Ю. П. Петров

Новые главы теории управления и компьютерных вычислений

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 681.3.06+519.6
ББК 32.973
П30

Петров Ю. П.

П30 Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 192 с.: ил.

ISBN 5-94157-452-5

В книге изложены новые результаты в области теории управления и компьютерных вычислений, полученные на факультете прикладной математики — процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ) в 1990—2002 гг. Эти результаты настолько просты и значимы, что их можно и нужно использовать в компьютерных вычислениях и ввести в учебный процесс. В основе книги лежат спецкурсы, прочитанные автором на факультете ПМ-ПУ СПбГУ. Представлены полученные автором результаты в области синтеза оптимальных систем управления, рассмотрена проблема расчета устойчивости и запасов устойчивости различных технических систем и устройств, рассказано об ошибках, обнаружившихся в популярных пакетах прикладных программ.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 01-01-00217 и 04-01-00200.

Для пользователей персональных компьютеров, студентов, инженеров и преподавателей, работающих в области управления и компьютерных вычислений

УДК 681.3.06+519.6
ББК 32.973

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Анатолий Адаменко*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензент — Марусева И. В., доктор педагогических наук, профессор

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 20.01.04.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,48.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-452-5

Содержание

Введение

Настоящая книга посвящена результатам недавних исследований в области теории управления — результатам настолько простым и значимым, что их необходимо включить в учебные курсы университетов и технических университетов по теории управления, теории автоматического управления и регулирования, теории компьютерных вычислений.

В основу книги легли спецкурсы, прочитанные автором на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). В данной области исследований сотрудники СПбГУ опередили своих зарубежных коллег — это особенно важно подчеркнуть, поскольку последние годы нельзя считать временем, благоприятным для российской науки. Это время трудностей и унижения. Тем важнее отметить, что и в это время наука России может идти впереди других стран.

Книга состоит из трех глав. В *главе 1* изложены новые результаты в области синтеза оптимальных систем управления, полученные автором в СПбГУ в 1990—1995 гг. Опираясь на них, в *главе 2* рассмотрена более общая проблема — проблема расчета устойчивости и запасов устойчивости различных технических систем и устройств. В этой главе, на основе недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, показано, что традиционные и до этого повсеместно используемые методы расчета устойчивости не полны, в ряде случаев приводят к ошибкам в расчетах, и эти ошибки становятся затем причинами аварий и даже катастроф. В той же *главе 2* изложены способы восстановления достоверности расчетов устойчивости и избежания опасных ошибок.

Наиболее широкую область приложений имеют новые научные результаты, изложенные в *главе 3*. В ней показано, что открытые в СПбГУ новые свойства эквивалентных преобразований и открытие там же нового, третьего класса задач математики, физики и техники — промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач — имеют прямое отношение не только к расчетам устойчивости, но и к очень многим другим алгоритмам компьютерных вычислений.

В *главе 3* (опирающейся на результаты первых двух) рассказано об ошибках, обнаруженных в популярных пакетах прикладных программ (пакеты MATLAB, Mathcad, Scilab и др.), и приведены методы, позволяющие устранить ошибки и восстановить надежность и достоверность компьютерных вычислений.

Результаты, изложенные в *главе 3*, будут полезны всем пользователям персональных компьютеров и всем тем, кто будет на них работать.

* * *

Возвращаясь к *главе 1*, отметим, что она посвящена синтезу систем управления, обеспечивающих наилучшее возможное качество стабилизации и слежения при неизвестном спектре возмущающих воздействий.

Для известного спектра решение этой важной задачи получено давно и давно вошло в учебные курсы. Однако спектр возмущающих воздействий часто не известен или может меняться с течением времени. Поэтому первостепенное значение имеет проблема построения гарантирующего управления, которое гарантировало бы наилучшие возможные результаты при любом спектре.

Совсем недавно было получено решение этой важной проблемы, долго не поддававшейся усилиям многих исследователей. Решение это является настолько простым, что вполне доступно для студентов и может быть включено в учебные курсы. Оно даже проще, чем известное ранее решение для заданного спектра, и позволяет реализовать заветную мечту проектировщиков — еще на стадии проектирования располагать простыми зависимостями, позволяющими для любых возмущающих воздействий сразу указать — какая точность стабилизации и слежения достижима при том или ином ресурсе управления и обратно — какой ресурс управления необходим для обеспечения той или иной точности.

Глава 2 книги посвящена недавно обнаруженной проблеме законности и допустимости привычных и широко используемых преобразований математических моделей исследуемых физических и технических объектов. С одной стороны — без преобразований никак не обойтись, они являются основой любого исследования и расчета, правила законных и эквивалентных преобразований давно и хорошо известны. С другой стороны, недавно было обнаружено, что даже самые привычные и часто используемые эквивалентные преобразования могут таить в себе неожиданные сюрпризы, могут приводить к опасным ошибкам в расчетах сохранения устойчивости при вариациях параметров и в других расчетах. Поэтому студент обязательно должен быть предупрежден об этом.

Поясним сказанное примером.

Рассмотрим несложный объект управления (электропривод постоянного тока), математической моделью которого является следующая система линейных дифференциальных уравнений:

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)\, x_1 = (D^2 + 2D + 1)u \tag{1}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)u \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) $D = \dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, x — регулируемая переменная, u — управление. Уравнение (1) является моделью объекта управления, уравнение (2) — моделью цепи обратной связи (регулятора). Система уравнений (1) и (2), рассматриваемая совместно, является математической моделью замкнутой цепи. Исключив переменную u из уравнений (1) и (2), получим уравнение замкнутой системы относительно переменной x:

$$(D^3 + 5D^2 + 7D + 3)\, x = 0. \tag{3}$$

Мы убеждаемся, что характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3, \tag{4}$$

имеет корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ и является гурвицевым (напомним, что гурвицевым называют полином, не имеющий ни нулевых корней, ни корней с положительной вещественной частью). Все решения уравнения (3) имеют вид

$$x = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3)\, e^{-t} \tag{5}$$

и являются асимптотически устойчивыми, затухающими с течением времени. Простота системы уравнений (1) и (2) позволяет провести ее непосредственное исследование и убедиться, что, будучи воплощенной в металле, она станет работать неудовлетворительно: при неизбежных на практике малых вариациях параметров некоторых коэффициентов системы уравнений (1) и (2) (причем при вариациях только определенного знака) замкнутая система теряет устойчивость и может создать аварийную ситуацию.

Однако прямое непосредственное исследование возможно только для простых систем. Современные сложные системы управления, описываемые многими уравнениями разных порядков, чаще всего предварительно преобразуют: введением новых переменных их приводят к форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, что позволяет для вычисления характеристического полинома использовать стандартные методы и программы линейной алгебры. Сведение к форме n уравнений первого порядка называют еще исследованием в пространстве состояний, и оно очень широко применяется в расчетах и проектировании. При преобразованиях математических моделей, разумеется, следят за тем, чтобы преобразования были эквивалентными. А эквивалентными называют такие преобразования, при которых все решения исходной системы совпадают с решениями системы преобразованной.

Приведем к форме Коши уравнение (1), введя переменные

$$\begin{aligned} &x_1 = x;\; x_2 = Dx_1 - u \\ &x_3 = Dx_2;\; u = u \end{aligned} \tag{6}$$

В новых переменных уравнение (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + x_2 + u \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned} \tag{7}$$

и станет уравнением в пространстве состояний. Исключив переменные x_2 и x_3, легко привести уравнение (7) обратно к форме (1). Преобразования от (1) к (7) и от (7) к (1) — эквивалентны.

Преобразуем теперь уравнение (2), используя только переносы членов из левой части уравнения в правую с учетом знаков и их группировку. Получим:

$$[(D^2 + 2D)x - Du] + [(2D + 4)x - 2u] + x = -u. \tag{8}$$

В первой группе членов узнаем переменную x_1, во второй — $2x_2$; следовательно, уравнение (2) преобразуем к виду

$$U = -x_1 - 2x_2 - x_3. \tag{9}$$

Замкнув объект управления (7) обратной связью (регулятором) (9), получим уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Характеристический полином уравнения (10) легко вычисляется по правилам линейной алгебры и совпадает с полиномом (4). Это еще раз подтверждает, что все используемые нами преобразования были эквивалентными.

Исследуя теперь поведение замкнутой системы (10) и ее характеристического полинома (4) при вариациях любых коэффициентов, мы убеждаемся, что замкнутая система (10) не только устойчива, но и сохраняет устойчивость не только при малых, но и при больших вариациях всех своих коэффициентов. Поэтому имеются все основания к тому, чтобы рекомендовать систему, математической моделью которой является уравнение (10) и эквивалентные уравнения (1) и (2), и воплощению в металле, что может стать первым шагом к опасной аварии. Действительно, мы уже указывали, что система, описываемая уравнениями (1) и (2), теряет устойчивость при вариациях определенного знака некоторых своих параметров, но при эквивалентных преобразованиях ее к форме (7)—(9) это перестает быть видимым. Поскольку при изготовлении реальной системы в металле малые отклонения действительных значений параметров от расчетных неизбежны, а знак их непредсказуем, то малые вариации могут оказаться в безопасных интервалах и поэтому изготовленная система может успешно пройти проверочные испытания и неопределенно долгое время успешно работать. В дальнейшем, при неизбежном в ходе нормальной эксплуатации малом дрейфе параметров в любой непредсказуемый момент времени знак малой вариации может изменяться и сразу произойдет потеря устойчивости, способная создать аварийную ситуацию, а то и аварию.

Мы в дальнейшем более подробно рассмотрим этот пример и покажем, что рассматриваемое явление не случайно, встречается довольно часто и при недостаточном внимании к нему может быть причиной опасных аварий.

Действительно, используя только эквивалентные (в классическом смысле) преобразования уравнений, мы можем быть уверены в том, что все решения исходной и преобразованной системы совпадают. Но для исследования сохранения устойчивости при малых вариациях параметров (и для многих других физических и технических задач) этого мало. При вариации параметра мы имеем дело уже не с решением, а с его окрестностью, но совпадения окрестностей решений классическая теория эквивалентных преобразований не гарантирует. Окрестности решений в пространстве параметров в классической теории не рассматриваются. Поэтому ошибки, подобные той, что возникла при изучении системы уравнений (1) и (2), могут возникать часто, и для предотвращения аварий нужно существенно уточнить привычные и традиционные представления об эквивалентных преобразованиях уравнений. Коль скоро это опасное явление (открытое в СПбГУ в 1991—94 гг.) обсуждено и опубликовано, с ним обязательно должны быть как можно скорее ознакомлены пользователи персональных компьютеров и студенты (причем не только обучающиеся по специальности «автоматическое управление», но и студенты всех специальностей, использующих математические расчеты), тем более что суть нового открытия проста и доступна.

Поскольку явление потери устойчивости при малых вариациях параметров тесно связано с теорией оптимальных систем, мы рассмотрим его в *главе 2*, после изложения метода синтеза оптимальных систем управления.

Вопросы и пожелания читателей принимаются на E-mail: **petrov1930@mail.ru**.

ГЛАВА 1

Синтез гарантирующих управлений

§ 1. Оптимальные системы, задачи стабилизации и слежения

Дальнейшее изложение будет относиться к системам управления, математическими моделями которых являются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Такие системы часто встречаются в технике, в банковском и страховом деле, в биологии и медицине. Дифференциальные уравнения различных порядков для унификации чаще всего приводят либо к форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, либо к одному уравнению n-го порядка относительно одной, наиболее интересующей нас переменной.

Так, составленная на основе законов аэродинамики математическая модель продольного движения одного из летательных аппаратов (экраноплан, летящий на малой высоте над морем) имеет вид:

$$Dv - (D + 2{,}4)\,\alpha = D\nu_y$$

$$(D^2 + 2{,}46)v + (0{,}4D + 38) = -49u \qquad (11)$$

$$Dh + \alpha - v = \nu_y$$

где v — угол тангажа, α — угол атаки, h — отклонение высоты полета от заданной, u — отклонение руля высоты (управление), ν_y — скорость вертикальных порывов ветра, возмущающее воздействие.

Уравнение (11) можно введением новой переменной $x = Dv$ свести к форме Коши, к форме 4 уравнений первого порядка. Если же для нас наибольший интерес представляет переменная h (высота), то мы можем исключить остальные переменные и свести уравнения (11) к виду:

$$(D^4 + 5{,}25D^3 + 43{,}9D^2)h = 117{,}7u + (2{,}4D^3 + 5{,}88D)\nu_y \qquad (12)$$

Таким образом, можно выделить два стандартных типа математических моделей: уравнения в форме Коши:

$$X' = Ax + Bu, \tag{13}$$

где X — n-мерный вектор регулируемых переменных, A — квадратная $n \times n$ матрица постоянных коэффициентов, B — матрица (а точнее — вектор-столбец) коэффициентов при скалярном управлении u. Исключив все переменные кроме, например, переменной x_i, получим относительно x_i другую форму записи — уравнение

$$A(D)x_i = B_i(D)u, \tag{14}$$

где $A(D) = a_n D^n + ... + a_0$; $B_i(D) = b_m D^m + ... + b_0$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, которые связаны простыми соотношениями с матрицами A и B в уравнении (13). Действительно,

$$A(D) = \det[DE - A], \tag{15}$$

т. е. является определителем матрицы $DE - A$, где E — единичная матрица, а полином $B_i(D)$ является определителем той же матрицы, но в которой i-й столбец заменен на вектор-столбец коэффициентов при управлении в уравнении (13). Форма записи (13) более универсальна, форма (14) позволяет сконцентрировать внимание на поведении любой наиболее интересующей нас переменной x_i; сопоставление достоинств и недостатков моделей (13) и (14) дано в [45].

Мы будем рассматривать системы управления при наличии возмущающих воздействий. Математическая модель подобных систем имеет вид

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \tag{16}$$

где $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, которое будем считать некоторой функцией времени, в общем случае — случайной, не полностью известной нам; ее называют еще случайным процессом.

При наличии возмущающих воздействий задачей управления часто становится обеспечение возможно малых отклонений регулируемой переменной x от желаемого значения, соответствующего $x = 0$. Это — задача стабилизации движения.

Не менее часто встречаются и задачи слежения. Пусть интересующая нас переменная $y(t)$ (например, положение фрезы в копировально-фрезерном станке) должна хорошо отследить некоторую функцию $z(t)$ — задаваемую, например, положением копира, скользящего по поверхности шаблона. Пусть динамика копировально-фрезерного станка описывается уравнением

$$A(D)y = B(D)u + \varphi_1(t). \tag{17}$$

Введем новую переменную $x = y - z$, где x — разность между действительным положением фрезы и «идеальным» — т. е. $x(t)$ — это погрешность слежения. В новых переменных уравнение (17) примет вид

$$A(D)x = B(D)u - A(D)z + \varphi_1(t). \tag{18}$$

Если теперь обозначить через

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - A(D)z \tag{19}$$

обобщенное возмущающее воздействие, то мы придем к уравнению (16), к задаче стабилизации. Учитывая это, мы в дальнейшем будем для унификации рассматривать только задачи стабилизации, учитывая, что не менее важные задачи слежения к ним сводятся.

§ 2. Характеристики возмущающих воздействий и выбор критерия качества

Случайные процессы $\varphi(t)$, стоящие в правой части уравнения (16), — это своеобразные математические объекты, соединяющие в себе черты случайной величины и функции.

В каждом конкретном опыте или измерении случайный процесс является обычной функцией времени, которая называется реализацией случайного процесса. Для примера на рис. 1 показана запись реализации угла крена судна в функции времени.

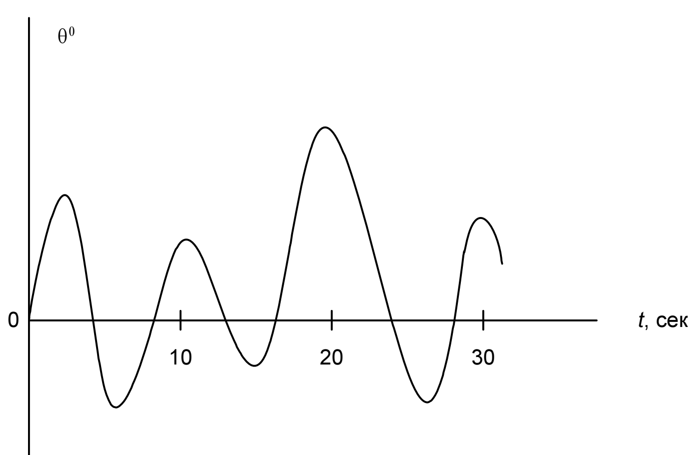

Рис. 1

Напомним, что угол крена является возмущающим воздействием для многих систем судовой автоматики. На рис. 2 приведена запись реализации высоты волны в некоторой точке моря.

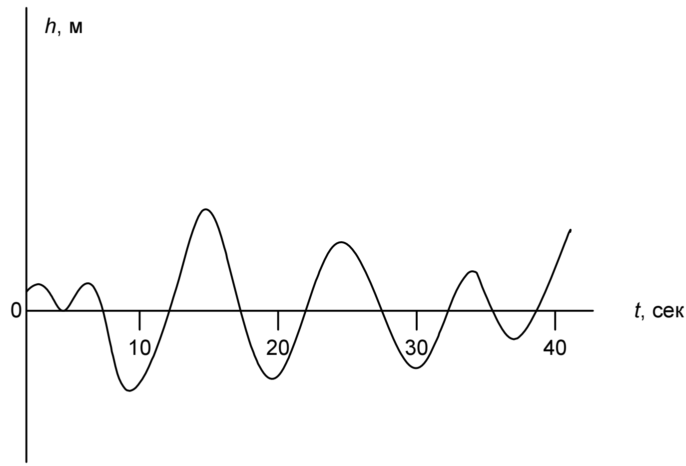

Рис. 2

На рис. 3 показана запись реализации скорости вертикальных порывов ветра, являющейся возмущающим воздействием для полета самолета в турбулентной атмосфере.

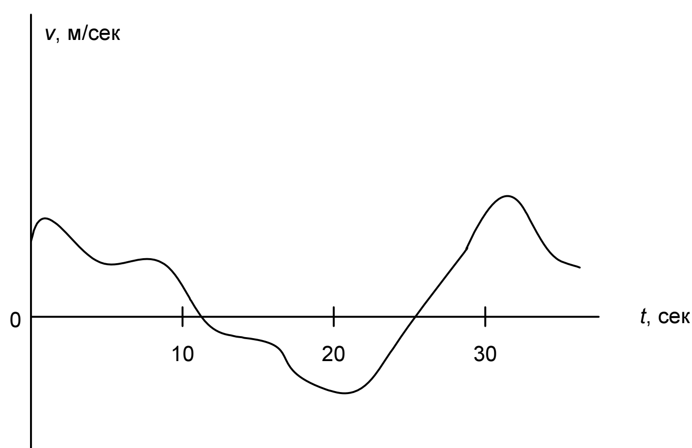

Рис. 3

Аналогично выглядит и, например, реализация курса доллара по отношению к рублю, являющаяся возмущающим воздействием для банков, страховых компаний и т. п.

Характеристиками случайных процессов могут служить:

- Среднее значение (или математическое ожидание)

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t), \tag{20}$$

где N — число реализаций. Среднее значение получается усреднением по множеству реализаций и является функцией времени, но уже не случайной.

- Средний квадрат (или момент второго порядка):

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2(t) \tag{21}$$

также является не случайной функцией времени.

- Дисперсия (или средний квадрат отклонения функции от ее математического ожидания):

$$D_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[x_k(t)-\langle x\rangle]^2 . \tag{22}$$

Если у процесса $x(t)$ среднее значение равно нулю, то такие процессы называют центрированными. Для них дисперсия и средний квадрат совпадают. Постоянную составляющую в случайном процессе удобно выделить и рассмотреть отдельно, а оставшуюся после выделения часть рассматривать как центрированную.

Наиболее распространенными и важными являются стационарные случайные процессы, для которых среднее значение, средний квадрат являются постоянными величинами, не зависящими от времени. Мы будем в дальнейшем рассматривать стационарные случайные процессы с эргодическим свойством, для которых осреднение по реализациям эквивалентно осреднению по времени, и поэтому среднее значение и средний квадрат могут быть вычислены как интегралы:

$$\langle x\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} x\,dt\,, \tag{23}$$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} x^2(t)\,. \tag{24}$$

Отметим, что $<x>$ и $<x^2>$ являются постоянными числами.

Важной характеристикой случайного процесса является его корреляционная функция:

$$K_{\varphi}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} x(t)x(t-\tau)dt\,, \tag{25}$$

которая отражает тесноту связи между значениями случайного процесса, разделенными интервалом τ. Свойства корреляционной функции описаны, например, в работах [8; 45; 59].

Важной характеристикой случайного процесса является закон распределения его ординат. Для подавляющего большинства случайных процессов, встречающихся в природе и в технике, ординаты распределены по закону, близкому к нормальному (закону Гаусса), а точнее — к усеченному нормальному. Для нормального закона вероятность того, что значение модуля $|x(t)|$ для любого t не превысит величины $k\sigma_x$ (где $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) зависит только от k и выражается формулой

$$P[|x| \le k\sigma_x] = \Phi(k)\,, \tag{26}$$

где $\Phi(k)$ — известный «интеграл вероятностей»

$$\Phi(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy\,, \tag{27}$$

для которого имеются подробные таблицы. Полезно помнить краткую выдержку из них:

k	1	1,645	2	3	4,417
$\Phi(k)$	0,6827	0,9	0,9545	0,9973	$1 - 10^{-6}$

Широчайшая распространенность случайных процессов, распределенных по нормальному закону, связана с тем, что этот закон является законом предельным: как известно, сумма достаточно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения при весьма не жестких ограничениях, стремится в переделе к нормальному закону. А поскольку любое значение реального случайного процесса является следствием большого числа порождающих факторов, то и не удивительно, что на практике почти всегда приходится иметь дело с процессами, распределенными по нормальному или близкому к нормальному закону.

Однако имеет место одна важная оговорка: идеальный нормальный закон является законом предельным, порожденным бесконечным множеством отдельных причин. Именно поэтому для него хотя и мала, но отлична от нуля, как показывает формула (26), вероятность сколь угодно больших значений $x(t)$ (поскольку $\Phi(k) < 1$ для любых k). Реальные процессы порождены конечным, хотя и большим числом факторов и ограничены. Поэтому для лучшего согласия с реальностью формулу (26) дополняют «принципом практической уверенности», принимая, что вероятность неравенства $|x(t)| \geq k_0\sigma_x$ равна нулю. Постоянную k_0 в этом неравенстве называют «постоянной практической уверенности» и в большинстве приложений принимают равной трем. Отсюда вытекает известное «правило трех сигм», формулируемое так: «отклонений, больших, чем три среднеквадратичных значения, в реальном процессе не встретится». В некоторых особых случаях постоянная практической уверенности k_0 может быть больше, чем $k_0 = 3$.

Из подавляющей распространенности нормальных случайных процессов следует, что для систем стабилизации и слежения естественным критерием качества является именно среднеквадратичный.

Действительно, пусть, например, техническими требованиями к полету экраноплана над морем задано, что предельным допустимым отклонением высоты полета от заданной является h_0 метров. Согласно правилу «трех сигм», это будет обеспечено, если будет $\sigma_h \leq \dfrac{h_0}{3}$. Отсюда и вытекает важнейшая роль среднеквадратичных величин при синтезе оптимальных систем стабилизации и слежения. А сами среднеквадратичные величины легко вычисляются через корреляционную функцию и спектральную плотность мощности случайного процесса.

Спектральной плотностью мощности (или, для краткости, спектром) случайного процесса $\varphi(t)$ называется косинус-преобразование Фурье его корреляционной функции:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_\varphi(\tau)\cos\omega\tau d\tau . \tag{28}$$

Если спектр случайного процесса $\varphi(t)$ известен, то его средний квадрат вычисляется через интеграл от спектра:

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \sigma_\varphi^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) d\omega . \tag{29}$$

Из свойств косинус-преобразования Фурье вытекает, как известно [45], простое правило для вычисления среднего квадрата решения дифференциального уравнения со случайной правой частью: если задано уравнение

$$A(D)x = \varphi(t), \tag{30}$$

где $\varphi(t)$ — стационарный случайный процесс, то между спектрами S_x и S_φ имеет место равенство

$$\left|A(j\omega)\right|^2 S_x = S_\varphi; \tag{31}$$

отсюда элементарно вычисляется средний квадрат решения $x(t)$ уравнения (30):

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{d\omega}{\left|A(j\omega)\right|^2}. \tag{32}$$

Таким образом, для вычисления среднего квадрата достаточно подставить в операторный полином $A(D)$ дифференциального уравнения (30) вместо оператора D мнимое число $j\omega$, вычислить квадрат модуля $\left|A(j\omega)\right|^2$ как функцию от ω и взять интеграл (32). Это можно делать в том случае, если полином $A(D)$ — гурвицев. Если он не гурвицев, то расчет по формуле (32) может дать конечное значение σ_x^2, но физического смысла этот результат чаще всего не имеет, поскольку при не гурвицевом полиноме $A(D)$ в формуле (30) значение σ_x^2 в реальном объекте не может быть конечным, т. к. $x(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Формула (32) дает величину среднего квадрата частного решения уравнения (30), остающегося ограниченным при $t\to\infty$. Если нас интересует только частное решение, то формулой (32) можно пользоваться и при не гурвицевом полиноме $A(D)$. Формула (32) лежит в основе всех расчетов линейных систем, находящихся под воздействием возмущающих сил случайного характера. Она легко обобщается и на уравнения вида

$$A(D)x = B(D)\varphi. \tag{33}$$

В этом случае

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty \frac{\left|B(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega)\right|^2}\,d\omega. \tag{34}$$

Мы убеждаемся, что для вычисления σ_x достаточно знать спектр возмущающего воздействия. Его можно получить на основе формулы (28) из корреляционной функции процесса $\varphi(t)$, а корреляционную функцию легко вычислить на основе формулы (25) по наблюдениями за процессом $\varphi(t)$. Разумеется, на практике вместо бесконечного нижнего предела в интеграле (25) берут конечный. Практические вопросы вычисления — как обеспечить нужную точность, когда можно обрывать вычисления и т. п. — с достаточной полнотой освещены во многих руководствах — таких, как, например, [8; 70]. Практические приложения отражены в работах [1—3].

На практике полученные из наблюдений значения корреляционной функции аппроксимируют каким-либо аналитическим выражением. Чаще всего используют аппроксимацию экспонентой:

$$K_\varphi(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau}, \qquad (35)$$

подбирая значение α, наилучшим образом соответствующее экспериментальным точкам. Корреляционной функции (35) соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}. \qquad (36)$$

Часто используют также аппроксимацию вида

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau \qquad (37)$$

и подбирают два параметра α и β, стремясь к наилучшему совпадению с экспериментальными данными. Корреляционной функции (37) соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{2\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}; \qquad (38)$$

иногда используют разновидность аппроксимации (37):

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau), \qquad (39)$$

которой соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{4\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}. \qquad (40)$$

При малых отношениях α/β спектры (38) и (40) похожи друг на друга и имеют резко выраженные максимумы при $\omega \approx \beta$.

На рис. 4 показан спектр (40) при $\alpha = 0{,}21$ и $\beta = 1$. Такое соотношение α и β характерно для развитого морского волнения в открытом море.

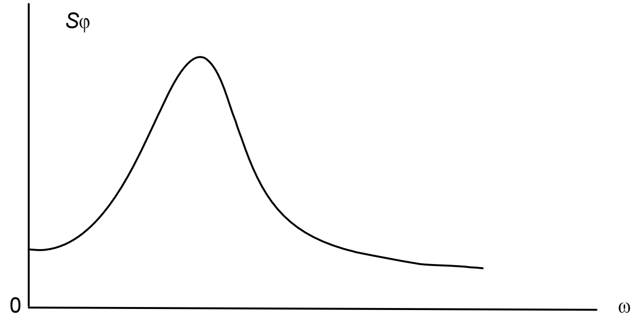

Рис. 4

В общем случае спектр всегда можно аппроксимировать дробно-линейной четной функцией ω:

$$S_{\varphi} = \frac{a_p \omega^{2p} + a_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + a_0}{b_q \omega^{2q} + b_{q-1}\omega^{2q-2} + \ldots + b_0} \tag{41}$$

и подобрать коэффициенты a_i и b_i так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать полученные в эксперименте данные. Чем выше степени p и q, тем точнее аппроксимация.

Исследуя корреляционные функции, нужно иметь в виду, что они получены на основе наблюдения за прошлым процесса $\varphi(t)$, при $t \le 0$, но дают некоторую информацию о будущем, о значениях $\varphi(t)$ при $t > 0$, и позволяют до известной степени прогнозировать будущее (подробнее о прогнозировании — в [8; 59; 70]). Однако информация о будущем, заключенная в корреляционной функции, является информацией ограниченной, неполной, и точность прогноза падает с ростом t. Чем быстрее затухает с ростом переменной τ корреляционная функция $K_{\varphi}(\tau)$, тем быстрее падает точность прогноза с увеличением времени.

Корреляционные функции и спектры позволяют перекинуть мост между детерминированными и случайными процессами. Вычисляя корреляционную функцию для гармонического колебания $\varphi(t) = A\ \sin\ (\beta t + \theta)$ (т. е. для детерминированного процесса), нетрудно убедиться, что в этом случае корреляционная функция

$$K_{\varphi}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\beta\tau \tag{42}$$

не затухает с ростом τ, а используя формулу (28), можно убедиться, что спектр $\varphi(\tau)$ гармонического колебания вырождается в обобщенную δ-функцию Дирака:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{A^2}{2}\delta(\omega - \beta)\,. \tag{43}$$

Как известно, обобщенные δ-функции Дирака равны нулю для всех значений аргумента ω, кроме значения аргумента, равного нулю. При этом значении аргумента δ-функция стремится к бесконечности и в то же время интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$

остается равным единице.

Отметим важное свойство δ-функций Дирака: для любой непрерывной функции $f(\omega)$ будет иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\beta)f(\omega)d\omega = f(\beta)$$

т. е. интеграл от произведения любой функции $f(\omega)$ на δ-функцию будет зависеть только от значения функции $f(\omega)$ при $\omega = \beta$.

Обобщенную δ-функцию Дирака можно рассматривать как предел многих непрерывных функций. Так, нетрудно убедиться, что непрерывная функция (38) при $\alpha \to 0$ переходит в δ-функцию: она переходит в спектр $S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2\delta(\omega-\beta)$.

Точно так же непрерывная функция (36) при $\alpha \to 0$ переходит в δ-функцию: $S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2\delta(\omega)$. Следовательно, спектр $S_\varphi = \delta(\omega)$ соответствует детерминированному процессу $\varphi(t) = 1$ — постоянной силе. В общем случае имеет место то же соотношение: спектр случайного процесса — непрерывная функция, спектр детерминированного процесса — это δ-функция или сумма δ-функций.

В заключение рассмотрим еще один своеобразный случайный процесс, для которого $S_\varphi = \text{const}$ — т. е. его спектр постоянен для всех частот. Такой процесс называют «белым шумом», и он, разумеется, является идеализацией, поскольку средний квадрат такого процесса бесконечен. Однако реальные процессы со спектрами вида (36) для больших значений α часто условно заменяют «белым шумом» и это упрощает все расчеты. Для «белого шума», как легко вычислить, корреляционная функция $K_\varphi(\tau) = \sigma_\varphi^2\delta(\tau)$ — т. е. является обобщенной δ-функцией Дирака. Поэтому «белый шум» является «абсолютно непредсказуемым процессом», в его спектре — в отличие от спектров реальных процессов — не содержится никакой информации о поведении $\varphi(t)$ при $t > 0$.

§ 3. Теория синтеза оптимального управления и ее развитие

До появления корреляционной и спектральной теории случайных процессов исследование объектов и систем, находящихся под воздействием возмущающих сил случайного характера было очень затруднительно. Алексей Николаевич Крылов, выполнив в 1914 году в экспедиции на судне «Метеор» большие экспериментальные исследования качки судов в условиях реального нерегулярного морского волнения, убедился, что существовавший в то время математический аппарат не позволял дать описание и расчет нерегулярной качки.

Новый математический аппарат, позволяющий рассчитывать характеристики случайных процессов на основе их корреляционных функций, был разработан в 1938—1943 годах трудами А. Н. Колмогорова, А. С. Хинчина, Н. Винера и их последователей. Вскоре появились простые расчетные формулы, подобные формуле (34).

Встал вопрос о синтезе оптимального регулятора, оптимальной обратной связи, которая обеспечила бы наилучшую возможную точность стабилизации или слежения при возмущающих воздействиях случайного характера.

Задачу синтеза оптимальной системы можно рассматривать, например, в такой постановке: имеется объект управления, математической моделью которого является уравнение

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t). \tag{44}$$

Объект управления замкнут линейной обратной связью (регулятором), имеющей уравнение

$$u = -W(D)x \tag{45}$$

(оператор $W(D)$ может быть дробно-линейной функцией от оператора дифференцирования $D = d/dt$, т. е. $u = \dfrac{W_1(D)}{W_2(D)}x$, где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — полиномы; для удобства выкладок мы сохраним запись (45)).

Задача о синтезе оптимального регулятора равносильна поиску оптимального оператора $W(D)$, который наилучшим образом преобразовал бы функцию $x(t)$ в функцию $u(t)$ — преобразовал бы так, чтобы точность стабилизации и слежения была наилучшей. Задачи о поиске наилучших операторов не имеют для своего решения достаточно удобного математического аппарата. Вот почему огромное значение имеет корреляционная теория случайных процессов, которая позволила трудную задачу поиска оптимального оператора $W(D)$ свести к задаче вычисления функции $W(j\omega)$, которая доставляет минимум довольно несложным функционалам и поэтому может быть найдена традиционными методами вариационного исчисления. А если найдена $W(j\omega)$, то это определяет $W(D)$ — достаточно подставить вместо аргумента $j\omega$ оператор дифференцирования $D = d/dt$.

Действительно, замкнув объект управления (44) регулятором (45), получим уравнения замкнутой системы:

$$[A(D) + B(D)W(D)]x = \varphi(t), \tag{46}$$

$$[A(D) + B(D)W(D)]u = -W(D)\varphi(t). \tag{47}$$

Пользуясь формулой (34), устанавливаем:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{d\omega}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}, \tag{48}$$

$$\sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{|W(j\omega)|^2\, d\omega}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}. \tag{49}$$

Теперь надо найти регулятор, доставляющий минимум σ_x^2, т. е. обеспечивающий наилучшую точность стабилизации и слежения — но с учетом ограничения на ресурс управления. Начиная с первых работ по оптимизации считалось, что ограничение наложено на средний квадрат управления, на σ_u^2 (критика этого далеко не всегда обоснованного предположения и уточненные решения приведены в работе [1]), и тогда проблема поиска оптимального оператора $W(D)$ сводилась к изопериметрической задаче вариационного исчисления — задаче о поиске функции $W(j\omega)$, доставляющей минимум интегралу (48) при заданном значении интеграла (49). Согласно мнемоническому правилу решения задач вариационного исчисления, восходящего еще к Л. Эйлеру, достаточно найти функцию $W(j\omega)$, доставляющую минимум составному функционалу

$$m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{m^2 + |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}, \tag{50}$$

где m^2 — множитель Лагранжа, подлежащий в дальнейшем определению. Удобно сразу брать этот множитель в виде m^2, в виде неотрицательного числа, потому что при этом сразу выполняется необходимое условие Лежандра вариационного исчисления [19; 42].

Поскольку S_φ не зависит от $W(j\omega)$, то необходимым условием минимума является обращение в нуль первой вариации второго сомножителя в подынтегральном выражении интеграла (50), т. е. функции

$$F = \frac{m^2 + |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2} = \\ = \frac{m^2 + W(j\omega)W(-j\omega)}{[A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)][A(-j\omega) + B(-j\omega)W(-j\omega)]}. \quad (51)$$

Поскольку

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial W(j\omega)}\delta W(j\omega) + \frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}\delta W(-j\omega),$$

то для обеспечения равенства нулю первой вариации необходимо равенство нулю производных $\dfrac{\partial F}{\partial W(j\omega)}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}$. Вычисляя по обычным правилам дифференциального исчисления производную $\dfrac{\partial F}{\partial W(j\omega)}$ и приравнивая ее к нулю, получаем следующее равенство для функции $W_{\text{опт}}(j\omega)$, доставляющей минимум функционалу (50):

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = -m^2 \frac{B(-j\omega)}{A(-j\omega)}. \quad (52)$$

Вычисляя производную $\dfrac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}$ и приравнивая ее к нулю, получаем снова условие (52). Проверив выполнение достаточных условий минимума, убеждаемся окончательно, что оптимальный регулятор имеет вид:

$$U_{\text{опт}} = -m^2 \frac{B(-D)}{A(-D)} x. \quad (53)$$

Однако, замкнув регулятором (53) объект управления (44), мы убедимся, что он не обеспечивает устойчивости замкнутой системы. Действительно, подставив (53) в (44), получим для замкнутой системы уравнения:

$$[A(D)A(-D) + m^2B(D)B(-D)]x = A(-D)\varphi(t)$$
$$[A(D)A(-D) + m^2B(D)B(-D)]u = m^2B(-D)\varphi(t) \quad (54)$$

Стоящий в квадратных скобках характеристический полином замкнутой системы не может быть гурвицевым. Действительно, если, например, некоторое комплексное число λ_i с отрицательной вещественной частью является корнем характеристического полинома, то и число $-\lambda_i$ с положительной вещественной частью вследствие симметричности выражения, стоящего в квадратных скобках, также будет его корнем.

Поэтому формула (53) не является окончательным решением поставленной нами задачи и нужно, продолжая решение, искать теперь регулятор вида (45), который бы обеспечивал минимум функционала (50) при учете дополнительного условия — устойчивости замкнутой системы. Определение оптимального регулятора при учете дополнительного условия устойчивости является значительно более сложной задачей, однако она решалась различными методами и не один раз. Решения можно найти в [26; 29; 33; 34; 36; 37; 42; 59; 65; 69] (далее мы разъясним, почему решений и публикаций было так много).

Проведем для иллюстрации один из наиболее простых алгоритмов синтеза оптимального регулятора, пригодный для объектов вида (45) при $B(D) = 1$.

Алгоритм синтеза

1. Предварительно для удобства в аналитической аппроксимации спектра (41) делают замену переменной: $j\omega = s$, после чего спектр $S_\varphi(s)$, являющийся четной функцией переменной s, факторизуют

   $$S_\varphi(s) = S_1(s)S_1(-s), \quad (55)$$

   т. е. представляют как произведение двух симметричных множителей, один из которых зависит от s, другой — от $-s$. Для выполнения факторизации достаточно найти корни числителя и знаменателя спектра (41). В функцию $S_1(s)$ войдут корни с отрицательными вещественными частями, а в функцию $S_1(-s)$ — симметричные им корни с положительными вещественными частями.

2. Факторизуется полином:

   $$A(s)A(-s) + m^2 = G(s)G(-s). \quad (56)$$

   При этом $G(s)$ является гурвицевым полиномом;

   $G(-s)$ — не гурвицевым.

3. Выполняется операция сепарации — т. е. разложения на целую часть и правильные дроби с полюсами в разных полуплоскостях комплексного переменного s:

$$\frac{A(s)}{G(-s)}S_1(s) = M_0 + M_+ + M_-, \tag{57}$$

где M_0 — целый полином, M_+ — правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости, а M_- — правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

4. Строится вспомогательная функция:

$$\Phi(s) = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)}, \tag{58}$$

с использованием которой непосредственно синтезируется оптимальный оператор $W(D)$:

$$W(D) = A(D) - \frac{1}{\Phi(D)}. \tag{59}$$

Пример 1

В качестве примера приведем синтез оптимального оператора для объекта управления

$$Dx = u + \varphi(t). \tag{60}$$

1. Факторизуя спектр, находим:

$$\sigma_\varphi^2 \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 - s^2} = \sigma_\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha + s}\sigma_\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha - s},$$

откуда $S_1(s) = \dfrac{1}{\alpha + s}$ (поскольку постоянные множители на вид регулятора не влияют).

2. Факторизуя полином

$m^2 + A(s)A(-s) = m^2 - s^2 = (m + s)(m - s)$,

находим, что

$G(s) = m + s$; $G(-s) = m - s$.

3. Выполняя сепарацию выражения

$$\frac{A(-s)}{G(-s)}S_1(s) = \frac{-s}{(m - s)(\alpha + s)} = \frac{-m}{\alpha + m}\frac{1}{m - s} + \frac{\alpha}{m + \alpha}\frac{1}{\alpha + s},$$

находим, что

$M_0 = 0$ и $M_+ = \dfrac{\alpha}{\alpha + m}\dfrac{1}{\alpha + s}$.

4. Функция $\Phi(s)$ в нашем случае равна

$$\Phi(s) = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)} = \frac{\alpha}{\alpha + m}\frac{1}{\alpha + s}$$

и, следовательно, оптимальным будет регулятор

$$u = -\left[\frac{m}{\alpha}D + \frac{m(m+\alpha)}{\alpha}\right]x. \tag{61}$$

Мы убеждаемся, что оптимальный регулятор зависит от спектра S_φ, а точнее — от параметра α спектра возмущающего воздействия (36).

Замкнув регулятором (61) объект управления (60), убедимся, что движение замкнутой системы описывается уравнением

$$(D + m)x = \frac{\alpha}{\alpha + m}\varphi \tag{62}$$

и является устойчивым. Вычисляя σ_x^2 и σ_u^2 в замкнутой системе, находим:

$$\sigma_x^2 = \frac{\alpha^2}{m(\alpha + m)}; \quad \sigma_u^2 = \frac{\alpha^2 m + 3\alpha m^2 + m^3}{(\alpha + m)^3}. \tag{63}$$

Если, например, ресурс управления ограничен неравенством $\sigma_u^2 \le 0{,}7$, то из второй формулы (63) находим множитель Лагранжа $m^2 = 1{,}69$. Регулятор (61) в данном случае имеет вид

$u = -[1{,}3D + 3]x$

и обеспечит при σ_u точность стабилизации $\sigma_x^2 = 0{,}0632$.

Нетрудно проверить, что из всех регуляторов вида $u = -k_0x$ ограничению $\sigma_u^2 \le 0{,}7$ будет удовлетворять регулятор $u = -2{,}33x$ и он обеспечит точность стабилизации $\sigma_x^2 = 0{,}128$. Таким образом, переход от традиционных пропорциональных регуляторов вида $u = -kx$ к оптимальному управлению действительно может существенно улучшить точность стабилизации. В работе [45] показано, что улучшение точности связано с использованием той информации о возмущающем воздействии $\varphi(t)$, которая заключена в его спектре.

* * *

Мы привели простейший из алгоритмов синтеза. Другие алгоритмы можно найти в [26; 29; 37; 42; 65].

Обилие алгоритмов и публикаций связано с тем, что уж вскоре после первых работ по синтезу оптимальных систем стабилизации и слежения [36; 34] обнаружилось, что некоторые оптимальные системы теряют устойчивость даже при малых отклонениях параметров от расчетных значений. Разумеется, это обстоятельство пугало практиков, сразу подрывало любое доверие к оптимальным системам и накрепко перекрывало возможности их практического применения. Несмотря на огромное число исследований, посвященных оптимальным системам, практическое их применение было большой редкостью. Продолжались упорные поиски все новых и новых методов синтеза оптимальных регуляторов, которые не приводили бы к опаснейшей потере устойчивости при неизбежных на практике малых вариациях параметров.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года в журнале «Автоматика и телемеханика» [35] в последний раз вспыхнула дискуссия между авторами работы [29] и П. В. Надеждиным, который показал, что предложенный ими очередной алгоритм синтеза приводит, как и предыдущие алгоритмы, к системам, способным терять устойчивость при малых вариациях. Авторы работы [29] защищались (безуспешно) от этого обвинения. Но уже в том же 1973 году в монографии [40] было показано, что дело не в алгоритме, а в том, что у ряда объектов управления минимум критерия качества объективно лежит на границе устойчивости по некоторым из параметров системы и поэтому для получения работоспособной системы нужно изменить саму постановку задачи, ввести требование сохранения устойчивости при вариациях параметров как новое дополнительное условие и для его реализации пожертвовать, если нужно, частью критерия качества.

Успеха удалось добиться потому, что в работе [40] впервые для некоторых объектов управления удалось построить оптимальные регуляторы в замкнутой форме, а не только в виде алгоритма, что и позволило сразу объяснить причину потери устойчивости.

Так, для объектов управления вида (44) при $B(D) = 1$ и возмущающем воздействии со спектром (36) в [40] было доказано, что оптимальный регулятор имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \left[A(D) - \frac{G(D)}{K} \right] x, \tag{64}$$

где $K = \dfrac{A(\alpha)}{G(\alpha)}$, а при возмущающем воздействии со спектром (40) оптимальный регулятор имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \left[A(D) - \frac{G(D)}{a + bD} \right] x, \tag{65}$$

где коэффициенты a и b вычисляются через вещественную и мнимую части комплексного числа

$$K_1 + jK_2 = \frac{A(\alpha - j\beta)}{G(\alpha - j\beta)}, \tag{66}$$

причем $a = k_1 + \frac{\alpha}{\beta}k_2, b = \frac{k_2}{\beta}$. (Напоминаем, что гурвицев полином $G(D)$ получается из равенства

$A(D)A(-D) + m^2 = G(D)G(-D)$

и имеет ту же степень, что и полином $A(D)$.)

Пусть теперь обратной связью (65) замкнут объект управления

$$A_1(D)x = u + \varphi(t), \tag{67}$$

у которого старший коэффициент полинома $A_1(D)$ равен $(1 + \varepsilon_n)\ a_nD^n$ — т. е. отличается от старшего коэффициента расчетного полинома $A(D)$ на малое число ε_n. Характеристический полином замкнутой системы будет равен

$$(a + bD)\varepsilon_n a_n D^n + G(D). \tag{68}$$

Его степень равна $n + 1$, а знак его старшего коэффициента будет зависеть от знака малой вариации ε_n, и тем самым может не совпадать со знаками остальных членов. Это означает, что в зависимости от знака вариации ε_n характеристический полином может перестать быть гурвицевым. Для объекта управления (44) при $B(D) = 1$ и возмущающем воздействии со спектром (40) оптимальная замкнутая система всегда может терять устойчивость при малой вариации старшего коэффициента и это связано с тем, что минимум критерия качества лежит на границе устойчивости или по старшему коэффициенту объекта управления, или по коэффициенту усиления b оптимального регулятора. На рис. 5, приводившемся еще в работе [40], показана зависимость критерия качества от коэффициентов усиления регулятора. Оптимальное значение $b = b_{\text{опт}}$ соответствует одновременно и минимуму критерия и границе устойчивости.

Для получения систем управления, сохраняющих устойчивость при вариациях параметров, необходимо использовать методы регуляризации. Первый метод регуляризации был предложен еще в 1973 году в той же монографии [40]. Однако он был недостаточно совершенным. Более удобный метод регуляризации был предложен в монографии [42]. Он был основан на обнаруженной [42] связи между структурой регулятора (45), т. е. степенями полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$, и степенями p и q в аналитической аппроксимации спектра возмущающего воздействия (41), а также степенью n полинома $A(D)$ и степенью m полинома $B(D)$ в математической модели объекта управления (44).

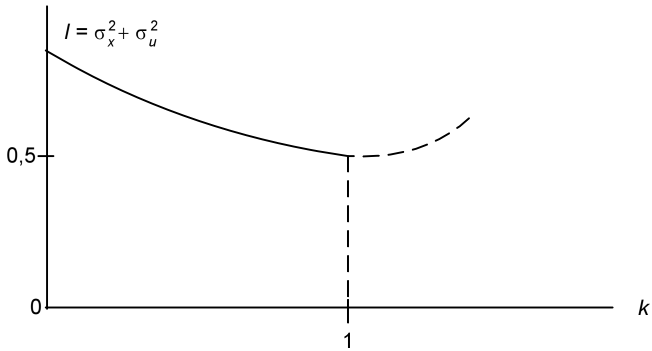

Рис. 5

Так, например, если $p \leq n + q - 1$, то для степени f полинома $W_1(D)$ выполняется неравенство

$$f \leq n + q - 1, \tag{69}$$

а для степени g полинома $W_2(D)$ — неравенство

$$g \leq m + q - 1. \tag{70}$$

Если $m + q - 1 \leq 2n - m + q - 1$, то

$$\begin{aligned} &f \leq n + q - 1, \\ &g \leq p, \end{aligned} \tag{71}$$

и если, наконец, $p > 2n - m + q - 1$, то

$$\begin{aligned} &f \leq m + p - n, \\ &g \leq p. \end{aligned} \tag{72}$$

Неравенства (69)—(72) выполняются почти всегда со знаком равенства (знак неравенства возникает лишь в тех случаях, когда у полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ оказываются одинаковые корни) и позволяют довольно много сказать о структуре и свойствах оптимального регулятора еще до его вычисления. Эти неравенства позволили сразу установить критерий возможности потери устойчивости замкнутой оптимальной системой при вариациях ее параметров, опубликованный в [42]: если выполняется неравенство

$$p \geq m + q - 1, \tag{73}$$

то при вариациях параметров устойчивость сохраняется, если это неравенство нарушается, то потеря устойчивости возможна. Позднее Л. Н. Волгин в [15] предложил назвать неравенство (73) критерием Ю. П. Петрова.

Критерий (73) открывает простой путь к построению систем управления, не теряющих устойчивости при вариациях параметров: ведь степени p и q аналитической аппроксимации спектра (41) находятся в наших руках и их всегда можно выбрать так, чтобы критерий Ю. П. Петрова оказался выполненным. Разумеется, удовлетворение дополнительного требования несколько ухудшает степень приближения аппроксимирующей кривой к экспериментальным точкам и приводит к неизбежной потере, жертве, критерия качества. Однако можно добиться того, чтобы расхождение между экспериментальными данными и аппроксимирующей кривой происходило за пределами полосы частот, существенной для системы (существенная полоса — это та область частот ω, внутри которой модуль частотной характеристики замкнутой системы еще не является пренебрежимо малым). При таком выборе потеря критерия качества, неизбежная для удовлетворения дополнительного требования сохранения устойчивости при вариациях параметров, становится минимальной.

После опубликования монографии [40] в 1973 году и монографии [42] в 1977 году наступил перелом в развитии теории синтеза оптимальных систем управления: она пошла по другому пути. Поиски алгоритмов синтеза систем, доставляющих минимум функционалам типа (50) и одновременно свободных от потери устойчивости при вариациях параметров объекта управления, прекратились. Вместо этого стали искать методы регуляризации [1; 42; 56; 71; 73], способные придать оптимальной системе дополнительное свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров за счет некоторого ухудшения критерия качества.

К сожалению, наиболее популярными методами регуляризации стали методы, основанные на введении составных функционалов типа:

$$J = \left\langle u^2 \right\rangle + m^2 \left\langle x^2 \right\rangle + k_1 \left\langle x'^2 \right\rangle + \ldots + k_n \left\langle (x^{(n)})^2 \right\rangle, \tag{74}$$

где только первые два члена имеют физический смысл (качество стабилизации и слежения отражает второй член, располагаемый ресурс управления — первый член, а остальные вводятся для регуляризации). Использование критериев качества вида (74), разумеется, позволяет получить системы управления, сохраняющие устойчивость при вариациях параметров, но неизбежная жертва в критерии качества может при этом оказаться слишком большой. В этом отношении гораздо удобнее метод регуляризации, предложенный в [42], позволяющий добиться минимальной жертвы критерия качества за счет изменения аналитической аппроксимации спектра за пределами полосы частот, существенных для данной системы с целью выполнения критерия Ю. П. Петрова (73). При этом ухудшение критерия качества будет меньше,