Юрий Петров

Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2008

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26
П30

Петров Ю. П.

П30 Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 160 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0234-4

В книге дан анализ ошибок и неточностей, недавно обнаруженных в традиционных методах расчета и популярных пакетах прикладных программ (MATLAB, Mathcad и др.), и их связь с открытыми в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ) новыми свойствами эквивалентных (равносильных) преобразований. Эти ошибки и неточности расчетов являются причиной многих аварий и катастроф. В книге изложены пути совершенствования методов расчета и вычислительных алгоритмов для обеспечения достоверности результатов расчета, приведены многочисленные примеры.

Учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных автором в СПбГУ на факультете прикладной математики — процессов управления.

*Для студентов, аспирантов
и пользователей компьютеров, выполняющих расчеты*

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

Рецензенты:

кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем СПбГУ;
М. Б. Игнатьев, д. т. н., проф., лауреат государственной премии.

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Татьяна Лапина*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн обложки	*Инны Тачиной*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 20.12.07.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,9.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0234-4

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено одной из важнейших проблем прикладной математики — проблеме достоверности и надежности компьютерных вычислений (и компьютерных технологий, надежность которых, в конечном счете, зависит от надежности вычислений) с учетом неизбежной ограниченной точности любых исходных данных.

Если исходные данные известны лишь с точностью до ±ε, то какова наименьшая достижимая погрешность решения? Вот проблема, без решения которой нельзя говорить о надежности вычислений, поскольку давно известны примеры, когда малые погрешности исходных данных приводят к большим и даже очень большим погрешностям решений.

Данная проблема неоднократно исследовалась, однако в последнее десятилетие двадцатого века в этой старой и важной проблеме открылся новый и неожиданный поворот, связанный с новыми результатами, обнаруженными в теории эквивалентных преобразований.

Было неожиданно обнаружено (см. публикации [2, 3, 4]), что привычные и широчайшим образом используемые в математике и во всех расчетах эквивалентные преобразования могут изменять корректность решаемой задачи, а значит — и достоверность ее решения. Было также обнаружено, что привычное и общепризнанное разделение всех задач математики, физики и техники на корректные и некорректные — недостаточно, что существует третий класс — класс задач, меняющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при их решении.

Эти неожиданно обнаруженные результаты, полученные в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), заставили по-новому взглянуть на старую проблему достоверности и надежности вычислений. Если раньше спокойно применяли эквивалентные преобразования, то теперь надо проверить — изменили они корректность решаемой задачи или не изменили. Если раньше считали достаточным проверить корректность решаемой задачи при ее постановке, то теперь выявилась необходимость проверки — не относится ли задача к третьему классу, не меняется ли ее корректность в ходе решения.

Встречи с задачами, относящимися к третьему классу, не раз становились причиной ошибок в вычислениях, которые затем становились причиной аварий и катастроф. Примеры аварий и катастроф, порожденных ошибками расчета при встречах с задачами третьего класса, описаны в монографии [4]. Для избежания ошибок в расчетах, для уменьшения вероятности аварий и катастроф необходимо дополнить традиционные методы вычислений проверками возможных изменений корректности и обусловленности решаемых задач при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения. Методы подобных проверок были частично описаны в [4, 11], а более подробно рассматриваются в настоящем издании.

Разумеется, новые проверки требуют дополнительного труда и "осложняют жизнь" математику, инженеру и пользователю компьютера. Поэтому они не всегда были встречены с радостью, а некоторые математики и инженеры пытались даже поставить под сомнение их необходимость. Однако дополнительные проверки необходимы, поскольку они повышают надежность и достоверность вычислений, не говоря уже о том, что новые результаты позволили выявить источники ошибок в расчетах, которые ранее неоднократно становились причинами аварий и даже катастроф.

Таким образом, в предлагаемом вниманию читателя учебном пособии изложены новые научные результаты, полученные в СПбГУ и поднимающие науку на новый уровень.

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части (главы с первой по четвертую) рассмотрены ошибки в расчетах, возникающие там, где не учитывали возможность изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, и описаны методы, позволяющие избегать ошибок.

Во второй части рассмотрены более сложные вопросы обеспечения надежности компьютерных вычислений, а также приведены примеры и задачи.

Учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных автором в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), на факультете прикладной математики — процессов управления.

Автор благодарен И. А. Петрову за помощь в подготовке рукописи.

Вопросы и замечания можно посылать на e-mail: **petrov1930@mail.ru**.

Часть I

Глава 1. Простые примеры и первые выводы

§1. Первый пример

Перед тем как перейти к исследованию проблемы надежности компьютерных вычислений в общем случае, рассмотрим предварительно несколько простых примеров, проясняющих суть дела.

Начнем с рассмотрения системы двух линейных дифференциальных уравнений (где $D = \dfrac{d}{dt}$)

$$(1{,}03D^2 + 2D + 1)x_1 + Dx_2 = 0; \tag{1}$$

$$Dx_1 + x_2 = 0, \tag{2}$$

для которой требуется вычислить значение $x_1(t)$ при $t = 1$.

Как хорошо известно из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1], система (1)—(2) имеет характеристический полином, равный определителю

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}03\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0{,}03\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{3}$$

с двумя корнями: $\lambda_1 = -0{,}5038$, $\lambda_2 = -66{,}1629$ (с точностью до четырех знаков после запятой).

Общее решение системы (1)—(2) имеет вид

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Пусть эти условия таковы, что $C_1 = 1$; $C_2 = 1$. Пользуясь формулой (4), нетрудно вычислить значение $x_1(t)$ для любого t. В частности, для $t = 1$ будем иметь $x_1(1) = 0{,}6042$.

Теперь поставим вопрос: будет ли вычисленное значение надежным и достоверным, если некоторые коэффициенты системы (1)—(2) и, в частности, коэффициенты при D^2x_1 и Dx_2 в уравнении (1) и коэффициент при Dx_1 в уравнении (2) известны лишь с точностью до одной сотой? Для ответа на этот вопрос нам достаточно найти решения семейства уравнений

$$[1{,}03(1 + \varepsilon_1)D^2 + 2\,D + 1]x_1 + (1 + \varepsilon_2)Dx_2 = 0; \tag{5}$$

$$(1 + \varepsilon_3)Dx_1 + x_2 = 0 \tag{6}$$

для всех ε_1; ε_2; ε_3, удовлетворяющих неравенствам

$$-0{,}01 \le \varepsilon_1 \le +0{,}01; \tag{7}$$

$$-0{,}01 \le \varepsilon_2 \le +0{,}01; \tag{8}$$

$$-0{,}01 \le \varepsilon_3 \le +0{,}01. \tag{9}$$

Если $\varepsilon_1 = -0{,}01$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, то, как нетрудно вычислить, характерический полином системы (5)—(6) примет вид

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{10}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}5025$, $\lambda_2 = -101{,}0204$ и значение $x_1(1)$ при тех же постоянных интегрирования $C_1 = C_2 = 1$ будет равно $x_1(1) = 0{,}6050$ или всего на 0,13% больше, чем при $\varepsilon_1 = 0$.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$, то характеристический полином системы (5)—(6) примет вид:

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}03(1+0{,}01)\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda(1+0{,}01) \\ \lambda(1+0{,}01) & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0202\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{11}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}50351$, $\lambda_2 = -98{,}5074$. В этом случае $x_1(1) = 0{,}6044$ или на 0,03% больше, чем при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Это типичное, чаще всего встречающееся поведение решений: при малых изменениях коэффициентов решения изменяются мало. Однако так бывает не всегда. Если, например, $\varepsilon_1 = -0{,}01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$, то характеристический полином системы (5)—(6) примет вид

$$\det = -0{,}0004\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{12}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = +5000{,}5$ и поэтому $x_1(1)$ станет чрезвычайно большой величиной: $x_1(1) > e^{5000}$.

Отсюда сразу следует, что решение системы уравнений (1)—(2) с учетом неточности в задании коэффициентов, определяемой неравенствами (7)—(9), практически смысла не имеет и не приносит достоверной информации об истинном поведении объекта, математической моделью которого является система (1)—(2). При некоторых, вполне возможных, комбинациях погрешностей решение системы (1)—(2) делается неустойчивым и за короткое время $x_1(t)$ может стать чрезвычайно большой величиной, не имеющей ничего общего с решением системы (1)—(2) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Рассмотренный пример показывает также иллюзорность надежд многих пользователей компьютера на обеспечение надежности и достоверности вычислений путем "покачивания" коэффициентов, т. е. путем вычисления решений системы уравнений не только при номинальных значениях коэффициентов, но и при измененных значениях (на величину возможной погрешности) и в сторону уменьшения и в сторону увеличения. Если все результаты расчета при всех измененных значениях коэффициентов будут мало отличаться друг от друга, то это является сильным аргументом в пользу достоверности результатов расчета. Однако произвести такую проверку далеко не всегда возможно. Если точнее, то для простых систем, подобных системе (1)—(2), такая проверка "покачиванием" вполне возможна, но для более сложных систем она может занять совершенно не реальное время. Действительно, когда в системе (1)—(2) мы проверяли значения $x_1(t)$ при учете погрешностей трех коэффициентов, то нам нужно было проверить $2^3 = 8$ комбинаций сочетаний положительных и отрицательных значений погрешностей ε_1, ε_2, ε_3. При этом только одна комбинация ($\varepsilon_1 = -0{,}01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$) соответствовала неустойчивой системе и стремительному росту $x_1(t)$ (как известно, если хотя бы один корень характеристического полинома положителен или имеет положительную вещественную часть, то система неустойчива). Остальные семь комбинаций давали успокоительные ответы. Проверить восемь комбинаций для компьютера, конечно, совсем несложно. Однако в современной технике, как правило, приходится иметь дело с системами, состоящими из значительно большего числа уравнений. Уже система седьмого порядка в нормальной форме имеет в общем случае 49 коэффициентов и для нее, следовательно, возможны 2^{49} сочетаний положительных и отрицательных погрешностей различных коэффициентов и поэтому для обеспечения достоверности путем "покачивания" необходимо провести 2^{49} вычислений корней характеристического полинома системы. Но 2^{49} больше, чем 10^{14}. Даже для компьютера с большим быстродействием такое количество вычислений затруднительно, а при увеличении числа уравнений быстро перестает быть выполнимым.

Все сказанное относится и к более простой задаче проверки устойчивости. Если нам нужно проверить устойчивость линейной системы в нормальной форме седьмого порядка, имеющей 49 не идеально точно заданных коэффициентов с погрешностями $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, …, $\pm\varepsilon_{49}$, то для обеспечения достоверности заключения об устойчивости путем "покачивания" коэффициентов нужно провести 2^{49} вычислений характеристического полинома, что не реально.

Все сказанное не означает, естественно, что достоверность расчетов не достижима. Просто надо понимать, что обеспечение достоверности расчета при неизбежных погрешностях в исходных данных является сложной задачей. Простыми, легкими средствами ее не решить.

Для обеспечения достоверности компьютерных расчетов нужно подробно разобраться в причинах возможных ошибок, что мы и будем делать в ходе дальнейшего изложения.

Прежде всего, надо разобраться в свойствах эквивалентных (называемых также равносильными) преобразований. При этом надо разобраться как в хорошо известных свойствах этих преобразований, так и в тех свойствах, на которые долго не обращали внимания, и которые были открыты недавно в ходе исследований, выполненных в Санкт-Петербургском государственном университете (публикации [2, 3, 4, 10]).

Определение: эквивалентные (равносильные) преобразования — это преобразования, не изменяющие решений. Эквивалентность (равносильность) уравнений, неравенств и их систем означает совпадение множеств их решений (Математическая энциклопедия издания 1977 года, том 4, с. 800).

Примеры эквивалентных преобразований: умножение всех членов на число, не равное нулю, прибавление к левой и правой частям уравнения равных величин, подстановка, т. е. замена какого-либо члена уравнения на член, равный ему.

Определение показывает, что эквивалентные преобразования сохраняют неизменными решения, но совсем не обязаны сохранять некоторые ***свойства*** решений. На это обстоятельство очень долго не обращали внимания, и часто даже молчаливо считалось, что "эквивалентные преобразования ничего не меняют". На самом деле это совсем не так. Примеры эквивалентных преобразований, не изменяющих самих решений как таковых, но изменяющих их некоторые важные свойства, были приведены в [2, 3, 4, 10].

§2. Пример системы дифференциальных уравнений, не имеющей непрерывной зависимости решений от параметров

Важнейшей теоремой, лежащей в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений, является теорема о непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Как уже упоминалось, коэффициенты дифференциальных уравнений и входящие в эти коэффициенты параметры исследуемого объекта (от которых зависят коэффициенты) известны почти всегда с ограниченной, конечной точностью. Если непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров нет, то мы не можем быть уверены в том, что неизбежные сколь угодно малые отклонения истинных значений коэффициентов от принятых в расчете не приведут к большим или даже коренным различиям между результатами расчета и реальным поведением исследуемого объекта, и тогда расчет потеряет всякий смысл.

Поэтому теорема о непрерывности зависимости решений от параметров занимает центральное место в учебниках по дифференциальным уравнениям (см., например, известный учебник [1], с. 259—272 и многие другие) и подробно в них доказывается. Так, для систем в нормальной форме (т. е. записанных в виде системы из n уравнений первого порядка):

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = f_1(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m);\\
&\frac{dy_2}{dt} = f_2(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dt} = f_n(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m),
\end{aligned} \qquad (13)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — параметры, доказано, что если функции f_i непрерывны относительно всех аргументов и ограничены, а также удовлетворяют условиям Липшица относительно функций y_i, то решения $y_i(x)$ зависят от параметров λ_i непрерывно.

Условия Липшица означают, что для любой f_i выполняется неравенство:

$$\left| f_k(x;\bar{y}_1;\bar{y}_2;\ldots;\bar{y}_n;\lambda_1;\lambda_2;\ldots;\lambda_n) - f_k(x;\bar{\bar{y}}_1;\bar{\bar{y}}_2;\ldots;\bar{\bar{y}}_n;\lambda_1;\lambda_2;\ldots;\lambda_n)\right| \le \le L\cdot\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i), \qquad (14)$$

где L — постоянная Липшица, т. е. положительное число, которое может быть большим, не зависящее от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Условия Липшица необременительны и для подавляющего большинства уравнений, встречающихся в приложениях, они заведомо выполняются. Поэтому иногда упоминание об условиях Липшица опускается и теорема формулируется коротко: решения дифференциальных уравнений зависят от коэффициентов и параметров непрерывно.

Теперь идет самое интересное: в учебниках по дифференциальным уравнениям эта теорема доказана для двух крайних случаев — для систем в нормальной форме (т. е. состоящих из n уравнений первого порядка) и для одного уравнения n-го порядка. Для всего многообразия промежуточных случаев, т. е. систем, состоящих из m уравнений второго порядка; систем состоящих из уравнений третьего порядка и второго и т. д. и. т. п. — для всех этих случаев теорема в учебниках ***не доказана***.

Вместо этого существует почти всеобщая уверенность в том, что для всех систем, которые можно привести с помощью эквивалентных преобразований к нормальной форме или к одному уравнению n-го порядка, решения зависят от параметров непрерывно.

Эта уверенность основана, очевидно, на следующем рассуждении: эквивалентные преобразования, как известно, решений не изменяют. У одного уравнения n-го порядка, к которому привели исходную систему, решения те же, что были у нее. А поскольку решения уравнения n-го порядка зависят (как доказано) от параметров непрерывно, то те же самые решения исходной системы, казалось бы, тоже должны зависеть от параметров непрерывно. И все же это простое рассуждение ошибочно. Покажем это на примере.

Рассмотрим систему двух уравнений с параметром m (похожую на систему (1)—(2):

$$(D^2 + 2D + 1)x_1 + mDx_2 = 0; \qquad (15)$$

$$Dx_1 + x_2 = 0. \qquad (16)$$

Характеристический полином системы (15)—(16) равен определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & m\lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1-m)\lambda^2 + 2\lambda + 1 \qquad (17)$$

и имеет корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1-m}(-1 \pm \sqrt{m}). \qquad (18)$$

Общее решение системы (15)—(16) имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (19)$$

Из формул (18) и (19) сразу следует, что критическим значением параметра m является $m = 1$. До тех пор, пока $m < 1$ и приближается к значению $m = 1$ слева, оба корня λ_1 и λ_2 остаются отрицательными. При $m \to 1$ слева будет $\lambda_1 \to -0{,}5$, а λ_2, оставаясь отрицательным, делается очень большим по абсолютной величине. Поэтому в решении (19) при m, близких к единице, член $C_2 e^{\lambda_2 t}$ для любого t будет пренебрежимо мал, и для m, близких к единице, будет $x_1(t) \approx C_1 e^{-0{,}5t}$.

Совсем по-другому будет вести себя решение (19), если $m > 1$ и приближается к значению $m = 1$ справа. В этом случае $\lambda_1 \to -0{,}5$, а $\lambda_2 \to +\infty$. В решении (19) при m, близких к $m = 1$, будет очень большой член $C_2 e^{\lambda_2 t}$, знак которого зависит от C_2. Таким образом, для любого значения времени t зависимость величины $x_1(t)$ от параметра m терпит разрыв: при $m \to 1$ слева будет $x_1(t) \to C_1 e^{-0{,}5t}$, а при $m \to 1$ справа будет $x_1(t) \to \pm\infty$.

Таким образом, мы прямым построением убедились, что существует система дифференциальных уравнений, у которой зависимость решений от параметров не является непрерывной, имеет точки разрыва. Второй пример подобной системы будет приведен в *§3*.

§3. Пример решения технической задачи проверки устойчивости

В качестве еще одного примера рассмотрим конкретную техническую задачу — исследуем систему дифференциальных уравнений, являющуюся моделью системы управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока, работающего на механизм, у которого зависимость колебаний момента сопротивления $\varphi(t)$ от времени является стационарным случайным процессом со спектром

$$S_\varphi = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}. \qquad (20)$$

Уравнение равновесия моментов на валу электродвигателя имеет вид:

$$T_м \frac{d\omega}{dt} = M_{дв} + k\omega + M_с, \qquad (21)$$

где ω — частота вращения; $M_{дв}$ — вращающий момент на валу, пропорциональный току якоря и играющий роль управления; $k\omega$ — момент трения; M_c — момент сопротивления исполнительного механизма; T_M — механическая постоянная времени, численно равная времени разгона электродвигателя от нулевой частоты до номинальной.

Переходя от уравнения (21) к уравнениям "в отклонениях" от номинального режима, измеряя время t в долях от механической постоянной времени T_M и учитывая спектр (20) по общим правилам решения задач со стационарными возмущающими силами, получаем для случая $k = -2$ следующие уравнения электродвигателя:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3;\\ \dot{x}_3 &= x_4;\\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4,\end{aligned} \tag{22}$$

где x_1 — отклонение частоты вращения от номинальной; x_2 — отклонение тока якоря от номинального значения, играющее роль управления; x_3 — отклонение момента сопротивления от его среднего значения; x_4 — производная от x_3.

Если управляющее воздействие формировать согласно известной методике аналитического конструирования регуляторов как линейную комбинацию от переменных состояния, то уравнение регулятора примем имеющим вид:

$$x_2 = -x_1 - 2\,x_3 - x_4. \tag{23}$$

В уравнении (23) коэффициенты усиления регулятора для облегчения проверки последующих выкладок выбраны округленными до целых чисел, однако в целом уравнения (22)—(23) — всего это четыре уравнения для четырех переменных x_1; x_2; x_3; x_4 — описывают вполне реальную систему управления частотой вращения.

Следует учесть также, что переменные x_3 и x_4 не могут быть использованы в регуляторе, поэтому после исключения их из уравнений (22)—(23) приходим к следующим уравнениям, связывающим переменные x_1 и x_2, т. е. регулируемую частоту и управляющее воздействие (через $D = \dfrac{d}{dt}$ обозначен оператор дифференцирования):

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2; \tag{24}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2. \tag{25}$$

Уравнение (24) является уравнением электродвигателя как объекта управления, уравнение (25) — уравнением регулятора.

Система уравнений (24)—(25), рассматриваемая совместно, описывает замкнутую систему управления.

Характеристический полином системы (24)—(25) равен следующему определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^2 \tag{26}$$

и имеет корни: $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (кратный корень).

Поэтому решение $x_1(t)$ имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{-3t} + (C_2 t + C_3) e^{-t}, \tag{27}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

Однако это решение изменяется коренным образом при сколь угодно малых изменениях некоторых коэффициентов системы (24)—(25). Пусть, например, коэффициент при Dx_2 в уравнении (25) равен не единице, а $(1 + \varepsilon)$, где ε — число, малое в сравнении с единицей, и система (24)—(25) приняла вид:

$$\left.\begin{aligned} &(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2; \\ &(D^2 + 4D + 5)x_1 = [(1+\varepsilon)D + 1]x_2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Ее характеристический полином, равный определителю

$$\begin{aligned} \det &= \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -[(1+\varepsilon)\lambda + 1] \end{vmatrix} = \\ &= -\varepsilon\lambda^4 + (1 - 4\varepsilon)\lambda^3 + (5 - 5\varepsilon)\lambda^2 + (7 - 2\varepsilon)\lambda + 3, \end{aligned} \tag{29}$$

становится полиномом четвертой степени и помимо трех корней, близких (при малых ε) к прежним значениям $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, он получает (при $\varepsilon > 0$) большой положительный корень λ_4, приближенно (при малых ε) равный $\lambda_4 \approx \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Поэтому в решении $x_1(t)$ системы (28) уже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ появится четвертый, стремительно растущий член:

$$C_4 e^{+\frac{1}{\varepsilon}t}. \tag{30}$$

Следствие: все поведение решений системы (24)—(25) изменяется коренным образом при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов. Непрерывной зависимости решений от этих коэффициентов или от параметров, от которых они зависят в системе (24)—(25), в данном случае нет.

Решения системы (24)—(25), как показывает формула (27) — устойчивы, но уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ устойчивость теряется (любопытно, что при малых $\varepsilon < 0$ устойчивость сохраняется).

Важно отметить, что всех этих важных свойств решений системы (24)—(25) мы не увидим, если эта система будет приведена к нормальной форме, к системе уравнений первого порядка. В нормальной форме система (24)—(25) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 - x_3; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 2x_3. \end{aligned} \tag{31}$$

Ее характеристический полином, равный определителю

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1)^2, \qquad (32)$$

полностью совпадает с полиномом (26). Это говорит о том, что система (31) эквивалентна системе (25)—(26) и имеет те же решения вида (27), что и система (25)—(26).

Однако свойства решений будут совсем другими. У системы (31) ее решения (согласно теореме, рассмотренной в *§2*) будут непрерывно зависеть от коэффициентов. Непрерывную зависимость решений системы (31) от любых ее коэффициентов легко проверить и прямым расчетом. А у эквивалентной ей системы (25)—(26) непрерывной зависимости решений от коэффициентов нет.

Решения системы (31) сохраняют устойчивость при малых изменениях любых своих коэффициентов. В то же время решения системы (25)—(26) могут терять устойчивость даже при сколь угодно малых изменениях некоторых коэффициентов. Между тем традиционные методы численного решения систем дифференциальных уравнений, воплощенные в известных пакетах прикладных программ — таких, как *MATLAB*, *Mathcad* и др., — включают в себя приведение исходной системы к нормальной форме, к форме *n* уравнений первого порядка. Такое приведение очень удобно, поскольку позволяет одной программой охватить все многообразие различных систем, состоящих из уравнений разных порядков. Однако мы убедились, что существуют системы, для которых традиционное решение через приведение к нормальной форме не отражает истинных свойств исследуемого объекта. Система управления электродвигателем, математической моделью которой является система (25)—(26), теряет устойчивость и коренным образом изменяет свои свойства при сколь угодно малых вариациях некоторых своих параметров, но традиционные методы решения этого не скажут.

§4. Выводы

Рассмотренные нами простые примеры (которые, при желании, можно дополнить многочисленными подобными примерами, ранее опубликованными в [2, 3, 4]) позволяют сделать следующие важные выводы:

1. Существуют эквивалентные (равносильные) преобразования уравнений, которые не изменяют самих решений, но могут изменять некоторые их свойства.
2. Существуют математические модели, для которых традиционные методы решения, использующие эквивалентные преобразования, приводят к неверным выводам о свойствах решений. Такие математические

модели мы назовем "особыми", поскольку для большинства математических моделей традиционные методы дают, разумеется, правильные результаты.

3. Существуют (в технике, в физике, в экономике) "особые" объекты (описываемые "особыми" математическими моделями), для которых традиционные методы проектирования и расчета, использующие эквивалентные преобразования, дают неверные предсказания о свойствах объекта. По расчету, например, может казаться, что объект устойчив и обладает хорошими запасами устойчивости, а на самом деле запасы устойчивости очень малы и при неизбежных в ходе эксплуатации малых изменениях параметров объект может в непредвиденный момент времени потерять устойчивость, "пойти в разнос" и стать причиной тяжелой аварии и даже катастрофы. Подобные аварии и катастрофы неоднократно происходили. Некоторые из них описаны в [4]. Поэтому "особые" объекты очень опасны. Мы называем их "особыми", поскольку они встречаются сравнительно редко, но пренебрегать ими ни в коем случае нельзя, поскольку каждая непредвиденная встреча с "особым" объектом может стать причиной катастрофы. Заметим еще, что раньше, когда расчеты проводились вручную, интуиция опытных инженеров до известной степени предостерегала от "особых" объектов. В последние десятилетия почти все расчеты ведутся с использованием вычислительных машин, а машина интуицией не обладает. Для обеспечения достоверности компьютерных расчетов необходимо использовать усовершенствованные программы, учитывающие недавно открытые свойства эквивалентных преобразований и особенно — такое свойство, как возможность изменения некоторых важных характеристик решений после эквивалентных преобразований.

Действительно, посмотрим еще раз: что произойдет, если в ходе проектирования системы управления электроприводом математической моделью проектируемой замкнутой системы окажутся дифференциальные уравнения (24)—(25) с характеристическим полиномом (26)?

Если об устойчивости системы мы будем (как это рекомендуется в учебниках) судить по расположению корней характеристического полинома на комплексной плоскости, то мы должны будем сделать вывод о том, что проектируемая система устойчива и сохраняет устойчивость при довольно существенных отклонениях параметров системы от расчетных значений. К такому же точно выводу мы должны будем придти и после детального расчета процессов на ЭВМ с использованием пакетов прикладных программ *MATLAB, Mathcad* и др. Все эти программы (использующие приведение исследуемой системы (24)—(25) к нормальной форме (31)) еще раз подтвердят, что проектируемая система устойчива и сохраняет устойчивость при вариациях параметров, имеет хорошие переходные процессы и ее вполне можно рекомендовать к изготовлению и "воплощению в металле". Но изготовленная система обманет ожидания проектантов и жестоко их подведет: при изготовлении невозможно идеально точно воспроизвести расчетные параметры, и поэтому математической моделью изготовленной системы могут оказаться не уравнения (25)—(26), а уравнения (28), где вариация ε может быть равна, например, $\varepsilon = -0{,}001$ (такое малое отклонение — всего в одну тысячную — практически устранить невозможно). Но система (28) при $\varepsilon = -0{,}001$ — устойчива, и поэтому изготовленная система на испытаниях покажет вполне хорошую работу. Система будет обладать малыми запасами устойчивости, но их величину на испытаниях не проверить. Испытания покажут только сам факт устойчивости или неустойчивости, а величину запасов устойчивости дает расчет. Поскольку система управления частотой вращения электропривода (математической моделью которой являются уравнения (25)—(26)) является особым объектом, то традиционные методы расчета дадут неверный результат: по расчету будет казаться, что все хорошо, а на самом деле запас устойчивости очень мал. Но поскольку система управления успешно прошла испытания, и по расчету все в порядке, то ее могут со спокойной совестью поставить на самый ответственный объект — например, на самолет. Некоторое время самолет будет исправно летать, но в ходе эксплуатации, как известно, параметры любых объектов не остаются идеально постоянными. Они немного изменяются, происходит, как говорят техники, малый "дрейф" параметров, в ходе которого исходное значение $\varepsilon = -0{,}001$ может постепенно перейти в $\varepsilon > 0$ (такие изменения — порядка одной тысячной от первоначального значения — практически неизбежны). Но как только в заранее непредвиденный момент времени "дрейф" параметров приведет к тому, что вместо $\varepsilon < 0$ станет $\varepsilon > 0$, то система регулирования частоты вращения сразу потеряет устойчивость, "пойдет в разнос" и создаст аварийную ситуацию, которая может привести к тяжелой аварии и даже катастрофе самолета. Подобные аварии и катастрофы неоднократно происходили. Они описаны, например, в [4] и в [26]. В ходе дальнейшего изложения подобные катастрофы, их характерные черты и методы их предотвращения будут подробно рассмотрены. Будут изложены и усовершенствованные методы расчета, позволяющие обеспечивать достоверность результата и для особых систем.

Основной и главный вывод: необходимо ввести в практику вычислений и в преподавание в вузах усовершенствованные методы расчетов, учитывающие открытые не так давно в Санкт-Петербургском государст-венном университете новые свойства эквивалентных преобразований и "особых" технических объектов. Если этого не сделать, то будут неизбежно продолжаться аварии и катастрофы при каждой новой встрече с особым объектом.

Глава 2. Корректность решений и традиционные методы ее проверки

§1. Вариации коэффициентов и параметров

В дальнейшем мы будем изучать поведение различных объектов техники, физики, экономики при изменениях их параметров и будем изучать поведение математических моделей исследуемых объектов при вариациях коэффициентов математических моделей, порожденных изменениями параметров объекта.

Введем определения.

Будем полагать, что истинные, но неизвестные нам, значения коэффициентов $\overline{m}_i$ математической модели находятся внутри интервала

$$m_i(1 \pm \varepsilon_i), \tag{1}$$

или, что то же самое — подчинены неравенствам:

$$m_i(1-\varepsilon_i) \le \overline{m}_i \le m_i(1+\varepsilon_i), \tag{2}$$

где m_i — номинальные значения коэффициентов, принятые при расчете, а ε_i — числа, малые в сравнении с единицей; конкретные значения этих чисел определяются каждый раз свойствами того или иного конкретного объекта.

Величины $m_i\varepsilon_i$ будем называть вариациями номинальных коэффициентов m_i.

Из неравенств (2) сразу следует, что если какой-либо коэффициент m_i равен нулю, то и его вариация равна нулю, т. е. "нуль не варьируется".

Заметим сразу, что если в основу определения вариаций коэффициентов положены неравенства (2), то это означает, что в дальнейшем будут рассматриваться только относительные вариации коэффициентов, а не абсолютные, т. е. не будут рассматриваться "вариации нуля". Такой подход, разумеется, не является единственно возможным. Существуют такие объекты и такие задачи их исследования, в которых можно рассматривать превращения некоторых нулевых коэффициентов в ненулевые. Подобные задачи рассматриваются, например, в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, имеющих малые коэффициенты при старших производных. В теории сингулярно возмущенных уравнений могут рассматриваться, например, изменения решений, происходящие при переходе от уравнения

$$\dot{x} + x = 0 \tag{3}$$

(которое можно, разумеется, рассматривать как уравнение

$$0 \cdot \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{4}$$

с нулевым коэффициентом при старшей производной) к уравнению

$$\varepsilon \cdot \ddot{x} + \dot{x} + x = 0\,, \tag{5}$$

где ε — малое число, не равное нулю. Понятно, что решения уравнения (5) почти всегда будут существенно отличаться от решений уравнения (4), даже при сколь угодно малых ε.

Теория сингулярно возмущенных уравнений является важной (и весьма сложной) теорией, но она не имеет почти ничего общего с той теорией, которая будет далее изложена, и которая опирается на определение вариаций через неравенства (2), исключающие вариации нулей.

В дальнейшем изложении будет использоваться понятие "ε-окрестности" системы автономных дифференциальных уравнений. Коэффициенты такой системы можно нумеровать, обозначать числами от m_1 до m_k. Примером может служить система

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= m_1 x_2; \\ \dot{x}_2 &= m_2 x_1 + m_3 x_2 + m_4 x_2^3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

с четырьмя коэффициентами.

Определение: ε-окрестностью рассматриваемой системы назовем семейство дифференциальных уравнений той же структуры, коэффициенты которых, обозначаемые через $\overline{m}_i$, подчинены неравенствам (2).

Теорема: если нулевое решение рассматриваемой системы устойчиво, то для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях коэффициентов, подчиненных неравенствам (2), необходимо и достаточно, чтобы в ее ε-окрестности находились только те системы, у которых нулевое решение устойчиво.

Доказательство: если в ε-окрестности находится хотя бы одна система, нулевое решение которой неустойчиво, то при вариациях коэффициентов рассматриваемой системы они могут совпасть с коэффициентами именно этой неустойчивой системы, и тогда решение станет неустойчивым. Это доказывает необходимость условия теоремы. Достаточность очевидна: если в ε-окрестности нет ни одной системы, нулевое решение которой было бы неустойчивым, то при любых вариациях коэффициентов, удовлетворяющих неравенствам (2), устойчивость нулевого решения рассматриваемой системы сохраняется.

Понятие "ε-окрестности" системы будет использовано позже при анализе свойств эквивалентных преобразований.

§2. Вариации решений. Корректные и некорректные решения

При вариациях коэффициентов уравнения (или системы уравнений) его решения также, разумеется, будут испытывать вариации. Зависимость вариаций решений от вариаций коэффициентов может быть различной. Поясним это на простом примере. Пусть изгородью длиною "a" метров нужно огородить прямоугольный участок земли площадью "b" квадратных метров. Обозначив длины сторон прямоугольника через x_1 и x_2, можно составить уравнения:

$$2(x_1 + x_2) = a\,; \tag{7}$$

$$x_1 \cdot x_2 = b\,. \tag{8}$$

Решая их, нетрудно установить, что x_1 и x_2 будут двумя решениями квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{a}{2}x + b = 0,$$

$$\text{т. е. } x_1 = \frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a^2}{16} - b}\,;\; x_2 = \frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a^2}{16} - b}\,. \tag{9}$$

На рис. 1 показаны зависимости x_1 и x_2 от коэффициента b для случая $a = 8$ м.

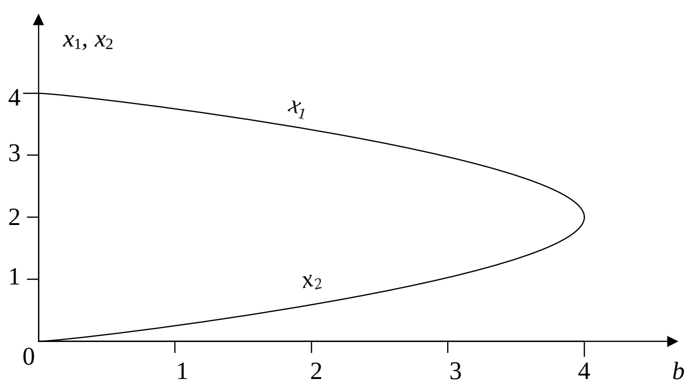

Рис. 1

Мы убеждаемся, что при $b < 4$ м^2 значения x_1 и x_2 зависят от "b" непрерывно. Сколь угодно малым изменениям коэффициента b (площади огораживания) соответствуют сколь угодно малые изменения x_1 и x_2. Так, если $b = 3$, то $x_1 = 3$; $x_2 = 1$. Если $b = 3 - \varepsilon$, то из формул (9) следует, что

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 + \varepsilon} = 2 \pm (1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots)\,. \tag{10}$$

Формула (10) подтверждает непрерывную зависимость x_1 и x_2 от площади огораживаемого участка при $b < 4$. Однако уже при $b = 4$ непрерывная зависимость исчезает: если $b = 4 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то уже при сколь угодно малых ε вещественные решения исчезают, переходят в комплексные; в этом случае

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-\varepsilon}, \tag{11}$$

и уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ вещественных решений нет. Непрерывная зависимость x_1 и x_2 от b при $b = 4$ исчезает.

Практически это означает, что если площадь участка больше, чем 4 м^2, то огородить его изгородью длиной 8 м нельзя. Длины изгороди не хватит.

Наиболее интересен случай, когда $b = 4$ м^2 (или, для общего случая, когда $b = \dfrac{a^2}{16}$). В этом случае, используя формулы (9), получаем простое решение:

$$x_1 = x_2 = \frac{a}{4}. \tag{12}$$

Это решение практического смысла не имеет, потому что оно может измениться коренным образом при сколь угодно малых (а значит и совершенно неизбежных на практике) вариаций параметра b (огораживаемой площади), при сколь угодно малых (а значит — неизбежных) погрешностях при ее измерении.

Далее мы увидим, что подобные явления (отсутствие непрерывной зависимости от коэффициентов и параметров) встречаются довольно часто и имеют большой практический смысл. Поэтому введем важные ***определения***:

1. Корректными назовем решения, которые зависят от коэффициентов и параметров непрерывно. Сколь угодно малым изменениям коэффициентов и параметров соответствуют сколь угодно малые изменения решений.
2. Некорректными назовем решения, не имеющие непрерывной зависимости от коэффициентов и параметров. Некорректные решения могут изменяться на конечные величины, или даже вообще измениться коренным образом при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров.

Пример: решение только что рассмотренной задачи об огораживании при $a = 8$ и $b = 3$ корректно. При $a = 8$ и $b = 4$ решение той же задачи — решением в данном случае являются числа $x_1 = x_2 = 4$ — некорректно; при $b = 4 + \varepsilon$ решение меняется коренным образом (исчезает) даже при сколь угодно малых ε.

Дальнейшее изложение будет основываться на приведенных вполне точных определениях корректных и некорректных решений.

Отметим, что в более ранних учебниках и учебных пособиях в основу изложения было положено не определение корректного (или некорректного) решения, а определение корректно или некорректно поставленной задачи.

Так, в наиболее распространенном учебнике [5] та или иная задача называется корректно поставленной (корректной), если она удовлетворяет следующим трем условиям:

- решение существует;
- решение единственно;
- решение устойчиво, т. е. оно зависит от исходных данных, от коэффициентов и параметров непрерывно.

Если рассматриваемая задача не удовлетворяет хотя бы одному из этих трех условий, то она называется некорректной (некорректно поставленной).

Данное определение неудачно, поскольку далеко не каждую задачу, не имеющую решения, или имеющую множество решений, целесообразно относить к некорректным. Так, например, простое уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений в поле действительных чисел; уравнение $\sin x = 0$ имеет бесчисленное множество решений: $x = n\pi$, но задачи нахождения их решений никак не отнесешь к некорректным. Специфику некорректных задач отражает лишь третье условие (точнее — невыполнение третьего условия), а введение первого и второго условия растворяет действительно некорректные задачи в необъятном море задач, в которых решение не существует или не является единственным. А если сам объект исследования (некорректность) точно не определен, то ни о какой "математической строгости" говорить уже не приходится. Было бы, разумеется, желательно использовать более точные определения корректных и некорректных задач, но это сделать трудно, поскольку приведенное ранее определение, состоящее из трех условий, сделалось уже привычным и общепринятым. Введение нового определения корректных и некорректных задач может вызвать путаницу. Для избежания путаницы в дальнейшем изложении мы будем брать за основу не определение корректных и некорректных задач, а определение корректных и некорректных решений.

Следующим важным объектом исследования, также нуждающимся в хорошем определении, являются плохо обусловленные решения и плохо обусловленные задачи.

Определение: плохо обусловленным решением назовем решение, существенно изменяющееся при малых изменениях исходных условий, коэффициентов и параметров. Плохо обусловленной системой уравнений назовем ту, решения которой являются плохо обусловленными.

Сразу видно, что это определение не является полным, не является замкнутым, не позволяет без дополнительных уточнений судить о плохой или хорошей обусловленности решения. Для того чтобы определение получило точный смысл, нужно дополнительно определить — какое именно изменение коэффициентов и параметров считать "малым" и какое изменение решения считать существенным.

Пример. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 100 & 90 \\ 90 & 100 \end{vmatrix} = 1900. \tag{13}$$

Если элементы первого столбца изменятся на ±1%, то решение (величина определителя) может стать, например, равным:

$$\begin{vmatrix} 100(1-0{,}01) & 90 \\ 90(1+0{,}01) & 100 \end{vmatrix} = 1719, \tag{14}$$

т. е. изменится на 9,53%.

Если мы будем считать изменение элементов первого столбца на ±0,01 малым изменением, а изменение решения на ±5% — существенным изменением, то в этом случае решение задачи вычисления определителя (13) будет плохо обусловленным. Если же будем считать существенным изменение решения не менее, чем на 10%, то в этом случае решение задачи вычисления того же определителя уже не будет плохо обусловленным.

Непосредственно видно, что некорректное решение является частным, предельным случаем решения плохо обусловленного — когда место "малого" изменения коэффициентов и параметров занимает "сколь угодно малое" изменение, а место "существенного" изменения решения задачи занимает "конечное" изменение, изменение на любую конечную, а не сколь угодно малую величину.

Определение некорректного решения уже само по себе является полным, вполне замкнутым, никаких уточнений не требует. Поэтому выявление некорректных решений значительно проще, чем плохо обусловленных и именно с проверки возможной некорректности решения нужно начинать решение всех практических задач.

§3. Традиционные методы проверки корректности. Ошибки и заблуждения

Поскольку сколь угодно малые отклонения действительных значений коэффициентов и параметров математической модели от их расчетных значений в технических задачах неизбежны, то расчет объектов, математические модели которых имеют некорректные решения, чаще всего не имеет смысла и может привести к серьезным ошибкам. Существуют особые методы подхода к задачам с некорректными решениями (регуляризация и т. п.), о которых мы далее расскажем, но если не заметить некорректности решения и решать задачу с некорректными решениями обычными методами, как задачу корректную, то ошибки почти всегда неизбежны.

Поэтому перед практическим использованием решения любой технической или экономической задачи следует обязательно проверить — будет ли это решение корректным.

Существуют два основных метода проверки корректности:

1. Индивидуальная проверка.
2. Использование результатов исследования корректности для различных классов математических моделей.

Индивидуальная проверка заключается в том, что вычисление решения повторяется несколько раз, причем каждый раз — при немного измененных значениях коэффициентов и параметров (иногда этот подход называют "методом "покачивания" коэффициентов").

Пример индивидуальной проверки уже приводился в первой главе, и там же было показано, что в задачах с большим количеством коэффициентов и параметров для проверки корректности может потребоваться огромное количество повторных вычислений — порядка 2^n, где n — число коэффициентов и (или) параметров, влияние вариаций которых на корректность решения мы хотим исследовать.

Поэтому наиболее удобным и выгодным является использование второго метода проверки — использование ранее проведенного исследования корректности решений сразу для целых классов математических моделей.

Пример № 1

Задан полином

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{15}$$

и требуется вычислить его корни, которые могут быть и комплексными.

Известно и давно доказано, что положение корней полинома любой степени на комплексной плоскости зависит от коэффициентов полинома непрерывно. При сколь угодно малых вариациях коэффициентов полинома положение его корней на комплексной плоскости изменится мало. Поэтому задача вычисления любого полинома (15) имеет корректное решение. Индивидуальная проверка не нужна.

Пример № 2

Задан тот же полином (15), но на этот раз рассматриваются задачи, в которых физический смысл имеют только вещественные корни; примером может служить уже рассмотренная задача о длине сторон изгороди, огораживающей прямоугольный участок заданной площади. Длины сторон могут быть только вещественными, но не комплексными числами, и ранее, в §2, было показано, что уже для полинома второй степени задача вычисления вещественных корней может иметь некорректное решение. Более полный ответ на вопрос о корректности решений выглядит так: если в числе корней полинома (15) оказались кратные, то решение задачи вычисления его вещественных корней — некорректно. При сколь угодно малых изменениях коэффициентов полинома решение может измениться коренным образом, пара вещественных кратных корней может исчезнуть.

Мы убеждаемся, что проверка корректности решения на основе общих теорем гораздо проще, чем индивидуальная проверка каждой корректной задачи. Однако при использовании общих теорем можно натолкнуться на ошибки и заблуждения.

Пример № 3

Решение задачи об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для случая, когда корни характеристического полинома системы лежат в левой половине комплексной плоскости, но не на мнимой оси, традиционно считалось корректным. Действительно, казалось очевидным, что при сколь угодно малом изменении коэффициентов характеристического полинома его корни (зависящие от коэффициентов непрерывно) не могут "перепрыгнуть" из левой полуплоскости в правую.

При этом — как ни странно — в течение многих десятилетий никем не замечалось, что при сколь угодно малых вариациях коэффициентов системы дифференциальных уравнений может измениться степень характеристического полинома (как это было показано в *главе 1* на примере рассмотренной там системы (28)), а это означает, что у него могут появиться новые корни, в том числе и лежащие в правой полуплоскости комплексного переменного. Таким образом, решение задачи об устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в общем случае некорректно.

Этот результат (впервые опубликованный в [2]) очень важен. Он раскрывает причину многих происходивших в последнее время аварий и катастроф и позволяет избежать таких аварий в будущем.

Мы еще раз убеждаемся, что математика не является застывшей и завершенной наукой. Даже в сравнительно элементарных ее разделах — таких как линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, и даже в свойствах простейших эквивалентных преобразований были в конце XX века сделаны неожиданные открытия, заставившие во многом по-новому взглянуть на проблему обеспечения надежности и достоверности математических вычислений и расчетов.

Так, например, при проверке корректности решений можно, разумеется, пользоваться результатами исследования корректности решений целых классов математических задач, но нужно помнить, что некоторые теоремы о корректности и некорректности, которые ранее считались доказанными, на самом деле неверны и требуют уточнения.

Без такого уточнения — которое мы приведем в последующих главах — надежность и достоверность результатов расчета обеспечена не будет. Связано все это с тем, что в конце XX века неожиданно обнаружили новые свойства у эквивалентных (равносильных) преобразований. А поскольку эти преобразования используются самым широчайшим образом и пронизывают собой всю математику сверху донизу, то и оказалось, что многие математические теоремы потребовали уточнения.

К рассмотрению недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований мы перейдем в следующей главе.

Глава 3. Эквивалентные (равносильные) преобразования и их недавно обнаруженные новые свойства

§1. Преобразования, эквивалентные в классическом смысле

Эквивалентные преобразования, которые называют еще равносильными преобразованиями (оба названия равноправны), применяются в математике очень давно, а в настоящее время изучаются в средней школе. Давно было замечено, что такие преобразования, как:

- перенос членов уравнения из левой части в правую с изменением знака;
- умножение всех членов на число, не равное нулю;
- подстановка, т. е. замена какого-либо члена уравнения на равный ему (а также и многие другие преобразования),

способны упростить уравнения и в то же время не изменяют их решений.

Общее определение: эквивалентными (равносильными) преобразованиями называют те, при которых исходная и преобразованная системы уравнений эквивалентны (равносильны) одна другой, т. е. имеют одно и то же множество решений. Определения эквивалентных друг другу систем уравнений приведены в известных справочных изданиях [6, 7].

При этом, разумеется, надо оговаривать — какой именно смысл вкладывается в понятие "решение". Так, например, уравнение

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

и уравнение

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1 = 0 \tag{2}$$

эквивалентны между собой, если решениями могут быть только действительные числа, и будут неэквивалентны, если в качестве решений допускаются и комплексные числа.

Отметим, что в определение эквивалентного преобразования входит только тождество решений исходной и преобразованной системы. Никакие другие условия (однозначность преобразования, взаимная обратимость и т. п.) обязательными не являются и в определение эквивалентного (равносильного) преобразования не входят.

Простота и прозрачность простых эквивалентных преобразований привела к тому, что многие математики, а за ними инженеры и пользователи компьютеров стали верить, что эквивалентные преобразования "ничего не меняют", и стали пользоваться ими не только широко, но и безоглядно. Мы убедимся далее, что такое безоглядное использование эквивалентных преобразований неверно и опасно, оно может привести к серьезным ошибкам. Эквивалентные преобразования, согласно классическому определению, не меняют самих решений как таковых. Но они совсем не обязаны сохранять неизменными некоторые важные ***свойства*** решений — такие, например, как параметрическая устойчивость, непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров и т. п. Многочисленные примеры таких изменений мы далее приведем. Любопытно отметить, что это простое обстоятельство было открыто и истолковано совсем недавно и повлекло за собой много интересных и важных следствий.

Полезно ввести и использовать некоторые уточнения в понятие эквивалентного преобразования. Рассмотрим, например, простую систему:

$$2x - 3y = 1; \tag{3}$$

$$2x + 3y = 9, \tag{4}$$

имеющую решения: $x = 2$; $y = 1$. Если мы сложим уравнения (3) и (4), то получим уравнение

$$5x = 10 \tag{5}$$

с решением $x = 2$.

Будет ли уравнение (5) эквивалентно системе (3)—(4)? Формального соответствия приведенному нами определению эквивалентных систем здесь нет: множество решений уравнения (5) уже множества решений системы (3)—(4), поскольку решение $y = 1$ исчезло (при этом уравнение (5) можно, разумеется, рассматривать как систему, состоящую из одного уравнения). Однако по отношению к переменной x система (3)—(4) и уравнение (5) эквивалентны и подобные преобразования полезны. Они используются, например, в известном классическом методе Гаусса решения систем линейных уравнений.

Поэтому полезно ввести для подобных преобразований название и определение.

Назовем эквивалентными по отношению к интересующим нас решениям преобразования, которые сохраняют неизменными эти решения (но не обязательно сохраняют решения, не интересующие нас). Примером может служить преобразование системы (3)—(4) в уравнение (5). Это преобразование эквивалентно в отношении переменной x, но не в отношении переменной y.

Используют также преобразования, не изменяющие решений исходного уравнения, но вводящие новые решения, которые исходному уравнению не удовлетворяют. Пример: в уравнении

$$\sqrt{6 - x} = x \tag{6}$$

можно левую и правую части умножить на равные величины — левую на $\sqrt{6-x}$, правую — на x (поскольку $x = 0$ решением не является). Придем к уравнению

$$6 - x = x^2, \tag{7}$$

имеющему два решения: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Проверка показывает, что $x = 2$ является решением исходного уравнения (6), а $x = -3$ решением не является.

Подобные преобразования, добавляющие новые решения, не удовлетворяют определению эквивалентного преобразования, но они полезны и широко используются. Действительно, какие бы преобразования мы не использовали, полученные решения все равно надо проверять подстановкой в исходное уравнение; при этом лишние решения будут отсеяны.

Преобразованные уравнения, содержащие лишние решения, лишние корни, было предложено называть "следствиями" исходных уравнений. Термин "следствие" используется, например, в известном пробном учебнике по алгебре для 10—11 классов средней школы [8]. Однако термин "следствие" еще не общепринят. Мы будем пользоваться термином "не полностью эквивалентное преобразование", определив его как преобразование, которое становится эквивалентным после исключения лишних решений (т. е. решений, не удовлетворяющих исходному уравнению или системе уравнений). Такие преобразования широко используются при вычислениях и являются вполне законным средством исследования.

§2. Преобразования, связанные с дифференцированием

Еще одним примером того, насколько важны в математике точные определения, является дискуссия, возникшая после выхода в свет в 1999 году первого издания книги [4]. В ней указывалось, что при преобразованиях, связанных с дифференцированием, необходимо учитывать дополнительные начальные условия (заметим, кстати, что преобразованиями, связанными с дифференцированием, пользовался еще Л. Эйлер (*L. Euler*, 1707—1783).

Действительно, если мы рассматриваем, например, уравнение первого порядка:

$$\dot{x} + x = 0 \tag{8}$$

с начальным условием $x(0) = 0$, то это уравнение имеет, как легко проверить, единственное решение $x(t) = 0$. Если мы продифференцируем все члены уравнения (8), то оно преобразуется в уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0. \tag{9}$$

Для того чтобы решение уравнения второго порядка стало вполне определенной функцией, уравнение надо дополнить вторым начальным условием, условием для первой производной в точке $t = 0$. Однако это второе начальное условие не произвольно, оно полностью следует из решения $x(t)$ исходного уравнения первого порядка. Действительно, из решения $x(t) = 0$ уравнения (8) следует, что при $t = 0$ будет $\dot{x}(0)=0$. Именно это второе (и единственно правильное) начальное условие следует добавить к преобразованному уравнению (9). С учетом условий $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0)=0$ решением уравнения (9) будет функция $x(t) = 0$ и почленное дифференцирование станет, как и должно быть, эквивалентным преобразованием.

Некоторые математики возражали против признания почленного дифференцирования эквивалентным преобразованием, ссылаясь на то, что уравнение (8) имеет "общее решение"

$$x = C_1 e^{-t}, \tag{10}$$

а уравнение (9) имеет "общее решение"

$$x = C_1 e^{-t} + C_2. \tag{11}$$

Из несовпадений "общих решений" (10) и (11) некоторыми математиками делался ошибочный вывод о том, что почленное дифференцирование не является эквивалентным преобразованием. Источником ошибок явилась неточность в названиях и определениях: сложившийся еще в XVIII веке и с тех пор традиционно использующийся термин "общее решение дифференциального уравнения" неточен: "общие решения", включающие в себя постоянные интегрирования C_1; C_2; …; C_n более правильно следует называть "семействами решений", поскольку еще начиная с О. Коши (*Cauchy*, 1789—1857) под решением дифференциального уравнения понимают конкретную функцию $x(t)$, определяемую как самим дифференциальным уравнением, так и начальными (или граничными) условиями.

Лучший путь к избежанию ошибок и недоразумений — это использование точных и однозначных определений.

Заметим, что линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами удобно записывать в виде произведения искомой функции на операторный полином (полином, в котором роль переменной играет оператор дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$). Так, например, уравнение

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t \tag{12}$$

удобно записать в виде

$$(D^2 + 2D + 5)x = \sin t. \tag{13}$$

Комбинируя почленное дифференцирование всех членов уравнения с такими эквивалентными преобразованиями, как умножение всех членов на число, не равное нулю, и прибавление к левым и правым частям равных величин, нетрудно доказать, что не только почленное дифференцирование, но и умножение левой и правой части уравнения на любой операторный полином вида

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 \tag{14}$$