющегося F-пространством, приведем пространство $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ комплексных **) $\mathscr{C}^\infty$-функций в открытом подмножестве $\mathcal{O} \subset \boldsymbol{R}^n$, обращающихся в нуль вне некоторого компакта $K \subset \mathcal{O}$ (зависящего от функции). Топология в $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ задается несчетным набором полунорм. Каждая полунорма определяется некоторой локально-финитной ***) последовательностью бесконечно дифференцируемых функций $\{f_\alpha\}$ по формуле

$$p_{\{f_\alpha\}}(u) = \sum_\alpha \sup_{x\in\mathcal{O}} |f_\alpha(x)\, D^\alpha u(x)|.$$

Это пространство будет использоваться в дальнейшем (в п. 2.1) в контексте теории обобщенных функций.

---

*) Мы обозначаем через $\boldsymbol{Z}$ (соответственно, $\boldsymbol{Z}_+$, $\overline{\boldsymbol{Z}}_+$) множество всех целых (соответственно, целых положительных, целых неотрицательных) чисел.

**) Подмножества всех вещественных функций из $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ или из $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ обозначаются $\mathscr{S}_r(\boldsymbol{R}^n)$, $\mathscr{D}_r(\mathcal{O})$.

***) Последовательность $\{f_\alpha\}$ называется *локально-финитной*, если на любом компакте $K \subset \mathcal{O}$ отлично от нуля лишь конечное число членов этой последовательности.

1.3. Линейные операторы и линейные функционалы в пространствах Фреше

А. Непрерывные отображения ЛВП. Для функций, определенных на произвольном ЛВП Ω, имеются, вообще говоря, два несовпадающих понятия непрерывности: топологической и секвенциальной. В первом случае непрерывность отображения $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ в точке $u \in \Omega_1$ означает, что прообраз всякой окрестности точки $Tu \in \Omega_2$ содержит некоторую окрестность точки Tu (непрерывность же без указания точки означает непрерывность во всех точках). Отсюда легко получаем

Предложение 1.4. *Линейное отображение T из ЛВП $(\Omega_1, \{p_\alpha\})$ в ЛВП $(\Omega_2, \{q_\beta\})$ непрерывно в точности тогда, когда для любого $\alpha \in \mathscr{A}$ существуют $\beta \in \mathscr{B}$ и $c \geqslant 0$ такие, что*

$$q_\beta(Tu) \leqslant c p_\alpha(u) \quad \textit{при всех} \quad u \in \Omega_1. \tag{1.43}$$

В частности, в случае нормированных пространств $(\Omega_1, \|\cdot\|)$ и $(\Omega_2, \|\cdot\|)$ линейный оператор $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, удовлетворяющий условию $\|Tu\| \leqslant c\|u\|$ при некотором $c \geqslant 0$ и всех $u \in \Omega_1$, называется ограниченным; при этом число

$$\|T\| = \sup_{u \in \Omega_1} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \tag{1.44}$$

называется нормой оператора T. Из предложения 1.4 следует, таким образом, что для линейных операторов в нормированных пространствах понятия непрерывности и ограниченности равносильны.

Секвенциальная непрерывность оператора T означает, что для любой сходящейся последовательности $u_k \to u$ в Ω_1 имеет место сходимость $Tu_k \to Tu$ в Ω_2. С помощью стандартного рассуждения из вещественного анализа нетрудно убедиться в эквивалентности этих понятий, если ограничить рассмотрение F-пространствами (обладающими счетным базисом окрестностей нуля). Добавляя условие линейности отображения T, мы легко приходим к следующему утверждению (позволяющему, в частности, отождествить секвенциальную непрерывность в F-пространствах с непрерывностью).

Предложение 1.5. *Для линейного отображения T из F-пространства $(\Omega_1, \{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}})$ в F-пространство $(\Omega_2, \{q_\beta\}_{\beta \in \mathscr{B}})$ следующие свойства эквивалентны*:

1) *T секвенциально непрерывно*;
2) *T секвенциально непрерывно в нуле*;
3) *T непрерывно*;
4) *T непрерывно в нуле*;
5) *для любого индекса $\beta \in \mathscr{B}$ существуют индекс $\alpha \in \mathscr{A}$ и число $c \geqslant 0$, удовлетворяющие* (1.43).

Если ЛВП Ω_1 содержится в ЛВП Ω_2 и отображение вложения (сопоставляющее элементу $u \in \Omega_1$ тот же элемент u и рассматриваемое как отображение из Ω_1 в Ω_2) непрерывно, то будем говорить, что топология Ω_1 мажорирует топологию, индуцированную из Ω_2.

Упражнение 1.28. Пусть $(\Omega_1, \{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}})$ и $(\Omega_2, \{q_\beta\}_{\beta \in \mathscr{B}})$ — два F-пространства, $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Доказать, что топология Ω_1 мажорирует топологию, индуцированную из Ω_2, в точности тогда, когда сужение на Ω_1 системы полунорм $\{q_\beta\}$ подчинено системе полунорм $\{p_\alpha\}$.

Упражнение 1.29. Доказать, что полунорма p на ЛВП $(\Omega, \{p_\alpha\})$ непрерывна в точности тогда, когда она подчинена определяющей системе полунорм $\{p_\alpha\}$.

Упражнение 1.30. (а) Доказать, что сумма $u+v$ пары векторов u, v из ЛВП Ω (секвенциально) непрерывна по совокупности переменных u, v.

(б) Доказать, что произведение λu (где $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $u \in \Omega$) непрерывно по совокупности переменных λ, u.

В следующем упражнении рассмотрена конструкция топологии на фактор-пространстве F-пространства (ср. с аналогичным упражнением 1.9 для банаховых пространств).

Упражнение 1.31. Пусть X — замкнутое линейное подпространство F-пространства $(\Omega, \{p_k\})$; для определенности будем считать, что последовательность полунорм p_k на Ω не убывает с ростом k. Доказать, что фактор-пространство Ω/X является F-пространством с системой полунорм p_k, определенных равенством

$$\dot{p}_k(\dot{u}) = \inf_{v\in X} p_k(u+v), \qquad \dot{u} \in \Omega/X. \tag{1.45}$$

Определенную таким образом систему полунорм $\{\dot{p}_k\}$ называют *структурой ЛВП* на Ω/X, *индуцированную* структурой ЛВП на Ω. Нетрудно видеть, что естественная проекция $J\colon \Omega \to \Omega/X$ непрерывна *); она также является *открытым отображением* (т.е. образ любого открытого множества в Ω является открытым множеством в Ω/X). Этому результату можно придать следующий более общий вид.

Упражнение 1.32. Пусть T — линейный непрерывный оператор из F-пространства $(\Omega_1, \{p_k\})$ на ЛВП $(\Omega_2, \{q_k\})$. Определим на Ω_2 новую систему полунорм $\{p_k^T\}$ (называемую *индуктивной структурой ЛВП* на Ω_2 *относительно* отображения T):

$$p_k^T(v) = \inf\{p_k(u)\colon u \in \Omega_1,\ Tu = v\}, \quad \text{где} \quad v \in \Omega_2. \tag{1.46}$$

Доказать, что отображение T открыто в точности тогда, когда системы полунорм $\{p_k^T\}$ и $\{q_k\}$ эквивалентны.

Линейное отображение $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ из ЛВП Ω_1 на ЛВП Ω_2 называется *топологическим гомоморфизмом*, если оно непрерывно и открыто. (Примером служит естественная проекция $J\colon \Omega \to \Omega/X$.)

Множество всех линейных непрерывных функционалов на ЛВП называется пространством, *сопряженным* Ω; мы будем его обозначать посредством Ω' (или Ω^*).

Упражнение 1.33. Пусть Ω_1 и Ω_2 — F-пространства, Ω_1 содержится плотно в Ω_2 и топология Ω_1 не слабее топологии, индуцированной из Ω_2. Доказать, что для сопряженных пространств справедливо обратное включение $\Omega_2' \subset \Omega_1'$ (в том смысле, что сужая на Ω_1 произвольный функционал $F_2 \in \Omega_2'$, мы получаем функционал $F_1 \in \Omega_1'$, причем отображение $F_2 \to F_1$ есть вложение, т.е. $F_1 = 0$, только если $F_2 = 0$).

Изоморфизмом (точнее, топологическим изоморфизмом) из ЛВП Ω_1 в ЛВП Ω_2 называется взаимно однозначное линейное непрерывное отображение из Ω_1 на Ω_2, обратное которому тоже непрерывно. Изоморфными называются пространства, для которых существует изоморфизм.

Упражнение 1.34. Переформулировать понятие изоморфизма F-пространств в терминах полунорм.

Отметим, что теорема 1.2 Хана–Банаха переносится на произвольные ЛВП и, в частности, на F-пространства.

---

*) Это свойство полностью определяет структуру F-пространства на фактор-пространстве Ω/X. Действительно, из теоремы 1.14 (об открытом отображении) из п. 1.3.В следует, что на Ω/X (где Ω есть F-пространство, а X — замкнутое подпространство) существует единственная структура F-пространства, при которой естественная проекция J непрерывна.

Б. Принцип равномерной ограниченности. Слабая и $*$-слабая топологии. В п. 1.3.А не использовалась полнота F-пространств. Более тонкие результаты, к которым мы теперь переходим, опираются на полноту.

Лемма 1.6. *Пусть подмножество W в ЛВП Ω выпукло и уравновешено (это означает: $\lambda W + \mu W \subset W$ для любых комплексных чисел λ, μ, таких что $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$). Если W имеет непустую внутренность, то W содержит окрестность нуля. Если дополнительно*

$$W = \{u \in \Omega\colon\ q(u) \leqslant 1\}, \tag{1.47}$$

где q — некоторая полунорма на Ω, то q непрерывна.

◄ По условию при некоторых $u_0 \in \Omega$, $\delta > 0$ и полунорме p_α из определяющей системы полунорм на Ω имеем включение

$$W \supset U = \{u \in \Omega\colon\ p_\alpha(u - u_0) \leqslant \delta\}.$$

Пусть $V = \{v \in \Omega\colon\ p_\alpha(v) \leqslant \delta\}$. Если $v \in V$, то v как полуразность элементов $u_0 \pm v$ из W принадлежит W. Значит, W содержит окрестность нуля V. Если дополнительно выполнено условие (1.47), то из включения $W \supset V$ следует $q(u) \leqslant 1$ для всех $u \in \Omega$ с $p_\alpha(u) \leqslant \delta$. Из однородности полунорм получаем $q(u) \leqslant \delta^{-1} p_\alpha(u)$ для всех $u \in \Omega$. ►

Теорема 1.7 (принцип равномерной ограниченности). *Пусть на F-пространстве $(\Omega, \{p_\alpha\})$ задана произвольная система непрерывных полунорм $\{q_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, обладающих свойствами*

$$\sup_{\beta \in \mathcal{B}} q_\beta(u) < \infty \quad \textit{для всех} \quad u \in \Omega.$$

Тогда полунорма $q(u) = \sup\limits_{\beta \in \mathcal{B}} q_\beta(u)$ также непрерывна на Ω.

◄ Множество W вида (1.47) замкнуто как пересечение замкнутых множеств

$$W_\beta = \{u \in \Omega\colon\ q_\beta(u) \leqslant 1\}.$$

Из условия теоремы следует, что Ω есть объединение счетного семейства замкнутых множеств nW ($n = 1, 2, \ldots$). Хотя бы одно nW имеет непустую внутренность. В противном случае пустое множество $\Omega \setminus \bigcup\limits_n nW$ как пересечение счетного семейства открытых плотных в Ω множеств $\Omega \setminus nW$ было бы по теореме 1.3 плотно в Ω, что есть противоречие. Доказано, что хотя бы одно nW и, значит, W имеет непустую внутренность. По лемме 1.6 q непрерывна. ►

Следствие 1.8. *Пусть последовательность T_k линейных непрерывных операторов из F-пространства Ω_1 в ЛВП Ω_2 такова, что предел $\lim\limits_{k\to\infty} T_k u$ в Ω_2 существует при любом $u \in \Omega_1$. Тогда формула $Tu = \lim\limits_{k\to\infty} T_k u$ определяет линейный непрерывный оператор из Ω_1 в Ω_2.*

Упражнение 1.35. Вывести следствие 1.8 из принципа равномерной непрерывности. (Указание: пусть r — произвольная полунорма из определяющей системы полунорм на Ω_2; применить теорему 1.7 к последовательности полунорм q_k на Ω_1, определенных посредством $q_k(u) = r(T_k u)$, $u \in \Omega_1$.)

Приведем важный частный случай следствия 1.8, когда $\Omega_2 = \boldsymbol{C}$.

Следствие 1.9. *Если последовательность F_k линейных непрерывных функционалов на F-пространстве $(\Omega, \{p_\alpha\})$ такова, что $\lim(F_k, u)$ при $k \to \infty$ существует для любого $u \in \Omega$, то линейный функционал F_∞ на Ω, равный*

$$(F_\infty, u) = \lim_{k\to\infty} (F_k, u) \quad \textit{для всех} \quad u \in \Omega, \tag{1.48}$$

непрерывен, причем существуют индекс α *и число* $c \geqslant 0$ *такие, что*

$$|(F_k, u)| \leqslant c p_\alpha(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in \Omega, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{1.49}$$

Следствие 1.9 есть некое утверждение о секвенциальной полноте пространства Ω', сопряженного F-пространству Ω. Предварительно заметим, что Ω' дает возможность снабдить Ω топологией ЛВП, отличной от исходной; она называется *слабой топологией* (или $\sigma(\Omega, \Omega')$-топологией) и определяется полунормами

$$p_{F_1,\ldots,F_n}(u) = \sup_{j=1,\ldots,n} |(F_j, u)|, \tag{1.50}$$

где n — произвольное натуральное число, а F_j пробегают Ω'. Аналогично можно снабдить Ω' топологией ЛВП, называемой $*$-*слабой* (или $\sigma(\Omega', \Omega)$) топологией и определяемой полунормами

$$p^{u_1\ldots u_n}(F) = \sup_{j=1,\ldots,n} |(F, u_j)| \tag{1.51}$$

при любых n и при $u_j \in \Omega$. Как правило, под сходимостью в Ω мы будем иметь и виду сходимость в исходной топологии Ω, в то время как сходимость в Ω' обычно понимается в $*$-слабой топологии.

Таким образом, следствие 1.9 означает, что пространство Ω, сопряженное F-пространству, секвенциально полно (в $*$-слабой топологии).

Упражнение 1.36. Доказать, что всякое рефлексивное банахово пространство секвенциально полно в слабой топологии. (Указание: воспользоваться тем, что Ω сопряжено Ω'.)

Следствие 1.10. *Если* u_k — *последовательность в* F-*пространстве* Ω, *сходящаяся к* u (*в* Ω), *и* F_k — *последовательность в сопряженном пространстве* Ω', ($*$-*слабо*) *сходящаяся к функционалу* F *в* Ω, *то*

$$(F_k, u_l) \to (F, u) \quad \textit{при} \quad \min(k, l) \to \infty.$$

Следствие 1.10 вытекает из следствия 1.9 простым применением тождества $(F, u) - (F_k, u_l) = (F - F_k, u) + (F_k, u - u_l)$.

В. Теоремы о замкнутом графике и об открытом отображении. Замечательным свойством F-пространств является возможность применения теоремы о замкнутом графике. Если под *графиком* оператора $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ понимать соответствующее подмножество прямого произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, то замкнутость графика T означает, что из соотношений $u_k \to u$ в Ω_1 и $Tu_k \to v$ в Ω_2 следует $v = Tu$. Линейность T позволяет несколько упростить это определение.

Упражнение 1.37. Доказать, что линейный оператор T из F-пространства Ω_1 в F-пространство Ω_2 имеет замкнутый график в точности тогда, когда из соотношений $u_k \to 0$ в Ω_1 и $Tu_k \to v$ в Ω_2 следует $v = 0$.

Теорема 1.11 (о замкнутом графике). *Всякий линейный оператор**) T *из* F-*пространства* Ω_1 *в* F-*пространство* Ω_2, *имеющий замкнутый график, является непрерывным.*

---

*) Мы подчеркиваем, что область определения оператора T есть все пространство Ω_1. Дело в том, что нередко приходится рассматривать линейные операторы, определенные не на всем пространстве Ω_1, а лишь на его линейных подпространствах (см. следующий параграф). К таким операторам теорема 1.11 не применима.

◀ Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетные не убывающие (по k) определяющие системы полунорм, соответственно, на Ω_1 и Ω_2. В силу замкнутости T Ω_1 является F-пространством с полунормами $r_k(u) = p_k(u) + q_k(Tu)$, где $u \in \Omega_1$. Посредством τ_1 и τ_2 обозначим две топологии на Ω_1, определяемые, соответственно, системами полунорм $\{p_k\}$ и $\{r_k\}$. Для доказательства теоремы следует убедиться в непрерывности полунорм r_k в топологии τ_1. По лемме 1.6 достаточно доказать, что при любом k множество $U(k) = \{u \in \Omega_1\colon r_k(u) \leqslant 1\}$ содержит τ_1-окрестность нуля. Пусть $W(k)$ есть τ_1-замыкание $U(k)$. Так как $\bigcup\limits_n nW(k) = \Omega_1$, то соображения в доказательстве теоремы 1.7 показывают, что $W(k)$ имеет непустую τ_1-внутренность. По лемме 1.6 $W(k)$ содержит τ_1-окрестность нуля $V(k)$. Пусть $V(k) = \{u \in \Omega_1\colon p_{j(k)}(u) \leqslant \delta_k\}$, где $j(k)$ — возрастающая последовательность в $\boldsymbol{Z}_+$ и $0 < \delta_k \leqslant 1$. Если доказать, что

$$2U(k) \supset W(k), \tag{1.52}$$

то это завершит доказательство теоремы. Пусть k фиксировано, $u \in W(k)$. Тогда существует $u_0 \in U(k)$, такое что $u - u_0 \in 2^{-1}V(k+1) \subset 2^{-1}W(k+1)$. Индукцией по n выберем элемент $u_n \in 2^{-n-1}U(k+n)$, такой что

$$(u - u_0 - \ldots - u_{n-1}) - u_n \in 2^{-n-1}V(k+n+1) \subset 2^{-n-1}W(k+n+1). \tag{1.53}$$

В силу (1.53) $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$ при $n \to \infty$ имеет предел u в топологии τ_1. Так как $u_n \in 2^{-n-1}U(k+n)$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$ при $n \to \infty$ имеет некий предел $v \in \Omega_1$ в топологии τ_2, причем

$$r_k(v) \leqslant \sum_n r_k(u_n) \leqslant \sum_n r_{k+n}(u_n) \leqslant 2,$$

так что $v \in 2U(k)$. Остается заметить, что $u = v$, так как из τ_2-сходимости следует τ_1-сходимость. Поэтому $u \in 2U(k)$, что доказывает (1.52). ▶

Теорема о замкнутом графике обычно применяется в следующем контексте.

Следствие 1.12. *Пусть $T\colon \Omega_1 \to X$ есть линейный (секвенциально) непрерывный оператор из F-пространства Ω_1 в ЛВП*) X, причем T принимает значения в линейном подпространстве $\Omega_2 \subset X$. Пусть Ω_2 само является F-пространством с топологией, мажорирующей топологию, индуцированную на Ω_2 из X. Тогда T, рассматриваемый как оператор из F-пространства Ω_1 в F-пространство Ω_2, непрерывен.*

Следствие 1.13. *Пусть на линейном пространстве Ω заданы две структуры F-пространства с определяющими системами полунорм $\{p_\alpha\}$ и $\{q_\beta\}$ и пусть первая из этих систем подчинена второй. Тогда обе системы полунорм эквивалентны.*

Действительно, тождественное отображение $J\colon (\Omega, \{p_\alpha\}) \to (\Omega, \{q_\beta\})$ такое, что $Ju = u$ непрерывно (согласно условию). Значит, оно имеет замкнутый график, а это, очевидно, эквивалентно тому, что обратное отображение J^{-1} имеет замкнутый график. По теореме 1.11 отсюда следует, что J^{-1} — непрерывный оператор, т. е. что вторая система полунорм подчинена первой.

К теореме о замкнутом графике примыкает другая важная теорема.

Теорема 1.14 (об открытом отображении). *Всякое линейное непрерывное отображение T из F-пространства $(\Omega_1, \{p_\alpha\})$ на (все) F-пространство $(\Omega_2, \{q_\beta\})$ является открытым**).*

---

*) Здесь существенно сделанное в п. 1.2.А предположение об отделимости топологии ЛВП.

**) Согласно упражнению 1.32 что означает, что система полунорм $\{q_\beta\}$ на Ω_2 эквивалентна индуктивной системе полунорм $\{p_\alpha^T\}$ относительно отображения T.

◄ Согласно упражнению 1.32 система полунорм $\{p_\alpha^T\}$ на Ω_2 определяет на Ω_2 некоторую структуру F-пространства, причем из непрерывности отображения T следует, что эта система полунорм $\{q_\beta\}$ подчинена системе $\{p_\alpha^T\}$. С помощью следствия 1.13 отсюда получаем, что системы полунорм $\{p_\alpha^T\}$ и q_β эквивалентны. ►

Упражнение 1.38. Пусть T — линейный непрерывный оператор из F-пространства Ω_1 на F-пространство Ω_2. Доказать, что для любой сходящейся к нулю последовательности v_k в Ω_1 существует сходящаяся к нулю последовательность u_k в Ω_2 такая, что $v_k = Tu_k$.

Важное применение теоремы 1.14 состоит в том, что она позволяет соотнести пространство Ω_2' с Ω_1'. Введем соответствующие понятия. Если X — линейное многообразие в ЛВП Ω, то множество

$$X^0 = \{F \in \Omega' \colon (F, u) = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in X\} \tag{1.54}$$

называется *ортогональным подпространством* (или *полярой*) к X в Ω'. Мы будем считать, что X^0 наделено сходимостью, индуцированной из Ω' в том смысле, что $F_k \to F$ в X^0 эквивалентно условию $(F_k, u) \to (F, u)$ для всех $u \in \Omega$. Напомним, что через $\ker T$ мы обозначаем нуль-пространство линейного оператора T: $\Omega_1 \to \Omega_2$ (если T непрерывно, то $\ker T$ — замкнутое линейное подпространство в Ω_1).

Пусть T есть линейный непрерывный оператор из Ω_1 в Ω_2; *сопряженным* ему называют оператор T', сопоставляющий функционалу $G \in \Omega_2'$ функционал $T'G \in \Omega_1'$ по правилу $(T'G, u) = (G, Tu)$ для всех $u \in \Omega_1$. (Как легко видеть, если $G_k \to G$ в Ω_2', то $T'G_k \to T'G$ в Ω_1'.) Нетрудно убедиться, что образ Ω_2 при отображении T' всегда содержится в $(\ker T)^0$. Более сильное утверждение, сформулированное в упражнении 1.39, получается применением результата предыдущего упражнения.

Упражнение 1.39. Пусть T есть линейный непрерывный оператор из F-пространства Ω_1 на F-пространство Ω_2; тогда T' есть изоморфизм (т. е. линейное взаимно однозначное соответствие, сохраняющее сходимость) Ω_2' на $(\ker T)^0$. (Указание: при любом заданном $F \in (\ker T)^0$ функционал $G \in \Omega_2'$, удовлетворяющий соотношению $F = T'G$, можно определить по формуле $(G, v) = (F, u)$, где $u \in \Omega_1$ таково, что $Tu = v$.)

1.4. Операторы в гильбертовом пространстве

А. Понятие (неограниченного) самосопряженного оператора. Мы будем рассматривать здесь линейные операторы A, определенные на некотором плотном в $\mathscr{H}$ линейном многообразии D_A гильбертова пространства $\mathscr{H}$, действие которых не выводит за пределы этого пространства:

$$\mathscr{H} \supset D_A \ni \Phi \to A\Phi \in \mathscr{H}. \tag{1.55}$$

Оператор A называется *ограниченным* (в D_A), если квадрат нормы

$$\|A\Phi\|^2 = \langle A\Phi, A\Phi\rangle$$

ограничен, когда $\Phi \in D_A$ и $\|\Phi\| \leqslant 1$. Верхняя грань $\|A\Phi\|$, когда Φ пробегает пересечение D_A с единичной сферой, называется *нормой оператора* A и будет обозначаться $\|A\|$:

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|\Phi\|=1 \\ \Phi \in D_A}} \|A\Phi\|. \tag{1.56}$$

В случае же, если верхняя грань в правой части (1.56) равна бесконечности, оператор A называется *неограниченным*.

Любой ограниченный оператор A с областью определения $D_A \subset \mathscr{H}$, плотной в $\mathscr{H}$, может быть распространен на все гильбертово пространство $\mathscr{H}$, оставаясь при этом

линейным и ограниченным во всем $\mathscr{H}$ с той же нормой $\|A\|$ (см. [K2], гл. IV, п. 1.1). Поэтому, без существенного ограничения общности, можно считать, что ограниченные операторы заданы всюду в $\mathscr{H}$, и не говорить об их области определения. Однако для неограниченных операторов, которые сплошь и рядом встречаются в квантовой теории, это уже не так. Для них указание области определения весьма существенно.

Напомним, что график $\Gamma(A)$ оператора A есть множество всех пар $(\Phi,\, A\Phi)$, где $\Phi \in D_A$, $A\Phi \in \mathscr{H}$. Оператор A называется *замкнутым*, если его график есть замкнутое множество в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Согласно теореме 1.11 (о замкнутом графике) замкнутый линейный оператор, определенный на всем пространстве $\mathscr{H}$ (т. е. $D_A = \mathscr{H}$), является ограниченным. Поскольку мы будем часто иметь дело с замкнутыми неограниченными операторами (или по крайней мере с операторами, допускающими замыкание), из сформулированной теоремы ясно, что они не могут быть определены на всем пространстве $\mathscr{H}$. Самое большее, на что мы может рассчитывать, это то, что область определении D_A замкнутого неограниченного оператора A всюду плотна в $\mathscr{H}$. Будем говорить, что оператор B является *расширением оператора* A (и писать $A \subset B$), если график $\Gamma(A)$ содержится в графике $\Gamma(B)$ $(\Gamma(A) \subset \Gamma(B))$, т. е. если $D_A \subset D_B$ и в области D_A $A\Phi = B\Phi$.

Важность гильбертова пространства для квантовой теории заключается в том, что наличие скалярного произведения позволяет ввести понятие эрмитова оператора, соответствующего наблюдаемым величинам, так же как и понятие унитарного оператора, при помощи которого описывается симметрия физической системы. Перейдем к определению этих понятий.

Рассмотрим полуторалинейную форму $\langle\Psi,\, A\Phi\rangle (\Phi \in D_A,\ \Psi \in \mathscr{H})$. Если при некотором Ψ из $\mathscr{H}$

$$|\langle\Psi,\, A\Phi\rangle) \leqslant C(\Psi,\, A)\|\Phi\| \quad \text{при всех} \quad \Phi \in D(A), \tag{1.57}$$

где $C(\Psi,\, A)$ — положительное число, не зависящее от Φ, то согласно теореме Рисса об общем виде линейных непрерывных функционалов в $\mathscr{H}$ (см. п. 1.1.E) существует такой элемент $\Psi_1 \in \mathscr{H}$, что

$$\langle\Psi,\, A\Phi\rangle = \langle\Psi_1,\, \Phi\rangle. \tag{1.58}$$

Так как область D_A всюду плотна в $\mathscr{H}$, то вектор Ψ_1 однозначно определяется по вектору Ψ. На таких Ψ определим (линейный) оператор A^*, называемый (*эрмитово*) *сопряженным* оператору A, по формуле $A^*\Psi = \Psi_1$. Область определения оператора A^* состоит из всех векторов $\Psi \in \mathscr{H}$, для которых выполнено (1.57).

Часто в физической литературе сопряженный оператор определяют равенством

$$\langle\Psi,\, A\Phi\rangle = \langle A^*\Psi,\, \Phi\rangle \tag{1.59}$$

(которое является следствием последних двух формул) без указания областей определения A и A^*. Эта неточность допустима, если A — ограниченный оператор, поскольку, как уже указывалось, в этом случае можно считать, что $D_A = \mathscr{H}$, и, кроме того, нетрудно видеть, что условие (1.57) выполняется при всех $\Phi \in \mathscr{H}$ (с $C(\Psi,\, A) = \|\Psi\| \cdot \|A\|$), так что сопряженный оператор действительно существует и определен во всем $\mathscr{H}$.

В общем случае неограниченных операторов сопряженный оператор не всегда существует*). Необходимое и достаточное условие существования у оператора A сопряженного оператора состоит в том, чтобы A имел замыкание в $\mathscr{H}$ (см. [A6], п. 44). Это означает, что если $\{\Phi_n\}$ — сходящаяся последовательность векторов из D_A, то последовательность $\{A\Phi_n\}$ либо сходится, либо вообще не имеет точек

*) Если D_{A^*} плотно в $\mathscr{H}$, то мы говорим, что сопряженный оператор A^* существует.

сгущения в $\mathscr{H}$ (исключается возможность того, что две подпоследовательности последовательности $\{A\Phi_n\}$ стремятся к различным пределам в $\mathscr{H}$). В этом случае замыкание (т. е. наименьшее замкнутое расширение) оператора A равно A^{**}.

Оператор A называется *симметрическим* (в физической литературе — *эрмитовым*), если $A \subset A^*$, т. е. если

$$\langle A\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, A\Phi\rangle \quad \text{при} \quad \Phi, \Psi \in D_A. \tag{1.60}$$

Важный частный случай симметрического оператора составляют операторы A (также с плотной областью определения), обладающие свойством

$$\langle \Phi, A\Phi\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \Phi \in D_A.$$

Такие операторы называются *положительными* (иногда *положительно определенными*). Если $\langle \Phi, A\Phi\rangle > 0$ для всех ненулевых элементов $\Phi \in D_A$, то A называется *строго положительным* (или *строго положительно определенным*) оператором.

Упражнение 1.40. Доказать, что всякий положительный оператор симметричен.

Если $A = A^*$ (т. е. если к условию (1.60) добавить еще равенство областей определения D_A и D_{A^*}), то говорят, что оператор является *самосопряженным* (по терминологии фон Неймана — гипермаксимально симметричным). Оператор называется *в существенном самосопряженным*, если его замыкание является самосопряженным оператором.

Упражнение 1.41. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2([0, 1])$ есть множество функций с интегрируемым квадратом модуля на отрезке $[0, 1]$. Пусть D — множество всех абсолютно непрерывных функций на этом отрезке (см. [K11], гл. VI, § 4), производные которых принадлежат $\mathscr{H}$, а сами функции удовлетворяют условию периодичности $\psi(0) = \psi(1)$. Пусть D_0 — подмножество области D, состоящее из тех функций множества D, которые обращаются в нуль на границе интервала: $\psi(0) = \psi(1)$. Показать, что оператор

$$P = -i\,\frac{d}{dx}$$

с областью определения D является самосопряженным оператором, в то время как оператор P_0, задаваемый той же формулой, но с областью определения D_0, лишь симметричен, но не самосопряжен. Найти область определения D_0 сопряженного оператора P_0^*. Убедиться непосредственно, что оператор P неограничен.

Упражнение 1.42. Рассмотреть симметричный дифференциальный оператор

$$T = Px^3 + x^3P \qquad \left(P = -i\,\frac{d}{dx}\right)$$

в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2(\boldsymbol{R})$, заданный первоначально на плотной области $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$. Показать, что бесконечно дифференцируемая квадратично интегрируемая функция $\psi(x) = x^{-3/2}\exp(-1/4x^2)$ является собственной функцией оператора T^* с чисто мнимым собственным значением ($T^*\psi = -i\psi$).

Можно показать, что оператор T в этом примере не допускает самосопряженного расширения в $\mathscr{H}$.

Приведем один удобный для приложений критерий существенной самосопряженности симметрического оператора (Нельсон, 1959). Вначале заметим, что если $\Phi \in D_A$ и $A\Phi \in D_A$, то на таких векторах Φ определен оператор A^2: $A^2\Phi = A(A\Phi)$. По индукции можно определить оператор A^n для любого натурального n. Мы будем говорить, что вектор $\Phi \in D_A$ является *аналитическим вектором* оператора A, если $\Phi \in D_{A^n}$ для всех натуральных n и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n \Phi\| \cdot z^n$$

имеет ненулевой радиус сходимости.

Теорема 1.15 (об аналитических векторах). *Если A — симметрический оператор в гильбертовом пространстве и D_A содержит плотное в $\mathscr{H}$ множество аналитических векторов оператора A, то A является в существенном самосопряженным оператором.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [P2], т. 2, § X.6.

Б. Изометрические, унитарные и антиунитарные операторы. Линейный оператор U, определенный во всем гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и с областью значений, тоже совпадающей с $\mathscr{H}$, называется *унитарным*, если он сохраняет скалярное произведение:

$$\langle U\Phi, U\Psi\rangle = \langle \Phi, \Psi\rangle \quad \text{для всех} \quad \Phi, \Psi \in \mathscr{H}. \tag{1.61}$$

Требование, чтобы область значений оператора U совпадала с $\mathscr{H}$, существенно. Если его не накладывать, то оператор U называется *изометрическим*. Изометрический оператор характеризуется равенством $U^*U = 1$. Из этого равенства, вообще говоря, не следует, что $UU^* = 1$. Если оба равенства имеют место, то оператор U унитарен. Таким образом, унитарный оператор U имеет обратный оператор U^{-1}, который также унитарен.

Упражнение 1.43. Показать, что условие изометричности линейного оператора U в $\mathscr{H}$ эквивалентно тому, что $\|U\Phi\| = \|\Phi\|$ для всех $\Phi \in \mathscr{H}$ (так что норма изометрического оператора U равна единице). Убедиться также, что UU^* есть проектор в $\mathscr{H}$.

В этом упражнении использовано понятие проектора. Под *проектором* (точнее, ортогональным, или эрмитовым, проектором) в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ понимают оператор E, удовлетворяющий условию $E = E^* = E^2$. Очевидно, E действует как умножение на единицу в $E\mathscr{H}$ и на нуль в $(1-E)\mathscr{H}$, причем $E\mathscr{H}$ и $(1-E)\mathscr{H}$ являются замкнутыми взаимно ортогональными подпространствами в $\mathscr{H}$.

Унитарные операторы являются изоморфизмами (или автоморфизмами) гильбертова пространства. В общем случае *изоморфизм гильбертовых пространств* (называемый иногда унитарным оператором) есть линейный оператор V из одного гильбертова пространства $\mathscr{H}_1$ на другое гильбертово пространство $\mathscr{H}_2$, обладающее обратным оператором и сохраняющее скалярное произведение (или норму, что то же в силу формулы поляризации). Очевидно, V^{-1} есть изоморфизм $\mathscr{H}_2$ на $\mathscr{H}_1$.

Упражнение 1.44. (а) Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — линейные ограниченные операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n$. Доказать, что существует единственный линейный ограниченный оператор $A \equiv A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ в $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$ (называемый *тензорным произведением операторов* $A_1, \ldots, A_n$) такой, что

$$A(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n) = A_1\psi_1 \otimes \ldots \otimes A_n\psi_n$$

при любых $\psi_1 \in \mathscr{H}_1, \ldots, \psi_n \in \mathscr{H}_n$; кроме того, $\|A_1 \otimes \ldots \otimes A_n\| = \|A_1\| \ldots \|A_n\|$. (Указание: на пространстве $\mathscr{F}$ из п. 1.1.Б ввести эрмитову форму

$$\omega'(f, g) = \sum_{u_1, v_1 \in \Omega_1, \ldots, u_n, v_n \in \Omega_n} \overline{f(u_1, \ldots, u_n)}\, g(v_1, \ldots, v_n) \langle A_1u_1, A_1v_1\rangle \ldots \langle A_nu_n, A_nv_n\rangle$$

и доказать, что она подчинена форме $\omega(f, g)$ (1.30) в том смысле, что