

Ватульян А.О.

**Обратные задачи
в механике
деформируемого
твёрдого тела**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.3, 517.951

ББК 22.251

В 21



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 06-01-14041

Ватульян А. О. **Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 224 с. — ISBN 978-5-9221-0835-5.

Рассмотрены различные классы обратных задач механики деформируемого твердого тела — ретроспективные, граничные, коэффициентные, геометрические, в которых по некоторой дополнительной экспериментальной информации о решении определяются коэффициенты дифференциальных операторов, начальные условия, граничные условия, геометрия внутренних дефектов (полостей, трещин). Излагаются постановки задач, основы общих подходов в теории обратных и некорректных задач, особенности итерационных схем и методов регуляризации при решении конкретных обратных задач теории упругости, акустики, вязкоупругости, электроупругости, теплопроводности. Представлены как схемы построения операторных уравнений с компактными операторами, так и методы доказательства теорем единственности, предложены различные способы построения приближенных решений, представлены численные результаты на основе методов регуляризации.

Для научных и инженерно-технических работников в области механики деформируемого твердого тела, численных методов, дефектометрии, геофизики, экспериментальной механики, для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по направлениям «механика», «прикладная математика».

ISBN 978-5-9221-0835-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© А. О. Ватульян, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
 Глава 1. Обратные и некорректные задачи	10
§ 1. Некоторые вопросы математического моделирования. Прямая и обратная задачи	10
§ 2. Понятие о корректных и некорректных задачах	16
§ 3. Степень некорректности и точность	22
§ 4. Способы преодоления некорректности. Регуляризация	24
§ 5. Дискретизация некорректных задач	38
§ 6. Некоторые особенности обратных задач и методы их исследования	42
Список литературы к введению и главе 1.	48
 Глава 2. Обратные ретроспективные задачи	50
§ 1. Обратная ретроспективная задача (первая постановка).	51
§ 2. Метод квазиобращения	54
§ 3. Обратная ретроспективная задача (вторая постановка).	56
Список литературы к главе 2.	58
 Глава 3. Коэффициентные обратные задачи в механике деформируемого твердого тела	60
§ 1. Об идентификации линейных динамических систем.	61
§ 2. Идентификация полимерных материалов на основе дифференциальной формы определяющих соотношений.	62
§ 3. Обратные коэффициентные задачи для упругого стержня.	67
§ 4. Коэффициентная обратная задача для волнового уравнения	75
§ 5. Обратная задача сейсмики.	78
§ 6. Обратная задача Лэмба.	81
§ 7. Интегральные уравнения в обратных коэффициентных задачах теории упругости	85
§ 8. Коэффициентные обратные задачи несвязанной термоупругости (к определению коэффициента температуропроводности)	90
§ 9. Коэффициентные обратные задачи электроупругости	93
Список литературы к главе 3.	115

Глава 4. Обратные граничные задачи теории упругости	118
§ 1. Постановка обратных граничных задач в теории упругости и методы их исследования	118
§ 2. Граничные обратные задачи для конечных тел	123
§ 3. Обратная граничная задача для полосы	125
§ 4. Обратные граничные задачи для пластин	136
§ 5. Об условной корректности обратных граничных задач теории упругости	141
Список литературы к главе 4	143
 Глава 5. Геометрические обратные задачи в акустике и теории упругости	 146
§ 1. Геометрические обратные задачи в акустике в дифракционной постановке	147
§ 2. Определение формы приповерхностного дефекта в акустической среде	153
§ 3. Определение формы полости в упругой полуплоскости	159
§ 4. Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде	163
§ 5. Идентификация плоских трещин в анизотропной упругой среде	173
§ 6. Асимптотический подход при решении задач идентификации трещин	178
§ 7. Идентификация малых дефектов в упругих телах	188
§ 8. Коротковолновые методы в обратных геометрических задачах	197
Список литературы к главе 5	204
 Приложение I. Некоторые сведения функционального анализа теории операторов	 211
Некоторые сведения из теории операторов	212
 Приложение II. Фундаментальные решения для операторов постоянными коэффициентами	 214
Список литературы к приложениям	221

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из первых обратных задач, решенных достаточно давно, явилась задача Ньютона об определении силы, под действием которой планеты совершают движения в соответствии с законами, которые сейчас известны как законы Кеплера. Другим ярким примером решения обратной задачи явилось определение траектории движения неизвестной планеты Нептун по аномалиям в движении Урана, осуществленное Леверье в 1846 г. на основании серии расчетов.

Обратные задачи стали предметом систематических исследований в математике и моделировании относительно недавно, первые работы в этом направлении появились в начале XX века, в первую очередь в связи с проблемами геофизики и разведки полезных ископаемых, а более интенсивно разработки в этой области математической физики начали проводиться в 70–80-е годы прошлого века.

Настоящая монография основана на спецкурсах, прочитанных автором на механико-математическом факультете Ростовского государственного университета, и создана благодаря многолетней поддержке РФФИ (гранты, посвященные исследованию различных классов обратных задач в теории упругости: 95-01-00240-а, 97-01-00633-а, 00-01-00545-а, 02-01-01124-а, 05-01-00734).

Автор выражает искреннюю признательность своим учителям — академикам РАН Владимиру Андреевичу Бабешко и Иосифу Израилевичу Воровичу, указавшим путь в новый класс задач механики и оказавшим всемерную поддержку на этом пути.

Автор благодарит своих коллег по научным исследованиям: Н. В. Боева, В. М. Драгилева, А. Н. Соловьева, М. А. Сумбатяна, а также учеников — И. В. Баранова, О. Б. Домброву, О. В. Явруян — за сотрудничество и помощь.

А. О. Ватульян

ВВЕДЕНИЕ

Современная инженерная практика основана на моделировании явлений и процессов, встречающихся в различных сферах деятельности человека. Стремление познавать окружающий мир, осуществлять краткосрочное и долгосрочное прогнозирование и управление привело человека к некоторой идеализации окружающих предметов и явлений, которые в реальности характеризуются множеством разнообразных проявлений.

Для описания поведения некоторых процессов или явлений, которые в дальнейшем будем именовать *объектами исследования* (ОИ), для понимания основных закономерностей их функционирования, прогнозирования дальнейшего поведения необходимо абстрагироваться от реального процесса, заменяя его упрощенным — идеальным, где учитываются один или несколько факторов, определяющих его динамическое поведение. Исследователь всегда стоит перед дилеммой: либо использовать простейшую модель, для которой возможно получить аналитическое решение, либо более сложную, но которую возможно анализировать лишь численно. При этом во внимание принимаются различные соображения; главное же требование математического моделирования — адекватность модели изучаемому процессу.

Основными источниками информации, на основании которой формулируются содержательные гипотезы о влиянии того или иного фактора на поведение ОИ и предлагается некоторое упрощенное его описание, являются *наблюдение* и *эксперимент*. Если при наблюдении просто фиксируются некоторые характеристики поведения ОИ, то в эксперименте можно активно воздействовать на ОИ при помощи некоторых полей (вход) и регистрировать его отклик на это воздействие (выход).

Установление связи между входом и выходом ОИ и прогнозирование поведения ОИ при изменении внешних факторов составляют главную задачу математического моделирования.

Отметим, что в современном инженерном образовании и инженерной практике достаточно внимания уделяется методологии осуществления прогнозирования поведения ОИ на основе известных моделей механики деформируемого твердого тела, например расчетам на прочность, устойчивость и динамическое поведение конструкций на основе моделей упругого, упругопластического или вязкоупругого тела, других моделей механики сплошной среды. Эти модели формировались на основе длительной практической проверки в течение многих десятилетий.

Как правило, расчеты для таких моделей осуществляются либо на основе формул сопротивления материалов, либо на основе одной из вычислительных технологий, например на основе методов конечных или граничных элементов. Вместе с тем следует отметить, что в настоящее время в практику внедряется огромное количество новых конструкционных материалов: композитов различной структуры с различными составляющими, керамик, полимеров, пьезоматериалов, материалов с памятью формы и т. д., обладающих низкой себестоимостью, технологичностью по сравнению с традиционными строительными и конструкционными материалами, такими как металлы, сплавы, дерево, камень. Значительно сократилось время с момента разработки технологии производства нового материала до его практического использования в конструкциях, упростилась процедура расчетов на прочность в связи с повсеместным внедрением конечноэлементных технологий.

При этом особую значимость приобретают как процедура надежной идентификации новых материалов, т. е. определения физических характеристик, используемых для инженерных расчетов, так и совершенствование методик своевременного выявления дефектов в материалах и конструкциях как на этапе создания, так и в процессе эксплуатации. Заметим, что в современном инженерном образовании этим вопросам уделяется крайне мало внимания. Это связано с отсутствием внедрения в учебный процесс новых разделов математического моделирования, таких как планирование эксперимента, обратные и некорректные задачи и их применение в инженерной практике.

Для ознакомления инженерных кадров с некоторыми аспектами методологии математического моделирования и решения проблем идентификации материалов, конструкций, нагрузок по данным косвенных измерений требуется некоторая дополнительная подготовка в области математики, механики, математического моделирования, знакомство с математическими аспектами решения некоторых простейших задач.

Отметим, что с точки зрения соотношения причина–следствие все задачи математического моделирования можно разбить на два больших класса: *прямые задачи* и *обратные задачи*. Заметим, что для современного исследователя необходимо четкое понимание различий, как в постановке, так и в методах решения прямых и обратных задач.

Для прямых задач известны причины, требуется найти следствия. В качестве причин могут фигурировать следующие факторы.

1. Начальные условия для модели.
2. Коэффициенты дифференциальных операторов, описывающих модель.
3. Граничные условия.
4. Область, занятая изучаемым объектом (геометрия области).

В качестве следствий в механике и физике используются обычно компоненты физических полей (перемещения, напряжения, деформации, температура, электрический потенциал).

Прямые задачи составляют суть современной классической механики и математической физики, которые формировались на протяжении более чем 200 последних лет и превратились в мощный инструмент моделирования и познания. Для таких задач детально разработаны аналитические и численные методы решения, доказаны теоремы существования и единственности.

На сегодняшний день наиболее популярными численными методами при моделировании в математической физике являются: метод конечных разностей, методы конечных и граничных элементов, которым посвящена обширная литература. Для них созданы различные пакеты программ, реализующие соответствующие технологии; они интенсивно развиваются, опираясь на современные достижения в области вычислительной техники и вычислительной математики.

Для *обратных задач* (ОЗ) ситуация иная: известны следствия, требуется найти причины и определить факторы 1–4 (либо один из них) по некоторой дополнительной информации об объекте исследования и, по сути, осуществить обращение причинно-следственных связей.

Отметим ряд отечественных и зарубежных монографий [1–3, 6, 9, 10, 13, 16–19, 21, 22], в которых освещены различные постановки, методы решения, условия, обеспечивающие единственность, и другие аспекты исследования обратных задач.

ОЗ имеют постоянно расширяющиеся области приложения в инженерной практике, среди которых выделим следующие.

1. Определение свойств материалов (механических, теплофизических), идентификация полимерных и композитных материалов, биоматериалов, пьезокерамик.

2. Задачи сейсморазведки (определение расположения и мощности залежей полезных ископаемых по отраженным от месторождения звуковым сигналам).

3. Проблемы неразрушающего контроля (определение расположения и конфигурации дефекта по измеренному полю упругих смещений на поверхности тела или по резонансным частотам).

4. Моделирование явления акустической эмиссии и установления связи основных характеристик эмиссии с характеристиками напряженного состояния; это явление стало в последние годы одним из перспективных способов выявления предразрушающего состояния конструкций.

5. Задачи рентгеновской и акустической томографии.

Отметим, что единые подходы к различным классам обратных задач, которые в условной форме сформулированы в [1] и требующие восстановления одной или нескольких причин, могут быть сформулированы лишь на общем фундаменте функционального анализа.

Настоящая монография вводит исследователя в многообразие типов обратных задач в механике деформируемого твердого тела на основе классических моделей этой области знания (стержень, пластина, слой, полуплоскость, конечное упругое тело). Ключевым моментом в иссле-

довании обратных задач является построение связей между входом и выходом ОИ, что приводит к операторным уравнениям с компактными операторами, при обращении которых необходимо использовать регуляризацию в той или иной форме.

Большое внимание уделено как традиционным способам формулировки таких операторных соотношений, так и новым, базирующимся на неклассических граничных уравнениях, на предварительном сведении исходной прямой задачи к уравнениям Фредгольма 2-го рода, на линеаризованных постановках обратных задач, а также формулировках, основанных на обобщении теоремы взаимности.

ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Некоторые вопросы математического моделирования. Прямая и обратная задачи

Познание окружающего мира привело человека к некоторой идеализации исследуемых предметов и явлений. При этом для понимания основных закономерностей моделируемого процесса необходимо было абстрагироваться от реального процесса, заменяя его идеальным, где учитывается одно или несколько главных его свойств. Предположим, что необходимо описать поведение некоторого физического процесса или явления, которое в дальнейшем будем именовать объектом исследования (ОИ). Основными источниками информации, на основании которых изучается ОИ, являются наблюдение и эксперимент. Если при наблюдении просто фиксируются некоторые черты поведения ОИ, то в эксперименте можно активно воздействовать на ОИ (вход) и регистрировать его отклик на это воздействие (выход). Установление связи между входом и выходом ОИ составляет главную задачу математического моделирования.

Определение 1.1 [1]. *Математической моделью* ОИ называется абстрактное средство его приближенного отображения при помощи математического описания существенных факторов ОИ с сохранением взаимосвязей между ними.

Для построения математической модели ОИ на основании установления связи между входом и выходом необходимо выбрать вид этой связи или определить структуру оператора, осуществляющего отображение входа $u(t)$ на выход $f(t)$. При этом отметим, что одному ОИ может быть поставлено в соответствие несколько математических моделей, отличающихся числом и степенью учета различных факторов.

Пусть $Au = f$ — математическая модель ОИ, где $A: U \rightarrow F$ некоторый оператор, U, F — функциональные пространства. Задача определения оператора A (идентификация ОИ) может быть разделена на два этапа: 1 этап — структурная идентификация, 2 этап — параметрическая идентификация.

На первом этапе определяется (или выбирается) структура оператора A . Например, при описании движения твердого тела (стрелы, раке-

ты) можно использовать следующие уровни, определяющие структуру модели:

- а) материальная точка, абсолютно твердое тело (модели теоретической механики);
- б) стержень, балка, пластина (модели сопротивления материалов);
- в) трехмерное упругое тело (модели теории упругости);
- г) упругое тело с неупругими элементами (модели механики сплошной среды).

При этом в моделировании используются следующие основные виды операторов:

- 1) конечномерный оператор (A — матрица, $Au = f$ — система линейных алгебраических уравнений);
- 2) дифференциальный оператор (или матричный дифференциальный оператор);
- 3) дифференциальный оператор в частных производных;
- 4) более сложные операторы — интегральные, интегро-дифференциальные операторы, интегро-функциональные уравнения (здесь A — достаточно общий абстрактный оператор).

На втором этапе структурной идентификации определяются числовые параметры, входящие в описание оператора A .

Пример 1. Идентификация полимерного материала при одноосном растяжении

$$\sigma(t) \rightarrow \varepsilon(t).$$

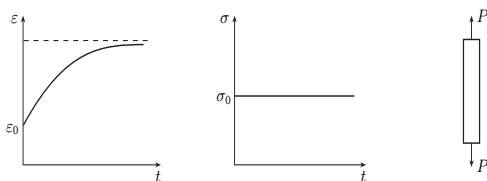


Рис. 1.1

В качестве математической модели, описывающей поведение этого ОИ, используется модель стандартного вязкоупругого тела [12] (рис. 1.1). При этом в качестве соотношения, связывающего вход и выход, на этапе структурной идентификации используется операторное уравнение

$$a_0 \dot{\sigma} + a_1 \sigma = b_0 \varepsilon + b_1 \dot{\varepsilon}. \quad (1.1)$$

В этой модели неизвестны 3 параметра (один из параметров, например a_1 , можно положить равным 1), их определение по некоторой

информации о решении составляет суть этапа параметрической идентификации.

С точки зрения соотношений причина-следствие все задачи математического моделирования можно разбить на два больших класса: *прямые задачи* и *обратные задачи*.

1. Прямые задачи. Для этого класса задач известны причины, требуется найти следствия. В качестве причин могут фигурировать начальные условия, коэффициенты дифференциальных операторов, граничные условия, геометрия области.

В качестве следствий в механике используются обычно компоненты физических полей (перемещения, напряжения, деформации, температура, электрический потенциал).

Прямые задачи составляют суть современной математической физики [11, 20], которая формировалась как область математики на протяжении более двух столетий. Для таких задач детально разработаны методы решения, доказаны теоремы существования и единственности.

2. Обратные задачи и их классификация. Для этого класса задач известны следствия, требуется найти причины и определить их по некоторой дополнительной информации об ОИ. Эти задачи стали предметом исследований в математике относительно недавно, первые работы в этом направлении относятся к началу XX века, а более интенсивно разработки в этой области математического моделирования начали проводиться в 70–80-х годах прошлого века [3, 6, 10].

К настоящему времени сложилась следующая условная классификация обратных задач [1, 6].

1. *Ретроспективные обратные задачи* (задачи с обращенным временем) — задачи об определении начального состояния ОИ (начальных условий) по некоторым функционалам или операторам от решения.

Пример 2. Рассмотрим уравнение движения материальной точки под действием заданной силы:

$$m\ddot{x} = F(t). \quad (1.2)$$

Зная $x(t)$, найти $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

2. *Коэффициентные обратные задачи* — задачи определения коэффициентов дифференциальных операторов.

Пример 3. Деформирование полимерного материала описывается операторным уравнением (1.1). Зная $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, найти коэффициенты a_0 , a_1 , b_0 , b_1 .

3. *Граничные обратные задачи* (задачи об определении граничных условий).

Пример 4. Рассмотрим процесс изменения температуры в стержне, один из концов которого теплоизолирован, а на другом поддерживается свободный теплообмен с окружающей средой, причем температура

имеет некоторое заданное начальное распределение $\varphi(x)$. Процесс описывается следующей начально-краевой задачей [1, 3]:

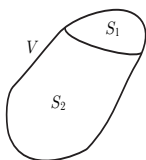


Рис. 1.2

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) + \alpha(t)u_x(0, t) &= 0, \\ u_x(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Зная $u(l, t)$, найти коэффициент теплообмена $\alpha(t)$.

Пример 5. Упругое тело V с границей $S = S_1 \cup S_2$ (рис. 1.2) колеблется под действием некоторых нагрузок, которые недоступны для непосредственного измерения. На S_1 известны компоненты вектора смещений и компоненты вектора напряжений:

$$u_i|_{S_1} = u_{i0}, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_1} = p_i.$$

Требуется найти $u_i, \sigma_{ij}n_j$ на S_2 .

4. *Геометрические обратные задачи* (задачи об определении области, занятой ОИ).

Пример 6. Требуется восстановить форму трехмерного тела по набору его ортогональных проекций на различные плоскости (задача компьютерной томографии) [13].

Пример 7. Задача об установившихся колебаниях упругой полуплоскости с полостью l описывается уравнениями Ламе [15]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$x_2 = 0, \quad \sigma_{i2} = p_i(x_1), \quad \sigma_{ij}n_j|_l = 0.$$

Обратная задача состоит в определении формы полости l по информации $u_i|_{x_2=0} = f_i(x_1)$, $x_1 \in [c, d]$.

5. *Обратные задачи смешанных типов* (неизвестными являются несколько факторов 1–4; например, коэффициенты дифференциальных операторов и область, занятая ОИ).

Следует отметить, что вышеприведенная классификация ОЗ является весьма условной и постановки задач легко трансформируются одна в другую. Например, задача об определении дефекта в упругом теле в общей постановке относится к геометрическим ОЗ; в том случае, когда геометрия тела такова, что для описания его поведения используется стержневая модель, задача сводится к коэффициентной ОЗ, которая, в свою очередь, в рамках линеаризованной постановки трансформируется в задачу об определении нагрузки, т. е. в граничную ОЗ.

Заметим, что некоторые из обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений решены достаточно давно. Лишь иногда возможно получить точное решение обратной задачи. Таковой является задача Ньютона о нахождении поля сил, в котором материальная точка движется в соответствии с законами Кеплера (одна из первых обратных задач динамики) [5]. Приведем кратко ее решение.

Пусть уравнения движения планеты имеют вид

$$\ddot{x} = X(x, y), \quad \ddot{y} = Y(x, y). \quad (1.5)$$

Эти уравнения допускают первые интегралы

$$\omega_1 \equiv r - \epsilon x = p \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad \omega_2 \equiv x\dot{y} - \dot{x}y = c. \quad (1.6)$$

Используем лишь интеграл площадей $\omega_2 = c$. Тогда необходимое и достаточное условие того, что уравнения движения планеты (1.5) допускают этот интеграл, записывается в виде

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} X + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} Y + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \dot{y} = 0,$$

или

$$xY - yX = 0.$$

Отсюда непосредственно находим правые части уравнений (1.5):

$$X = xV(x, y), \quad Y = yV(x, y), \quad (1.7)$$

где $V(x, y)$ — произвольная функция. Для определения этой функции используем уравнение траектории планеты $\omega_1 = p$. Имеем

$$\ddot{\omega}_1 \equiv \frac{c^2}{r^3} + \frac{x}{r} X + \frac{y}{r} Y - \epsilon X = 0. \quad (1.8)$$

Отсюда находим

$$V(x, y) = -\frac{c^2}{p} \frac{1}{r^3},$$

и окончательная форма уравнений движения планеты массы m имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{mc^2}{p} \frac{x}{r^3}, \quad m\ddot{y} = -\frac{mc^2}{p} \frac{y}{r^3}. \quad (1.9)$$

Правые части этих уравнений представляют собой проекции силы, вызывающей движение планеты с постоянной секторной скоростью по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

К сожалению, решение многих обратных задач можно найти лишь приближенно, при помощи численных алгоритмов, и требуются достаточно тонкие математические средства анализа для обоснования сходимости и устойчивости решений таких задач [2, 6, 16–19].

В качестве наиболее значимых приложений ОЗ в современной практике отметим следующие.

1. Построение определяющих соотношений для новых материалов (на этапе параметрической идентификации), нахождение механических, теплофизических постоянных, оцифровка полимерных и композитных материалов.

2. Совершенствование моделей строения Земли и их приложения к задачам горной механики, геофизики, разведки полезных ископаемых (определение расположения и мощности залежей полезных ископаемых по отраженным от месторождения звуковым сигналам, модулей упругости, являющихся некоторыми функциями координат).

3. Модификация схем неразрушающего контроля (определение расположения и конфигурации дефекта по отраженному полю) (рис. 1.3) на основе закономерностей отражения ультразвуковых волн от ОИ и явления акустической эмиссии.

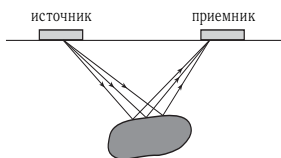


Рис. 1.3

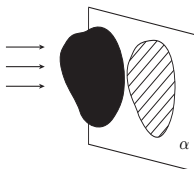


Рис. 1.4

4. Задачи рентгеновской и акустической томографии [8, 14] (рис. 1.4), когда по семейству плоских проекций трехмерного тела требуется восстановить его пространственную конфигурацию, причем особое значение приобретает идентификация при таких схемах просвечивания, когда ОИ может быть прозондирован лишь из ограниченной области (неполные данные).

5. Задачи акустики океана (определение плотности, солёности некоторой акватории океана как функций пространственных координат по информации о волновых полях в жидкости, обнаружение движущихся в океане объектов).

6. Обратные задачи биомеханики (описание свойств и нахождение количественных характеристик биологических тканей — мышц, сухожилий, костной ткани по косвенной информации о физических полях в них).

7. Задачи наномеханики по определению свойств наноразмерных покрытий по измеренным полям.

Область использования методологии ОЗ постоянно расширяется и требует особого внимания при подготовке специалистов.

Обратные задачи обладают рядом неприятных с точки зрения обработки информации свойств. Во-первых, как правило, ОЗ являются нелинейными (линейными являются ретроспективные задачи и ряд

граничных задач, см. пример 5). Во-вторых, возможна неединственность при решении ОЗ, и, в-третьих, наиболее неприятным свойством ОЗ является их неустойчивость по отношению к малым изменениям входной информации. Для обратных задач погрешность, присущая всем измерениям, может оказывать очень сильное влияние на погрешность восстановления каких-либо свойств объекта. Это означает, что увеличение точности проведения эксперимента не может кардинально улучшить ситуацию в процедуре идентификации. Задачи, обладающие такими свойствами, принято называть некорректными; подобные ситуации являются весьма непривычными в инженерной практике и в технике эксперимента, требуют адекватных математических средств для описания и построения устойчивых вычислительных алгоритмов обработки. Исследованию таких задач посвящены многочисленные работы и монографии, среди которых отметим [2, 8, 17–19]. Остановимся на понятии некорректной задачи более подробно.

§ 2. Понятие о корректных и некорректных задачах

Понятия корректной и некорректной задач являются одними из ключевых в современной математической физике. Эти понятия применительно к задачам математической физики были введены в математику в 30-е годы XX-го века Ж. Адамаром.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \quad (2.1)$$

где $A: U \rightarrow F$ — линейный оператор, U, F — гильбертовы пространства.

Определение 1.2 [1, 13]. Задача (2.1) называется *корректно поставленной по Адамару*, если:

- 1) $\forall f \in F \exists u \in U: Au = f$ (решение существует для любой правой части);
- 2) решение единственно;
- 3) решение непрерывно зависит от данных задачи.

Непрерывная зависимость от данных задачи означает следующее. Пусть имеется два операторных уравнения с мало различающимися правыми частями:

$$Au = f, \quad Au_\delta = f_\delta,$$

такие, что из неравенства

$$\|f - f_\delta\|_F \leq \delta$$

вытекает

$$\|u - u_\delta\|_U \leq \varepsilon,$$

причем $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\delta \rightarrow 0$ (условие устойчивости).

Перефразируя определение 1.2, можно сказать, что нахождение элемента

$$u = Rf$$

порождает корректную модель, если отображение R определено на всем пространстве F и непрерывно. Ясно, что понятие корректности относится к тройке (F, R, U) [2, 6, 13], и в зависимости от выбора элементов этой тройки возможны различные варианты.

Поясним смысл условий 1–3 в определении 1.2:

- 1) существование означает, что данные задачи непротиворечивы;
- 2) единственность означает, что данных достаточно для нахождения единственного решения;
- 3) непрерывная зависимость от данных задачи означает, что малые погрешности входных данных (которые присущи любому эксперименту и наблюдению) приводят к малым отклонениям приближенного решения от точного.

Условия 1, 2 определения 1.2 характеризуют математическую определенность, а условие 3 — физическую детерминированность задачи.

Отметим, что для линейных корректных задач имеет место соотношение корректности

$$\|u\|_U \leq c \|f\|_F, \quad (2.2)$$

$c = \text{const}$, причем из соотношения (2.2) вытекают условия корректности 1–3 определения 1.2 (например, если $f = 0$, то и $u = 0$, откуда следует единственность).

Определение 1.3. Задача (2.1) называется *некорректной*, если для нее нарушается хотя бы одно из условий 1–3 определения 1.2.

Рассмотрим несколько типичных примеров некорректных задач.

Пример 1. Линейные алгебраические системы с плохо обусловленной (вырожденной) матрицей [5, 17, 19].

Рассмотрим пример А. Н. Тихонова:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ \sqrt{8}x + \sqrt{18}y = \sqrt{50}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что матрица системы и расширенная матрица системы имеют ранг, равный 1. Таким образом, система совместна и имеет множество решений, зависящих от одного параметра. Возьмем последовательно 100, 200, 300 десятичных знаков и так далее в приближении иррациональных чисел во втором уравнении системы. Тогда определитель системы не равен нулю, и можно построить единственное решение x_n, y_n , соответствующее сохранению n значащих цифр в представлении иррациональных чисел. Оказывается, что построенная таким образом последовательность решений не имеет предела при $n \rightarrow \infty$, хотя исходная информация становится все точнее и точнее. Таким образом, задача решения линейной алгебраической системы (2.3) с вырожденной матрицей A будет некорректной.

В более общей ситуации рассмотрим линейную алгебраическую систему n -го порядка. Тогда A — квадратная матрица n -го порядка,

$$U = F = R^n.$$

Как известно из курса линейной алгебры [5], имеется две возможности.

1. Если определитель матрицы отличен от нуля, то при любой правой части существует единственное решение вида

$$u = A^{-1}f,$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A .

2. Если определитель матрицы A равен нулю, то система имеет решение не для любой правой части; если же оно существует, то неединственно и задача решения линейной алгебраической системы с вырожденной матрицей или близкой к ней является некорректной. Эта ситуация типична для приложений, когда матрица A находится в результате некоторых приближенных вычислений, и если в процессе расчетов получено, например, что $\det A = 10^{-30}$, то непонятно, либо определитель приближенно равен нулю и решение существует только при определенных ограничениях на правую часть, либо не равен нулю и система имеет единственное решение; эти ситуации в принципе неразличимы.

Пример 2. Решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром [5, 8, 16, 17].

Пусть

$$Au = \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad x \in [c, d]. \quad (2.4)$$

Будем считать для определенности, что

$$K(x, s), K_x(x, s), K_s(x, s) \in C[[c, d] \times [a, b]],$$

$$u \in C[a, b], \quad f \in C[c, d].$$

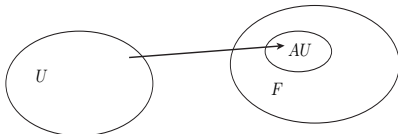


Рис. 1.5

Покажем, что задача (2.4) является некорректной. Для этого операторного уравнения не выполняется первое условие корректности, поскольку не у каждого элемента из F будет существовать прообраз из U (рис. 1.5). Для этого достаточно взять функцию f , непрерывную на $[c, d]$, но не дифференцируемую.

В этом случае интеграл в левой части представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию. Для уравнения (2.4) не выполняется и третье условие корректности в силу полной непрерывности оператора в левой части и неограниченности обратного A^{-1} к вполне непрерывному [13, 17]. Наконец, заметим, что выполнение второго условия корректности зависит от конкретного вида ядра (это условие может как выполняться, так и нарушаться). Особенно выпукло это проявляется для операторов с вырожденным ядром. Рассмотрим 3 характерных примера.

Пример 2а [4]. Пусть

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \sin(x + s), \\ Au &= \int_a^b \sin(x + s) u(s) ds = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \\ c_1 &= \int_a^b \cos su(s) ds, \quad c_2 = \int_a^b \sin su(s) ds. \end{aligned}$$

Обратный оператор A^{-1} существует, если правая часть $f(x)$ имеет тот же вид, что и левая

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Если же $f(x)$ возмутить, полагая, например,

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \delta \cos 2x,$$

то при любом самом малом δ A^{-1} не существует.

Пример 2б [6]. Пусть

$$K(x, s) = e^{x-s}.$$

Нетрудно видеть, что для оператора с таким ядром решение неединственно. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение и будем искать его решение в виде

$$u(s) = c_1 + c_2 s \neq 0;$$

тогда

$$c_1 \int_a^b e^{-s} ds + c_2 \int_a^b s e^{-s} ds = 0$$

и можно положить

$$c_1 = - \int_a^b s e^{-s} ds, \quad c_2 = \int_a^b e^{-s} ds,$$

и решение неединственно.

Пример 2в [6]. Пусть

$$K(x, s) = e^{xs}.$$

Покажем, что соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение

$$\int_a^b e^{xs} u(s) ds = 0, \quad x \in [c, d], \quad 0 \in [c, d]. \quad (2.5)$$

Полагая в (2.5) $x = 0$, находим

$$\int_a^b u(s) ds = 0.$$

Дифференцируя уравнение (2.5) и полагая $x = 0$, получим последовательно:

$$\int_a^b s^n u(s) ds = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

В силу того что система функций $1, s, \dots, s^n, \dots$ линейно независима и полна в $L_2[a, b]$, а $u(s)$ ортогональна этой системе, то

$$u(s) \equiv 0,$$

и, следовательно, единственность решения имеет место.

Рассмотрим вопрос о корректности решения операторного уравнения (1.2) в общем случае. Из определения корректной задачи следует, что задача будет корректной, если на F корректно определен обратный оператор A^{-1} , являющийся непрерывным (ограниченным) (см. прил. 1).

Отметим, что задачи, некорректные для одной пары пространств U, F , могут оказаться корректными для другой пары.

Пример 3 [3]. Пусть

$$Au = \frac{du}{dt}, \quad U = C^1[0, T], \quad F = C[0, T].$$

При таком выборе пространств задача некорректна, ибо решение находится неединственным образом. Задача становится корректной, если сузить соответствующее пространство U и положить

$$U = \{u \in C^1[0, T], \quad u(0) = 0\}, \quad u = \int_0^t f(\tau) d\tau = A^{-1}f.$$

Пример 4 [3]. Пусть

$$Au = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad U = C[0, T], \quad F = C[0, T].$$

Для этого оператора задача (2.1) некорректна. Докажем это, предположив противное. Пусть задача корректна (тогда имеет место соотношение корректности $\|u\| \leq c\|Au\|$); выберем

$$u_n \in C[0, T], \quad u_n = n \cos nt.$$

Тогда

$$Au_n = \int_0^t n \cos n\tau \, d\tau = n \frac{1}{n} \sin n\tau \Big|_0^t = \sin nt, \quad \|Au_n\| = \max_{t \in [0, T]} |Au_n| \leq 1,$$

а величина

$$\|u_n\| = \max_{t \in [0, T]} |n \cos nt|$$

может быть сколь угодно большой при $n \rightarrow \infty$.

Если выбрать

$$U = C[0, T], \quad F = C^1[0, T]$$

и ввести норму обычным образом:

$$\|f\|_{C^1[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} |f(t)| + \max_{t \in [0, T]} |f'(t)|,$$

то можно доказать соотношение корректности (2.2) и задача оказывается корректной. Действительно, в силу неравенства

$$\|Au\|_{C^1[0, T]} = \max \left| \int_0^t u(\tau) \, d\tau \right| + \max |u(\tau)| \geq \|u\|_{C[0, T]}$$

корректность имеет место.

Пример 5 [3, 6]. Пусть имеется начально-краевая задача для параболического уравнения:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}, \\ v(x, 0) &= f(x), \quad v(0, T) = v(\pi, T) = 0, \\ u(x) &= v(x, T), \\ Au &= f, \quad U = F = L_2[0, \pi]. \end{aligned}$$

Покажем, что задача нахождения $u(x)$ корректна. Введем в рассмотрение функцию

$$E(t) = \int_0^\pi v^2(x, t) \, dx$$

и найдем ее производную:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^\pi 2v(x, t) v_t(x, t) \, dx = 2 \int_0^\pi v(x, t) v_{xx}(x, t) \, dx = \\ &= 2 \left[v(x, t) v_x(x, t) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi v_x^2(x, t) \, dx \right] = -2 \int_0^\pi v_x^2(x, t) \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Итак, $E'(t) \leq 0$, следовательно, $E(t)$ — невозрастающая функция и $E(t) \leq E(0)$. Таким образом,

$$\int_0^{\pi} v^2(x, T) dx \leq \int_0^{\pi} v^2(x, 0) dx, \quad \int_0^{\pi} u^2(x) dx \leq \int_0^{\pi} f^2(x) dx,$$

откуда следует

$$\|u\|_{L_2[0, \pi]} \leq \|f\|_{L_2[0, \pi]},$$

и, следовательно, в силу (2.2) задача корректна.

Исследование корректных и некорректных задач осуществляется различными математическими средствами; о некоторых из них речь пойдет ниже.

Как видно из примера 4, часто корректность имеет место для одной пары пространств и не имеет места для другой пары пространств. Эта ситуация наиболее проста для рассмотрения, поскольку некорректность легко преодолевается за счет подходящего выбора пары функциональных пространств или сужения множества поиска за счет некоторых априорных ограничений; более сложные случаи будут рассмотрены ниже.

Решение некорректных задач оказывается возможным благодаря уточнению постановки исходной задачи. Кроме уровня погрешности δ , от искомой функции требуется еще выполнение некоторых дополнительных условий, носящих часто не очень четкую и однозначную форму, например требование определенной гладкости, положительности или какие-либо другие ограничения. Теория учета подобных ограничений носит сейчас название теории регуляризации некорректных задач.

§ 3. Степень некорректности и точность

Чтобы выяснить, какой точности можно достичь при решении некорректной задачи в часто используемых пространствах суммируемых функций, в частности в пространствах Соболева (см. прил. 1), сделаем следующие дополнительные предположения относительно линейного вполне непрерывного оператора A и точного решения u .

Пусть

$$1) \exists \gamma > 0: \|u\|_{H_0^{-\gamma}(\Omega)} \leq \|Au\|_F \leq M \|u\|_{H_0^{-\gamma}(\Omega)}, \quad m, M > 0;$$

$$2) u \in H_0^{\beta}(\Omega), \quad \beta > 0, \quad \|u\|_{H_0^{\beta}(\Omega)} \leq \rho.$$

В силу (1) $\exists A^{-1}: F \rightarrow L_2(\Omega)$, но он неограничен. Это означает, что уравнение $Au = f$ некорректно для пары пространств $L_2(\Omega)$, F , а число γ можно рассматривать как меру некорректности. Фактически требование (2) представляет собой условие, накладываемое на степень гладкости точного решения (типичный пример априорной информации), позволяющее существенно сузить область поиска решения исходного операторного уравнения.

Пусть известен не сам элемент f , а его приближение f_{δ} (например, f_{δ} находится из эксперимента с некоторой известной погрешностью):