А. Б. Скопенков

Объемлемая однородность

МЦНМО

УДК 515.1
ББК 22.152
С44

Скопенков А. Б.
Объемлемая однородность
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
27 с.
ISBN 978-5-4439-2039-9

Брошюра написана по материалам миникурса в летней школе «Современная математика» в Дубне в 2009 г. и доклада на семинаре по геометрии им. И. Ф. Шарыгина в 2010 г.

Понятие объемлемой однородности возникает из простых «физических» вопросов. Введение доступно школьнику (кроме его последнего пункта, где требуется понятие непрерывного отображения между подмножествами плоскости). Далее практически «школьными» методами мы получим характеризацию объемлемо однородных подмножеств плоскости. В этой части уже необходимо знакомство с открытыми и замкнутыми множествами на прямой и плоскости. Затем выясняется, что понятие объемлемой однородности связано со многими важными теориями и результатами — теорией динамических систем, многообразий и групп Ли, пятой проблемой Гильберта и проблемой Гильберта–Смита. Приложение доступно студенту, знакомому с этими понятиями.

Брошюра адресована широкому кругу людей, интересующихся математикой. Она может быть интересным «легким чтением» для профессиональных математиков.

Подготовлено на основе книги: *А. Б. Скопенков*. Объемлемая однородность. — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2039-9

Оглавление

Посвящается памяти В. И. Арнольда

Советы читателю

Начать читать брошюру разумно с введения. Его три пункта практически независимы друг от друга, и их можно читать в произвольном порядке. Впрочем, они расположены в порядке возрастания сложности. В дальнейшем из введения используется только пункт 1.2.

Оставшиеся параграфы практически независимы друг от друга, и их можно читать в произвольном порядке. Впрочем, они расположены в порядке возрастания сложности.

Основное содержание брошюры — утверждение 2 из пункта 1.2, его доказательство в § 3 и его обобщения в параграфах 4 и 5.

В брошюре много задач, обозначаемых жирными цифрами. Большинство задач несложны. При этом, если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать. Формулировки задач нужно прочитать — это поможет вам понять текст, даже если вы не сможете решить задачи. Если некоторые встречающиеся, но не определенные понятия вам незнакомы, то можно или игнорировать соответствующую задачу, или узнать определение (у преподавателя, в wikipedia, в книгах...). Двумя звездочками отмечены задачи, решение которых мне неизвестно.

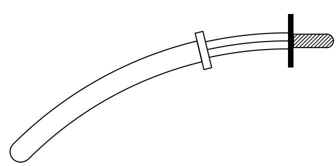
Обновляемая версия поддерживается на http://arxiv.org/abs/1003.5278.

Благодарности

Автор благодарен В. Клепцыну, Г. Мерзону и А. Сосинскому за полезные замечания и обсуждения. Автор был поддержан грантом фонда Саймонса.

§ 1. Введение

1.1. Изометрическая объемлемая однородность



Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Переформулируя этот вопрос на математическом языке, мы приходим к следующему определению.

Определение. Подмножество N пространства $\mathbb{R}^m$ (в частности, плоскости $\mathbb{R}^2$ или трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$) называется *изометрически объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т. е. изометрия) пространства, переводящее x в y, а N в себя.

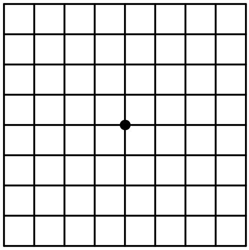


Рис. 1. Решетка

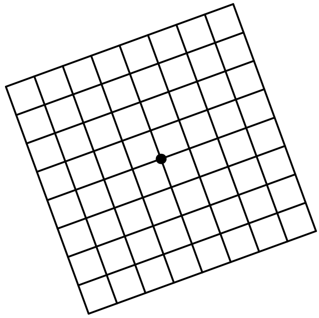


Рис. 2. Образ решетки при движении

Напомним, что движением (т. е. изометрией) называется преобразование, сохраняющее расстояния, см. рис. 1 и 2.

Отметим, что в этом определении не требуется непрерывной зависимости движения от x и y. Хотя её и было бы естественно потребовать, исходя из исходной «физической» задачи.

1. Следующие подмножества изометрически объемлемо однородны:

(a) пара точек на плоскости;

(b) вершины правильного многоугольника на плоскости;

(c) целочисленная решетка (т. е. множество точек, все координаты которых целые) на плоскости;

(d) окружность $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ на плоскости;

(e) сфера $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ в трехмерном пространстве (рис. 3);

(f) винтовая линия в трехмерном пространстве (рис. 4), т. е. линия, заданная параметрическим уравнением $r(t) = (t, \cos t, \sin t)$;[1]

(g) объединение двух окружностей в трехмерном пространстве, ограничивающих основания прямого кругового цилиндра (т. е. двух окружностей, одна из которых получена из другой параллельным переносом на вектор, перпендикулярный их плоскостям), см. рис. 6;

(h) тор в $\mathbb{R}^4$ (рис. 5), являющийся произведением двух окружностей (или, что то же самое, заданный параметрическим уравнением $r(s, t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$).

Все эти примеры могут быть тривиально обобщены на высшие размерности. Действительно, легко сообразить, что если плоское изометриче-

[1] По такой кривой движется электрон в постоянном магнитном поле, если напряженность H является постоянным вектором и начальная скорость электрона не параллельна и не перпендикулярна напряженности. Это можно доказать, используя закон Био—Савара—Лапласа движения электрона, утверждающий, что $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma} \times H$.

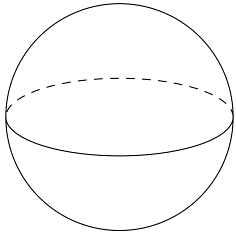


Рис. 3. Сфера

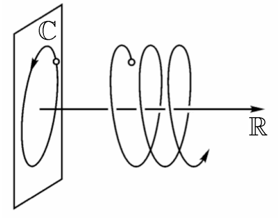


Рис. 4. Винтовая линия

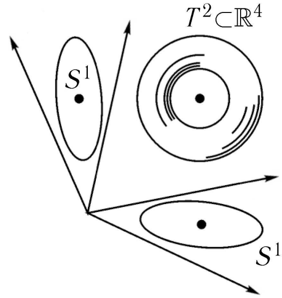


Рис. 5. Тор в $\mathbb{R}^4$

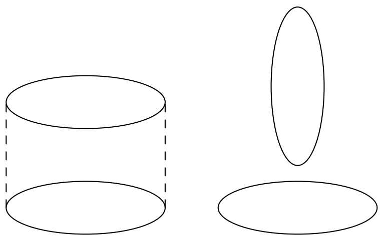


Рис. 6. Две пары окружностей: изометрически объемлемо однородная и нет

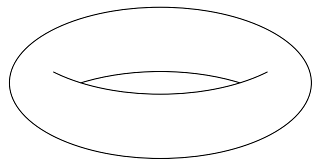


Рис. 7. Тор вращения в $\mathbb{R}^3$

ски объемлемо однородное подмножество рассмотреть как подмножество трехмерного пространства, то оно также будет изометрически объемлемо однородным.

2. Следующие подмножества не являются изометрически объемлемо однородными:

(a) множество вершин неравностороннего треугольника на плоскости;

(b) отрезок в $\mathbb{R}^1$ (указание: рассмотрите его крайнюю точку);

(c) объединение пересекающихся прямых (указание: рассмотрите точку их пересечения);

(d) парабола $y = x^2$ на плоскости;

(e) объединение двух окружностей в трехмерном пространстве, отличное от приведенного в предыдущей задаче (рис. 6);

(f) тор вращения в $\mathbb{R}^3$ (рис. 7; указание: у школьников может не получиться доказать это).

Сформулируем естественную гипотезу о характеризации изометрически объемлемо однородных подмножеств. Для этого нам понадобятся еще два определения.