НОВЕЙШИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Под редакцией
А.А. Потапова

А.А. ПОТАПОВ, Ю. В. ГУЛЯЕВ, С.А. НИКИТОВ,
А.А. ПАХОМОВ, В.А. ГЕРМАН

НОВЕЙШИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Под общей редакцией д. ф.-м. н. А.А. Потапова

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2008

УДК 519: 522+621.396.96
ББК 22.311
Н 72

Авторский коллектив:
А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Пахомов, В. А. Герман

Новейшие методы обработки изображений / Под ред. А. А. Потапова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-0841-6.

В монографии впервые систематически рассмотрены и обобщены разработанные авторами новые направления в приложении теории обработки искаженных и малоконтрастных изображений к актуальным задачам радиофизики, астрономии, оптики и радиолокации. Монография состоит из двух частей. В первой части на основе аппарата целочисленной меры Лебега проведен теоретический анализ однозначности восстановления одномерных сигналов и изображений по неполной информации об их Фурье-спектрах. Построены модели на основе использования преобразования Гильберта для связи между модулем и фазой в двумерном случае. При отсутствии условий аналитического решения задач применяются методы проекций на выпуклые множества. Во второй части приведены полученные на основе аппарата дробной меры и дробной размерности результаты фрактального подхода к обработке сверхслабых сигналов и малоконтрастных изображений. Применяются методы моделирования на основе скейлинга и распределения с «тяжелыми хвостами». Эффективность методов фрактальной фильтрации широко иллюстрируется примерами. Изложены принципы синтеза фрактальных обнаружителей.

Для специалистов, интересующихся новыми идеями и современными методами обработки изображений, сигналов и распознавания образов, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Утверждено к печати Ученым советом ИРЭ РАН 17 ноября 2006 г.

ISBN 978-5-9221-0841-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Выдающемуся ученому
Владимиру Александровичу Котельникову посвящается

Предисловие

Современное состояние теории обработки многомерных сигналов характеризуется дальнейшим развитием и совершенствованием статистических методов, а также бурным проникновением в нее новых физических идей и широким использованием классических и *нестандартных* разделов математики. Основная цель монографии состоит в том, чтобы представить математические и физические аспекты новейших методов обработки изображений как мощного инструмента исследований разнообразных задач в широком круге научных и технических приложений.

На включение тех или иных вопросов наложили отпечаток научные интересы авторов. При этом основной упор сделан на систематическом изложении общих и принципиальных вопросов, возникающих в процессе исследований в областях радиофизики, оптики, астрономии и радиоэлектроники. Новейшие методы обработки изображений можно рассматривать как своеобразный «сплав» классических и нестандартных разделов математики с современными радиофизическими подходами.

В настоящее время становится ясным, что применение в современных информационных технологиях идей нетривиальной масштабной инвариантности — «скейлинга» и разделов современного функционального анализа, которые связаны с теорией множеств, теорией размерности, общей топологией и геометрической теорией меры, открывает большие потенциальные возможности и новые перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях.

При решении широкого круга научных и практических задач когерентной оптики, электронной микроскопии, рентгеноструктурного анализа, локации, оптической астрономии и других областей физики нередко возникают ситуации, когда доступными или неискаженными оказываются только модуль или фаза неизвестного распределения, заданного в конечной области пространства. Задачи восстановления недостающих Фурье-компонент фазы и амплитуды и, как следствие, искомого распределения получили название соответственно *фазовой и амплитудной проблем*.

Теоретический анализ фазовой и амплитудной проблем можно условно разделить на два направления: 1) установление аналитической связи между модулем и фазой; 2) непосредственный анализ задач, основанный на аналитических свойствах Фурье-спектра и его разложимости на элементарные множители.

Начиная с конца 50-х гг. XX в., их изучением активно занимаются многие научные группы различных стран. К настоящему времени получены как теоретические результаты, касающиеся вида и количества решений, так и конкретные схемы восстановления. Однако, в представляющем основной практический интерес двумерном случае и, тем более, для дискретных распределений отсчетов остаются открытыми не только многие теоретические вопросы, но и основной практический вопрос создания быстрого и устойчивого алгоритма восстановления.

Основные результаты, вошедшие в монографию, опубликованы в статьях авторов. Однако часть результатов была получена в процессе работы над рукописью. Несколько слов о структуре монографии. Существо ее определено названием. Круг вопросов, включенных в книгу, виден из оглавления. Книга состоит из семи глав.

Цель главы 1 — достаточно компактно предоставить читателю необходимый математический аппарат с кратким описанием его исторического развития. Изложенные здесь математические сведения играют важную роль в последующих главах монографии. Авторы считают, что в настоящее время невозможно говорить о современных методах обработки сигналов и изображений без привлечения все более разнообразных фундаментальных разделов математики и соответствующего математического аппарата. Хотя данная глава является подготовительной, а изложение носит очень широкий характер, наиболее фундаментальные понятия и факты изложены достаточно полно. Для более глубокого изучения представленных разделов математики и получения дополнительной информации к первой главе прилагается обширный список литературы. Помимо ссылок на блестящие математические руководства и монографии, мы настоятельно рекомендуем использовать в последующей работе уникальную многотомную серию информационного издания «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», выпускаемую ВИНИТИ с 1985 г.

В главе 2 рассмотрены общетеоретические вопросы: постановка задач, элементы математического аппарата теории функции комплексного переменного, обобщение одномерных преобразований Гильберта на двумерный случай, свойства корней Фурье-спектра, метод построения всех решений некорректных задач в одномерном и двумерном случаях, общий аналитический метод сведения двумерного дискретного случая задач к одномерному и оценка вероятности неоднозначного решения задач в двумерном дискретном случае. В одномерном непрерывном случае связь модуля и фазы хорошо известна и описывается обобщенными преобразованиями Гильберта, в которые входят неизвестные слагаемые — фазы Бляшке. Обобщению этих уравнений на двумерный случай, учету специфики дискретных изображений и анализу условий, при которых фазы Бляшке отсутствуют, посвящено развитие первого из упомянутых направлений в данной главе. Второе направление основано на использовании теории целых аналитических функций, в частности, разложения Адамара–Вейерштрасса, основной теоремы алгебры и их многомерных аналогов. Основной вопрос обеих задач — вопрос однозначности восстановления. Он сводится к представимости неизвестного восстанавливаемого изображения в виде свертки финитных положительных субизображений. При этом оказывается, что в одномерном случае ответ на него положительный и, например, фазовая проблема имеет множество решений, а в двумерном — отрицательный. Строгий теоретический анализ двумерного случая наиболее очевиден для дискретных изображений и сводится к анализу разложимости их z-образов, которые являются двумерными полиномами и, в общем случае, не представимы в виде произведения двух полиномов меньшей степени.

В главе 3 представлены результаты, касающиеся вопросов создания цифрового имитатора атмосферных изображений и моделирования атмосферных характеристик и влияния их на визуальное качество изображений. Основное место здесь занимают методики обработки очень слабых астрономических изображений (когда регистрируемое изображение представляет собой случайный набор отдельных фотонов), а также их приложения. К числу известных и работоспособных методов относятся метод биспектрального анализа, метод Лабейри, метод Нокса–Томпсона и т. д. Один из важнейших вопросов в данной ситуации это обработка изображений объектов, быстро меняющих свой ракурс. Данная задача здесь также решена и разработан эффективный итеративный алгоритм решения. Он носит название обработки короткой серии изображений.

Глава 4 посвящена решению крайне актуальной задачи, а именно, обработке только одного искаженного атмосферой изображения. Эта задача возникает при наблюдении и регистрации практически любого типа изображений, начиная от искаженных изображений космических аппаратов и кончая обработкой фотоснимков, сделанных любительской фотоаппаратурой. В общей постановке, когда ни само неискаженное изображение, ни передаточная функция системы атмосфера–телескоп неизвестны, не удается также в общем виде создать устойчивый сходящийся алгоритм. В целом же ряде практически важных случаев, например, при наблюдении из космоса с длинной экспозицией или при наличии смазов и дефокусировок задача оказывается разрешимой. Суть обработки здесь заключается в выделении недостаточной, но неискаженной информации и восстановлении только по ней неискаженного изображения. Все перечисленные типы некорректных задач промоделированы и отработаны на модельных изображениях, а также на многочисленных реальных кадрах. Много результатов получено авторами при обработке изображений, наблюдаемых не только через неустойчивую атмосферу Земли, но и через неоднородную морскую и океаническую воду. Обработка цветных изображений показала устойчивую работоспособность предложенных методов.

Основную часть главы 5 занимает исследование двумерного случая хорошо известной фазовой проблемы. В частности, большое внимание уделяется исследованию характеристик различных алгоритмов восстановления итерационного типа. В результате выявлен быстрый и устойчивый алгоритм численного решения и проведена обработка реальных голограмм. Также решены усложненные варианты фазовой проблемы, например, задача восстановления изображения по отношению модулей Фурье-спектра, и проведено математическое моделирование. Описана попытка *создания* жидкокристаллических очков нового типа на основе принципа обратной связи с роговицей глаза. Примерный чертеж представлен в тексте главы и приведены расчеты соответствующих волновых фронтов. Авторы рассмотрели также задачу стереосинтеза, разработали новый алгоритм пирамидального типа и проверили его при обработке реальных изображений. Применению методов Фурье-анализа к задачам художественного проектирования узоров тканей и гобеленов посвящен отдельный параграф. Разработан и промоделирован алгоритм построения узоров нового типа на основе выделения фазовой информации. Сделаны попытки создания цветных узоров с ручным подбором палитры.

В главе 6 рассмотрены основные понятия и излагается методология фрактальной обработки многомерных сигналов в актуальных научных и технических приложениях. Представлены основные направления разрабатываемых в ИРЭ РАН прорывных информационных технологий в рамках междисциплинарного научного направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника» на основе синергетических принципов теории фракталов, эффектов скейлинга и детерминированного хаоса. Основное внимание уделено известным и разработанным в ИРЭ РАН методам определения фрактальных характеристик сигналов, изображений и волновых полей. Приведены результаты обширных компьютерных экспериментов. Даны подробные результаты исследований вероятностных распределений фрактальных одномерных разрезов изображений и фрактальных двумерных сцен в помехах различного типа. Подробно изложен параметрический анализ распределений фрактальных характеристик изображений с помощью диаграммы Пирсона. Полученные данные подтверждают работоспособность созданных в ИРЭ РАН различных модификаций фрактальных методов фильтрации объектов, замаскированных интенсивными *негауссовскими* шумами и помехами.

Глава 7 посвящена разнообразным вопросам фрактальной обработки изображений различной физической природы. Рассмотрены фрактальные признаки изображений. Показано, что прямое использование точечных оценок фрактальной размерности для идентификации земных покровов и метеорологических образований, обнаружения и распознавания целей на их фоне достаточно трудоемко и неоднозначно Для таких задач оптимален метод *фрактальных сигнатур* и *фрактальных кепстров*. Эти понятия были впервые введены в ИРЭ РАН для эффективной обработки малоконтрастных изображений и сверхслабых сигналов. Фрактальные цифровые методы позволяют частично преодолевать априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью информации о *топологии выборки* — одномерной или многомерной, т. е. в случае сигнала и изображения. При этом большое значение приобретают топологические особенности индивидуальной выборки, а не усредненные реализации, имеющие зачастую совершенно другой характер. Проведено сопоставление методов фрактального анализа с вейвлет-обработкой. Отмечено, что подобие во фрактальном анализе подразумевается гораздо шире. Рассмотрены характерные примеры выделения реальных изображений объектов на сложном неоднородном фоне, т. е. вопросы обобщенной фрактальной фильтрации. Описана идеология создания словаря фрактальных признаков на основе фрактальных примитивов и оригинального динамического теста. Представлены результаты фрактального выделения контуров объектов и фрактальной кластеризации с целью обнаружения малозаметных областей.

Чтобы сопоставить все методы обработки, приведенные в настоящей монографии, и оценить их преимущества или какие-либо ограничения в конкретных случаях, в процесс фрактальной обработки включена часть астрономических изображений, рассмотренных в предыдущих главах. Полученные результаты приведены также в главе 7.

Нумерация формул в каждой главе независима от нумерации в других главах. Чтобы сделать книгу более полезной и удобной для читателя, к каждой главе прилагается отдельный список литературы.

Все рассмотренные в монографии методы приводят в большинстве случаев к весьма сильным результатам, и от них можно ожидать еще очень многого. В частности, области применения *фрактальной обработки* сигналов, полей и изображений постоянно расширяются, и трудно поверить, что еще около десяти лет назад было немало скептических высказываний относительно перспективности этого нового фундаментального научного направления.

Таким образом, монография знакомит читателя с целым рядом ключевых идей в указанных выше направлениях и формулирует основу для дальнейшего их изучения. В ряде глав доказано по нескольку новых теорем, имеющих важное значение при решении вопросов однозначности восстановления и отбраковке ложных решений. По своему назначению и отбору материала монография не имеет аналогов в мировой литературе.

Книга определенно будет полезна широкому кругу, как научных работников, так и инженеров, связанных по роду своей деятельности с проблемами обработки информации в радиофизике, оптике, астрономии, радиотехнике и радиолокации, а также аспирантам и студентам старших курсов, изучающим эти проблемы.

Авторы признательны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку, способствующую выходу монографии в свет.

Москва
Январь 2007 г.

А.А. Потапов

Глава 1

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ В ИХ ИСТОРИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ

1.1. Основы теории множеств и теории меры

1. Наивная теория множеств. Под *множеством* понимается совокупность отдельных предметов, объединенных в одно целое. Открытия Георга Кантора, сформировавшиеся в конце 19-го века в самостоятельную область математики под названием «*теория множеств*», вначале натолкнулись на недоверие и предубеждение многих великих математиков. Первое официальное признание теории множеств принес Первый Международный конгресс математиков, прошедший 9–11 августа 1897 г. в Цюрихе. Та же тенденция была и на Втором Международном математическом конгрессе в 1900 г. Можно отметить тот факт, что Гильберт в своих знаменитых «Будущих проблемах математики» на первое место выдвинул проблему континуума.

В начале 20-го века в теории множеств стали обнаруживаться *антиномии* (противоречия), обсуждение которых активно шло всю первую половину 20-го века. Абстрактность теории множеств и ее значение для всей математики потребовали анализа ее оснований.

Формальное построение более надежного фундамента теории множеств базируется на *аксиоматических*, *логических* и *интуиционистских* позициях. Однако, это выходит за рамки нашего рассмотрения. Ниже будут кратко приведены основные понятия «*наивной*» теории множеств.

Указание того, что элемент x *принадлежит* множеству A, записывается в виде $x \in A$ или $x \ni A$. Если A есть *подмножество* множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Пустое множество обозначают через $\varnothing$. *Верхнюю грань* множества A обозначают как $\sup A$, а *нижнюю грань* — $\inf A$. *Верхний и нижний пределы* обозначаются соответственно $\limsup x = \overline{\lim}\, x$ и $\liminf x = \underline{\lim}\, x$. *Сумма* или *объединение* множеств A и B есть $C = A \bigcup B$, их *пересечение* $C = A \bigcap B$, *разность* $C = A \setminus B$. В теории меры удобно рассматривать *симметрическую разность* двух множеств

$$A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A). \tag{1.1}$$

Каждому подмножеству A данного фиксированного множества E можно взаимно однозначно отнести некоторую определенную на E функцию $f(x)$, которая принимает только два значения 0 и 1, полагая $f(x) = 1$, когда $x \in A$ и $f(x) = 0$, если $x \in E \setminus A$. Эту функцию называют *характеристической функцией* множества A. Если $A \subseteq X$, то величина

$$d = \operatorname{diam} A = \sup_{x \in A, x' \in A'} \rho(x, x') \leqslant \infty \tag{1.2}$$

называется *диаметром* множества A в метрическом пространстве (X,ρ). Для $\operatorname{diam} A < \infty$ имеем *ограниченное* множество A.

Два множества *эквивалентны* или *равномощны*, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие. По *теореме* Кантора–Бернштейна множества A и B равномощны, если множество A равномощно некоторому подмножеству B, а множество B равномощно некоторому подмножеству множества A. В 1883 г. Кантор сформулировал эту теорему без доказательства, а первые ее доказательства были даны Шредером (1896 г.) и Бернштейном (1897 г.).

В 1895 г. Кантор отмечал: «*Мощностью* или *кардинальным числом* множества M мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из M, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов m и от порядка их задания. Так как из каждого отдельного элемента m, когда мы отвлекаемся от качества, получается некая «единица», то само кардинальное число оказывается множеством, образованным из единиц, которое существует как интеллектуальный образ или как проекция заданного множества M в наш разум». В своих работах Кантор обозначал мощность множества символом «двойного» отвлечения.

Для числовых множеств введены специальные обозначения: N — для множества натуральных чисел, Z — для множества целых чисел, Q — для множества рациональных чисел, P — для множества вещественных чисел, C — для множества комплексных чисел.

Мощность множества N натуральных чисел называется $\aleph_0$ («алеф-нуль»). Множества этой мощности являются счетными. Множеству P действительных чисел (или множеству всех точек прямой) приписывается мощность $\aleph$ («алеф») или c. Данная мощность называется *мощностью континуума*. Оказывается, что квадрат множества мощности континуума имеет снова мощность континуума, т. е. квадрат равномощен отрезку (Кантор, 1877 г.).

Кардинальное число множества A или *кардинал* множества A часто обозначают символами $\operatorname{card} A$ или $|A|$. По теореме Кантора множество 2^A всех подмножеств множества A не равномощно ни самому A, ни его подмножеству.

Приведем некоторые математические свойства кардинальных чисел:

$$c = \aleph = 2^{\aleph_0},\ \ \aleph = 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots,\ \ \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,\ \ n + \aleph_0 = \aleph_0,\ \ \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0,$$
$$\aleph_0^n = \aleph_0,\quad \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph,\quad \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c,\quad \aleph + \aleph = \aleph,\quad \aleph \times \aleph = \aleph, \tag{1.3}$$
$$\aleph_0 \times \aleph = \aleph,\quad \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph},\quad 1^{\aleph} = 1^{\aleph_0} = 1,\quad \aleph = \aleph^2 = \aleph^3 = \ldots = \aleph^{\aleph_0},\quad \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph},$$

или в общем виде:

$$n + \aleph_0 = n\aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0,$$
$$(n+1)^{\aleph} = \aleph_0^{\aleph} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}, \tag{1.4}$$
$$(n+1)^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = n + \aleph = n \times \aleph = \aleph^n = \aleph_0 + \aleph = \aleph_0 \times \aleph =$$
$$= \aleph^{\aleph_0} = \aleph + \aleph = \aleph \times \aleph = \aleph.$$

Для каждого порядкового числа α мощность множества всех порядковых чисел, меньших ω_α, обозначается через $\aleph_\alpha = w(\omega_\alpha)$. Для $\alpha < \beta$ имеем

$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Для любого порядкового числа α можно записать *обобщенную континуум-гипотезу* в виде

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}. \tag{1.5}$$

В нашем случае необходимо предположение, что $\aleph = \aleph_1$. Приведем ниже рекурсивную формулу Хаусдорфа:

$$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \times \aleph_{\alpha+n}. \tag{1.6}$$

Формула Бернштейна получается из (1.6) в случае $\alpha = 0$:

$$\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \times \aleph_n. \tag{1.7}$$

В заключение приведем рекурсивную формулу Тарского:

$$\aleph_\alpha^{\aleph} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}, \tag{1.8}$$

если порядковое число α предельно и $\beta < cf(\alpha)$, где $cf(\alpha)$ обозначает конфинальный характер порядкового числа α.

Множество X называется *частично упорядоченным*, если на нем задано отношение частичного порядка:

$$\begin{gathered} x \prec x \text{ для всех } x \in X \text{ — рефлексивность,} \\ x \prec y \text{ и } y \prec x \Rightarrow x = y \text{ для всех } x, y \in X \text{ — антисимметричность,} \\ x \prec y \text{ и } y \prec z \Rightarrow x \prec z \text{ для всех } x, y, z \in X \text{ — транзитивность.} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Символы a $\prec b$ или $a \le b$ означают, что элемент *a подчинен b*, или a предшествует b. Опуская требование антисимметричности, можно получить определение *предпорядка*. По *теореме* Цермело всякое множество может быть вполне упорядочено. Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество содержит минимальный элемент.

2. Кольца и алгебры. Непустой класс множеств F называется *кольцом*, если он обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} A \in F \text{ и } B \in F, \text{ то } A\Delta B \in F \quad A \bigcap B \in F, \\ A \bigcup B \in F, \varnothing = A \setminus A \in F, \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in F \text{ и } \bigcap_{k=1}^{n} \in F \end{gathered} \tag{1.10}$$

для любого набора $A_1, \ldots, A_n$ из F.

Система множеств F называется *полукольцом*, если оно содержит пустое множество $\varnothing$, и при $A \in F$ и $B \in F$ имеем $A \bigcap B \in F$. Непустой класс подмножеств S некоторого множества F называется *σ-кольцом*, если он содержит объединение любой последовательности своих членов.

Кольцо или σ-кольцо подмножеств множества F называется *алгеброй* или *σ-алгеброй* подмножеств множества F, если само F есть элемент кольца. *Алгебра* — это непустой класс множеств, замкнутый относительно операции объединения и взятия дополнения.

Пусть X — множество и F — система его подмножеств, удовлетворяющая двум условиям: пересечение всякой конечной подсистемы элементов F принадлежит F, объединение всякой подсистемы элементов F принадлежит F. Также считаем, что само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат F. Тогда пара (X, F) называется *топологическим пространством*, а семейство F — *топологией*. Элементы множества X называют *точками* топологического пространства X, элементы топологии F — *открытыми множествами* пространства X, а дополнения к ним — *замкнутыми*.

Если в пространстве X заданы две топологии F_1 и F_2, причемF_1 полностью содержится в F_2 (любое открытое множество в F_1 является открытым множеством в F_2), то говорят, что топология F_1 *слабее* топологии F_2, а топология F_2 *сильнее* топологии F_1. *Самой слабой* топологией в множестве X является топология, состоящая из двух элементов: множества X и пустого множества $\varnothing$. Данная топология называется *антидискретной топологией*. *Самой сильной топологией* в пространстве X является топология, содержащая все множества пространства X. Эту топологию называют *дискретной топологией*.

В самой слабой (минимальной или тривиальной) топологии существуют только два открытых множества, которые как дополнение одно другого являются в то же время и замкнутыми множествами. В дискретной топологии все множества — одновременно открытые и замкнутые. В качестве еще одного примера рассмотрим *двоеточие* $X = \{0, 1\}$. Тогда семейство $F = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ — топология на X.

Наименьшее замкнутое множество, содержащее множество A, называется *замыканием* A. Оно обозначается $[A]$ или $\overline{A}$. При этом A — подмножество пространства X. Значение $[A]$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Топология $[F] = F$ для замкнутого множества и $[[A]] = [A]$. Объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, обозначается $\langle A \rangle$ и называется *открытым ядром* множества A. Для открытого F имеем $\langle F \rangle = F$ и $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$. Если x принадлежит открытому ядру множества A, то A есть *окрестность* x.

Множество называется *плотным* в себе, если оно не содержит изолированных точек. Если множество замкнуто и плотно в себе, то оно называется *совершенным*. Тогда, если A плотно в себе, то $[A]$ совершенно.

3. Борелевские и суслинские множества. Множества, получаемые из замкнутых (или открытых) при помощи счетного числа операций объединения, пересечения и вычитания, известны под названием *борелевских* множеств, или B-множеств. Посредством *A-операции* над борелевскими множествами получается широкий класс множеств, называемых *суслинскими* или *A-множествами* (названы Суслиным в честь П.С. Александрова) или *аналитическими*. Дополнения A-множеств называются *аналитическими дополнениями* или *CA-множествами*. Чтобы A-множество было B-множеством, необходимо и достаточно, чтобы: 1) дополнение к нему снова было A-множеством (*критерий* Суслина); 2) оно являлось результатом A-операции с непересекающимися слагаемыми (*критерий* Лузина).

Затем Н.Н. Лузиным был поставлен вопрос о существовании A-множества, не являющегося борелевским. Ответом на данный вопрос и явился критерий Суслина. Еще один важный способ задания A-множеств был предложен Н.Н. Лузиным при помощи введенной им операции *решета*.

Понятие A-операции впервые определено М.Я. Суслиным в 1917 г. Пусть $\{A_{k_1}\ldots A_{k_n}\}$ — система множеств, определенная для каждой конечной последовательности $k_1,\ldots,k_n$ положительных целых чисел. Множество $R = \bigcup_{k_1,\ldots,k_n}\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_1\ldots k_n}$ называется результатом A-операции, примененной к системе $\{A_{k_1}\ldots A_{k_n}\}$. Заметим, что A-операция включает операции сложения и пересечения множеств. Когда $A_{k_1}\ldots A_{k_n} = B_{k_1}$ или $A_{k_1}\ldots A_{k_n} = B_n$, то мы имеем $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ или $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ соответственно.

Отображение f пространства X в пространство Y называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества F, содержащего $f(x_0)$, найдется окрестность U точки x_0, такая, что $f(x) \in F$ для всех $x \in U$. Взаимно однозначное отображение f множества X на Y, при условии непрерывности f и f^{-1}, называется *гомеоморфным* или *гомеоморфизмом* и обозначается, как $f : X \to Y$. Топология изучает свойства множеств с точностью до гомеоморфизма. Например, сфера и куб топологически эквивалентны.

4. Выпуклые множества. Множество в евклидовом E или другом векторном пространстве называется *выпуклым*, если из $x, y \in \mathring{A}$ вытекает, что $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Геометрический смысл этого понятия заключается в том, что вместе с любыми двумя точками $x, y \in \mathring{A}$ множество E содержит все точки соединяющего их отрезка. *Ядро* $J(E)$ произвольного множества $E \subset L$ есть совокупность таких его точек x, что для каждого $y \in L$ найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, что $x + ty \in E$ при $|\,t\,| < \varepsilon$. Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется *выпуклым телом*. Для трехмерного евклидова пространства куб, шар, тетраэдр, полупространство представляют собой выпуклые тела. Отрезок, плоскость, треугольник в том же пространстве — выпуклые множества, но не выпуклые тела.

Если M — выпуклое множество, то его ядро $J(M)$ также выпукло. Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество. Однако, пересечение выпуклых тел (являясь выпуклым множеством) не обязательно будет выпуклым телом. Минимальное выпуклое множество, содержащее множество A, называется *выпуклой оболочкой* множества A.

Пусть $x_1,\ldots,x_{n+1}$ — точки некоторого линейного пространства. Если векторы $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, $\ldots$, $x_{n+1} - x_1$ линейно независимы, то говорят, что точки $x_1,\ldots,x_{n+1}$ находятся в *общем положении*. Выпуклая оболочка точек $x_1,\ldots,x_{n+1}$, находящихся в общем положении, называется n-мерным *симплексом* с вершинами $x_1,\ldots,x_{n+1}$. Одна точка — это нульмерный симплекс; отрезок — одномерный симплекс; треугольник — двумерный симплекс; тетраэдр — трехмерный симплекс.

С понятием выпуклого множества тесно связано понятие *однородно-выпуклого функционала*. Определенный на действительном линейном пространстве L функционал p называется выпуклым, если

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \tag{1.11}$$

для всех x, $y \in L$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Положительно-однородный функционал p имеет вид

$$p(\alpha x) \leqslant \alpha p(x) \tag{1.12}$$

для всех $x \in L$ и $\alpha > 0$.

В случае выпуклого положительно-однородного функционала выполняется неравенство:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y). \tag{1.13}$$

Положительно-однородный выпуклый функционал называется кратко *однородно-выпуклым*. Всякий линейный функционал является однородно-выпуклым. Длина вектора в n-мерном евклидовом пространстве есть однородно-выпуклый функционал.

Функционал, определенный на произвольном линейном пространстве L, вида

$$p_A(x) = \inf\left\{r : \frac{x}{r} \in A, \quad r>0\right\} \tag{1.14}$$

где A — выпуклое тело в L, называется *функционалом Минковского* выпуклого тела A. По определению, функционал Минковского (1.14) — однородно-выпуклый и неотрицательный.

Через функционал Минковского устанавливается связь между неотрицательными однородно-выпуклыми функционалами и выпуклыми телами с ядром, содержащим точку 0. При $A = L$ имеем $p_L(x) \equiv 0$. Для шара A с центром 0 и радиусом $\mathbf{r}$ в R^n получаем $p_A(x) = \|x\|/r$. Верхняя грань $p(x) = \sup\limits_{s\in S} p_s(x)$ любого непустого множества линейных функционалов на L есть однородно-выпуклый функционал. Таким образом можно представить любой конечный однородно-выпуклый функционал.

5. Общая метрика. По определению, в множестве F установлена *общая метрика*, если каждой паре элементов x, y отнесено неотрицательное число $\rho(x,y)$, называемое расстоянием от x до y. *Метрические пространства*, введенные Фреше в 1906 г., определяются следующими аксиомами:

$$\begin{aligned}
&1)\ \rho(x,y) = 0 \text{ при } x = y \text{ — аксиома тождества,}\\
&2)\ \rho(x,y) = \rho(y,x) \text{ — аксиома симметрии,}\\
&3)\ \rho(x,y)+\rho(y,z) \geqslant \rho(x,z) \text{ — аксиома треугольника.}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Множество F с установленной в ней общей метрикой называется *общим метрическим пространством*. Две метрики в множестве F *топологически эквивалентны*, если они задают одну и ту же топологию.

6. Функции множеств. Рассмотрим далее некоторые *функции множеств*. Уже в классическом анализе появлялись такие функции. Мы можем рассматривать длину сегмента или площадь многоугольника с классом аргументов в виде совокупности отрезков или совокупности многоугольников. Расширение таких классов привело к теории меры, где понятия длины, площади и объема распространены на точечные множества. Развитие теории множеств, привело к общим методам изучения данных функций.

Действительная функция множества $\lambda(\ldots)$, определенная на некотором классе множеств H и принимающая конечные или бесконечные значения, называется:

1) *неотрицательной*, если для любого $A \in H$, $\lambda(A) \geqslant 0$;

2) *конечно-полуаддитивной* (*полуаддитивной*), если для любого $A_i \in H$, $i = \overline{1,n}$ и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in H$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i); \tag{1.16}$$

3) *конечно-аддитивной* (*аддитивной*), если для любого $A_i \in H$, $i = \overline{1, n}$ и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in H$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i); \qquad (1.17)$$

4) *счетно-полуаддитивной* (*σ-полуаддитивной*), если для любого $A_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i); \qquad (1.18)$$

5) *счетно-аддитивной* (*σ-аддитивной*), если для любого $A_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i); \qquad (1.19)$$

6) *монотонной*, если для любого $A, B \in H$ и $A \subset B$

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(B); \qquad (1.20)$$

7) *конечной*, если для любого $A \in H$

$$\lambda(A) < \infty; \qquad (1.21)$$

8) *σ-конечной*, если существует $\{A_i\}$, $A_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H \text{ и } \lambda(A_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (1.22)$$

Множество A *плотно* в интервале $\underline{I}$, если оно имеет непустое пересечение с каждым подинтервалом из $\underline{I}$. Иначе говоря, множество плотно, если оно плотно на всей действительной прямой Р. Множество называется *нигде неплотным*, если оно не является плотным ни в каком интервале.

7. Категории множеств. Множество A топологического пространства X называется *множеством первой категории* на X, если его можно представить в виде конечной или счетной суммы множеств, нигде не плотных на X. В противоположном случае имеем *множество второй категории*. Эти определения были сформулированы в 1899 г. Бэром. Иногда такие множества называются *резидуальными* или *остаточными*.

По теореме Бэра дополнение любого множества первой категории на прямой является плотным. Никакой интервал в Р не является множеством первой категории. Каждое счетное множество будет множеством первой категории и множеством меры нуль.

Простейшим примером несчетного множества, принадлежащего к множеству первой категории и множеству меры нуль, является *канторово* множество, имеющее мощность континуума (см. ниже). Можно доказать, что прямую можно разбить на два дополняющих друг друга множества A и B так, что A есть множество первой категории, а B имеет меру нуль.

Метрическое пространство называется *сепарабельным,* если в нем имеется счетное плотное подмножество или, что эквивалентно, счетная база. *Роль множества первой категории в топологии аналогична роли множества меры нуль в теории меры.*

8. Мера. Функция множества $\mu(A)$ называется *мерой*, если она определена на некотором полукольце множеств, действительна, неотрицательна, счетно-аддитивна и $\mu(\varnothing) = 0$. Положительная мера, удовлетворяющая условию $\mu(A) = 1$, называется *вероятностной.*

Мера μ называется *продолжением меры* m, если полукольцо P_μ с мерой μ содержит полукольцо P_m с мерой m, и для каждого $A \in P_m$ имеет место равенство $\mu(A) = m(A)$. Тогда, для каждой меры μ на полукольце P существует одно и только одно продолжение до меры на минимальном кольце $K(P)$, порожденном полукольцом P.

Действительная функция множества $\mu^*(A)$ с нижней гранью по всевозможным покрытиям множества A называется *внешней мерой* множества A и обозначается $\mu^*(A)$:

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup P_k} \sum_k (P_k). \tag{1.23}$$

Всякая конструктивно полученная мера есть внешняя мера, значения которой рассматривают на σ-кольце, на котором она аддитивна. Некоторые свойства внешней меры выделил в 1914 г. Каратеодори в качестве трех аксиом. К ним относятся требования неотрицательности, монотонности, счетно-полуаддитивности и $\mu^*(\varnothing) = 0$. Однако при столь общем определении внешней меры нельзя доказать нетривиальность класса измеримых множеств.

Чтобы гарантировать существование непустых измеримых множеств, отличных от всего пространства, Каратеодори высказывает следующее *добавочное требование*:

$$\mu^*\left(X \bigcup Y\right) = \mu^*(X) + \mu^*(Y) \text{ при } \rho(X, Y) > 0. \tag{1.24}$$

При выполнении (1.24) оказывается, что открытые множества измеримы, поэтому *измеримы и все борелевские множества.*

Для каждого класса X обозначим через 2^X класс всех подмножеств класса X. Тогда A является μ^*-измеримым множеством, если $A \subset X$ и

$$\mu^*(T) = \mu^*\left(T \bigcap A\right) + \mu^*(T \setminus A) \text{ при любом } T \subset X. \tag{1.25}$$

Для μ^*-измеримости множества A необходимо и достаточно, чтобы $\mu^*(T) \geqslant \mu^*\left(T \bigcap A\right) + \mu^*(T \setminus A)$ при любом $T, \mu^*(T) < \infty$.

Ясно, что измеримые множества образуют σ-алгебру. Множество $E \subset [a, b]$ называют *измеримым по Лебегу*, когда

$$\lambda^*(E) + \lambda^*(\overline{E}) = b - a, \quad \overline{E} = [a, b] \setminus E. \tag{1.26}$$

В этом случае *внешняя мера* λ^* является *мерой Лебега* на σ-алгебре всех измеримых по Лебегу множеств. Мера Лебега в евклидовом пространстве строится по следующему образцу: определяется мера для простейших множеств (прямоугольники в случае плоскости и т. п.); находится мера для конечных объединений таких множеств; затем полученная мера распространяется на гораздо больший класс измеримых по Лебегу множеств. Данная мера является *борелевской регулярной мерой*. Важным обобщением меры Лебега является представление о каком-либо распределении массы в пространстве, что позволяет связать с любым множеством меру, равную массе, распределенной на множестве.

Для измеримого пространства (X, U) со счетно-аддитивными мерами μ^* и ν^* меру называют *непрерывной* μ_c, если она определена и равна нулю для любого множества $E \subset X$. Если мера целиком сосредоточена на счетном множестве точек, то она называется *дискретной* μ_d. Каждая точка $x \in X$ для которой $\mu(\{x\}) > 0$ называется *атомом* меры μ. При этом множество всех атомов меры μ называют ее *точечным спектром* D_μ. Для дискретной меры

$$\mu(E) = \sum_{x \in E \bigcap D} \mu(\{X\}). \tag{1.27}$$

Мера μ_s называется *сингулярной*, если она сосредоточена на множестве A таком, что $\nu(a) = 0$:

$$\exists A \in U: \quad \mu_s(A) = 0, \quad \nu(X \setminus A) = 0. \tag{1.28}$$

По теореме Лебега о разложении можно показать, что всякая счетно-аддитивная мера μ для любого $E \in U$ представима в форме

$$\mu(E) = \mu_d(E) + \mu_c(E). \tag{1.29}$$

Если $\mu(E) = 0$ для всех $E \in U$, при которых $\nu(E) = 0$, то мера μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно ν. Тогда для каждой счетно-аддитивной меры μ существует одно и только одно разложение:

$$\mu(E) = \mu_{ac}(E) + \mu_s(E) + \mu_d(E), \text{ для любого } E \in U. \tag{1.30}$$

Для вероятностной метрики можно ввести понятие *структуры* метрики

$$\mu(E) = \alpha_1 \mu_{ac}(E) + \alpha_2 \mu_s(E) + \alpha_3 \mu_d(E), \tag{1.31}$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0$.

По *теореме* Радона–Никодима для того, чтобы мера μ была абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы она являлась неопределенным интегралом от интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, $x \in X$ для любого $E \in U$:

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\lambda. \tag{1.32}$$

Здесь $f(x)$ — плотность или производная меры μ относительно меры Лебега, определяемая однозначно с точностью *до множества λ-меры нуль*.

9. О теории динамических систем. В заключение приведем *теорему Пуанкаре о возвращении*, замечательную по своей простоте и важным следствиям. Данная теорема лежит в основе современного учения о преобразованиях, сохраняющих меру, известного, как *эргодическая теория*. При ее доказательстве Пуанкаре предвосхитил как понятие меры, так и понятие категории.

Рассмотрим ограниченную открытую область X в n-мерном пространстве с гомеоморфизмом T для X на себя, сохраняющим объем, т. е. для любого открытого множества $G \subset X$ вводится предположение равенства объемов G и $T(G)$. При многократном применении T любая точка x порождает последовательность x, Tx, T^2x, $\ldots$, $T^i(x)$, $\ldots$, называемую положительной *полуорбитой* x. Когда x принадлежит G для бесконечного множества целых положительных значений i, то говорят о возвращающейся точке x открытого множества G.

Тогда *теорема* Пуанкаре гласит, что для любого открытого множества $G \subset X$ точками, возвращающимися относительно G, являются все точки G, кроме некоторого множества первой категории меры нуль. Утверждение о мере было высказано Пуанкаре в терминах «вероятности». В современной терминологии доказательство теоремы Пуанкаре было сделано Каратеодори.

Теорема Пуанкаре играет важную роль в *теории динамических систем*. При изменении во времени состояния динамической системы начальная точка x в фазовом пространстве переместится в другую точку Tx. Поэтому, уравнения движения системы будут определять преобразование T фазового пространства в себя. При условии гладкости входящих в дифференциальные уравнения движения членов преобразование T является гомеоморфизмом.

Пуанкаре, используя, в отличие от Пуассона, новые методы, строго обосновал свои выводы. По своей сути, это был один из первых триумфов современной *качественной теории дифференциальных уравнений*, начало которой положил Пуанкаре.

Дальнейшее развитие теории сохраняющих меру преобразований привело к существенному улучшению теоремы Пуанкаре. Например, *эргодическая теорема* Дж.Д. Биркгофа (1931 г.) утверждает, что при сохраняющих меру отображениях множества конечной меры на себя почти все точки любого измеримого множества не только возвращаются в данное множество бесконечно много раз, но это происходит с частотой, стремящейся к определенному положительному пределу.

1.2. Конструкция Каратеодори, мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа–Безиковича

В различных областях математики возникают множества, в том или ином смысле пренебрежимо малые и неразличимые в смысле меры Лебега. Для различения таких множеств с патологически сложной топологической структурой необходимо привлекать нетрадиционные характеристики малости, например, емкость, потенциал, меры и размерность Хаусдорфа и т. п. Наиболее плодотворным оказалось применение *дробной размерности* Хаусдорфа, тесно связанной с понятиями энтропии, фракталами и странными аттракторами в теории динамических систем.

Эта дробная размерность определяется p-мерной мерой с произвольным вещественным положительным числом p, которую ввел Хаусдорф (*Hausdorff E.* Dimension und Ausseres Mass // Math. Ann. 1919. V. 79. P. 157–179). В общем случае понятие меры не связано ни с метрикой, ни с топологией. Однако, *мера Хаусдорфа может быть построена в произвольном* *метрическом пространстве на основе его метрики, а сама размерность Хаусдорфа связана с топологической размерностью.*

1. Конструкция Каратеодори. Понятия, введенные Хаусдорфом, основываются *на конструкции Каратеодори* (*Caratheodory C.* Uber das Lineare Mass von Punktmengen-eine Verallgemeinerung des Langenbegriffs // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen., Mathematisch-Physikalische Klasse, 1914. P. 404–426), которую и рассмотрим далее. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, F — семейство подмножеств пространства M и f — такая функция на F, что $0 \leqslant f(G) \leqslant \infty$ при $G \in F$ и $f(\varnothing) = 0$. Построим вспомогательные меры m_f^ε, а затем основную меру Λ_f следующим образом. При $E \subset M$ и $\varepsilon > 0$ значение m_f^ε определяется как точная нижняя грань множества чисел

$$m_f^\varepsilon = \inf \sum_i f(G_i) \tag{1.33}$$

по всевозможным счетным ε-покрытиям $\{G_i\}$, $G_i \in F$.

Из неравенства $m_f^{\varepsilon_1}(E) \geqslant m_f^{\varepsilon_2}(E)$ для $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ следует существование предела

$$\Lambda(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} m_f^\varepsilon(E) = \sup m_f^\varepsilon(E). \tag{1.34}$$

Ясно, что m_f^ε и Λ — *внешние меры* на M. Пусть $\rho(A, B) > \varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольное ε-покрытие $\{G_i\}$ множества $A \bigcup B$, состоящее из некоторого числа множеств. Тогда семейства $\{A \bigcap G_i\}$ и $\{B \bigcap G_i\}$ не пересекаются и покрывают множества A и B соответственно, поэтому

$$m_f^\varepsilon \left(A \bigcup B \right) \geqslant m_f^\varepsilon(A) + m_f^\varepsilon(B) \tag{1.35}$$

или

$$\Lambda_f \left(A \bigcup B \right) = \Lambda_f(A) + \Lambda_f(B). \tag{1.36}$$

Класс Λ_f — измеримых множеств пространства M образует σ-кольцо, на котором внешняя мера Λ_f регулярна. Меру Λ_f также называют результатом применения конструкции Каратеодори к функции f, а внешнюю меру m_f^ε — *приближающей мерой* порядка ε. Каждое борелевское множество в M также Λ_f-измеримо.

Мера Λ_f довольно тонко отражает свойства функции f и семейства F, хотя обычно и не является продолжением f. В результате применения конструкции Каратеодори можно получить m-мерную *сферическую меру* $\mathbf{S}^m$; m-мерную *меру Гросса* $\mathbf{G}^m$; m-мерную *меру Каратеодори* $\mathbf{E}^m$; m-мерную *интегрально-геометрическую меру* индекса t, обозначаемую через $\mathbf{T}_t^m$, m-мерную *меру Джиллеспи* $\mathbf{Q}^m$, m-мерную *хаусдорфову меру* $\mathbf{H}^m$, которая подробно определена ниже, и т. д.

Приведем ряд неравенств, связывающих различные m-мерные меры:

$$\mathbf{S}^m \geqslant \mathbf{H}^m \geqslant \mathbf{E}^m, \quad \mathbf{S}^m \leqslant \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{m/2} \mathbf{H}^m, \quad \mathbf{E}^m \leqslant \mathbf{Q}^m. \tag{1.37}$$

В случае $m = n$ все рассмотренные меры совпадают с m-мерной мерой Лебега.

Пусть $B(a,r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $a \in M$. Тогда при $0 < \varepsilon < \infty$, $A \subset M$ и $a \in M$ имеем

$$m_f^\varepsilon(A) = \lim_{r\to\infty} m_f^\varepsilon \left[A \bigcap B(a,r)\right]. \tag{1.38}$$

Укажем два простых утверждения, которые описывают поведение приближающих мер на убывающей последовательности $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ компактных подмножеств пространства M. Если элементы семейства F являются открытыми подмножествами M, то

$$\lim_{i\to\infty} m_f^\varepsilon(C_i) = m_f^\varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right). \tag{1.39}$$

Если $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ и $f(s) = \inf\{f(T)\}:\ T \in F,\ S \subset \operatorname{Int} T,\ d(T) \leqslant \varepsilon$ для всех таких $S \in F$, что $d(S) \leqslant \varepsilon_0$

$$\lim_{i\to\infty} m_f^\varepsilon(C_i) \leqslant m_f^{\varepsilon_0}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right), \tag{1.40}$$

где d — диаметр множеств, Int — множество всех внутренних точек множества T.

Приведем еще *теорему* о поведении приближающих мер на возрастающей последовательности подмножеств. Пусть X — ограниченное компактное метрическое пространство, F — семейство всех непустых компактных множеств из X, функция $f:\ F \to [0,+\infty]$ непрерывных относительно метрики Хаусдорфа и $f(C) > 0$ для всех таких $C \in F$, что $d(C) > 0$. Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ образуют возрастающую последовательность подмножеств пространства X, то

$$\lim_{k\to\infty} m_f^\varepsilon(A_k) = m_f^\varepsilon\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{1.41}$$

Следствием данной теоремы является следующее утверждение. Когда S — *суслинское* множество пространства X, то для Λ_f-меры Каратеодори на X выполняется равенство

$$\Lambda_f(S) = \sup\{\Lambda_f(C),\ C \in F,\ C \subset S\}. \tag{1.42}$$

2. Мера Хаусдорфа. Определим h-меру Хаусдорфа. Пусть $h(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция от r ($r \geqslant 0$), для которой $h(0) = 0$. Класс таких функций обозначим через H_0. Применив конструкцию Каратеодори к функции $f(E) = h[d(E)]$ при $E \neq \varnothing$ и $f(\varnothing) = 0$ (здесь $d(e)$ — диаметр множества E), получим Λ_h-*меру Каратеодори*, которую называют h-*мерой Хаусдорфа*. Если при этом $h(r) = \gamma(\alpha)r^\alpha$, где α — фиксированное положительное не обязательно целое число, а $\gamma(\alpha)$ — положительная константа, зависящая только от α, то h-меру Хаусдорфа называют α-мерной мерой или α-*мерой* Хаусдорфа H_α, которая является борелевской регулярной мерой.

Конструкцию h-меры Хаусдорфа можно представить себе следующим образом. Покроем α произвольной последовательностью кругов C_ν радиусом $r_\nu \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0; \nu = 1, 2, \ldots$) и обозначим через $m_h^\varepsilon(\alpha, h) \geqslant 0$ нижнюю грань соответствующих сумм $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$. Это число возрастает при убывании ε. По определению

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_h^{\varepsilon}(\alpha, h), \tag{1.43}$$

следовательно

$$0 \leqslant \Lambda_h(E) \leqslant +\infty. \tag{1.44}$$

Предел (1.43) является *внешней* h-мерой Хаусдорфа, которая на σ-кольце Λ_h-измеримых множеств пространства M является борелевски регулярной мерой. Выбирая в качестве $h(r)$ различные функции, мы получаем: линейную меру ($h(r) = 2\pi r$), плоскую меру ($h(r) = \pi r^2$), логарифмическую меру ($h(r) = 1/\ln r$).

Значение H_m-меры Хаусдорфа с функцией

$$h(r) = \frac{\Gamma^{\alpha}(1/2)}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha/2)}\, r^{\alpha} \tag{1.45}$$

для множества евклидова пространства совпадает с внешней m-мерой Лебега. Поэтому, H_α-мера Хаусдорфа обобщает внешнюю меру Лебега с целочисленных значений на произвольные положительные.

Имеет место следующая

Теорема 1.1. *Для того, чтобы компакт C имел h-меру Хаусдорфа, равную нулю, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало конечное разложение компакта $C = A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_k$, такое, что*

$$h[d(A_1)] + \ldots h[d(A_k)] < \varepsilon. \tag{1.46}$$

Из условия $E_1 \subset E_2$ следует $\Lambda_h(E_1) \leqslant \Lambda_h(E_2)$, т. е. h-мера Хаусдорфа — монотонно возрастающая функция множества. С использованием h-меры размерность множества определяется следующим образом. Если $0 < \Lambda_h(A) < \infty$, то $\langle h \rangle$ называется *метрической размерностью* (*размерностью Хаусдорфа*) множества A. Если $h(r) = cr^{\alpha}$ и $0 = \Lambda_h(A) < \infty$, то размерность множества A обозначается через $\langle \alpha \rangle$, здесь c — константа. Множество определенной размерности имеет для каждой высшей размерности h-меру, равную 0, для каждой низшей — h-меру, равную ∞.

3. Размерности Хаусдорфа–Безиковича и Колмогорова. Дальнейшим обобщением понятия размерности является *размерность Хаусдорфа–Безиковича*, которая вводится через неотрицательные числа $\alpha_0 = \alpha_0(E)$ в виде равенства

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha :\ H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha :\ H_\alpha(E) = 0\} \tag{1.47}$$

для множества E. Размерность Хаусдорфа–Безиковича множества определяется поведением $H_\alpha(E)$ не как функции от E, а как функции от α.

Корректность определения (1.47) подтверждает следующее свойство $H_\alpha(E)$-меры. Если $H_\alpha(E) < \infty$, то $H_\alpha(E) = 0$ для любого $\alpha_2 > \alpha_1$. Если мера $H_{\alpha_2}(E)$ отлична от нуля, то $H_{\alpha_1}(E) = \infty$ для любого положительного $\alpha_1 < \alpha_2$. Отсюда следует, что для множества $E \subset M$ или $H_\alpha(E) = 0$ для любого $\alpha > 0$, тогда $\alpha_0(E) = 0$ по определению или существует точка «перескока» α_0, такая, что $H_\alpha(E) = \infty$ для $\alpha < \alpha_0$ и $H_\alpha(E) = 0$ для $\alpha > \alpha_0$. Данное число α_0 и есть размерность Хаусдорфа–Безиковича.

Размерность Хаусдорфа компактного множества является очень хорошей характеристикой *степени разреженности* данного множества. В случае ее определения как емкостной размерности она дает информацию об усредненном асимптотическом поведении преобразования Фурье мер, сосредоточенных на множестве.

Из вышесказанного следуют *свойства* размерности Хаусдорфа–Безиковича:

$$\begin{gathered} H_\alpha(E) > 0 \Rightarrow \alpha_0(E) \geqslant \alpha; \\ H_\alpha(E) < \infty \Rightarrow \alpha_0(E) \leqslant \alpha; \\ \alpha_0(E) > \alpha \Rightarrow H_\alpha(E) = \infty; \\ \alpha_0(E) < \alpha \Rightarrow H_\alpha(E) = 0; \\ H_\alpha(E) = 0 \Rightarrow \alpha_0(E) \leqslant \alpha; \\ H_\alpha(E) = \infty \Rightarrow \alpha_0(E) \geqslant \alpha; \\ \alpha_0(E_1) \leqslant \alpha_0(E_2), \text{ если } E_1 \subset E_2; \\ \alpha_0\left(\bigcup_n E_n\right) = \sup \alpha_0(E_n); \\ \alpha_0(E) = 0 \end{gathered} \tag{1.48}$$

для любого не более чем счетного множества E; когда множества E_1 и E_2 метрического пространства M геометрически подобны, то

$$\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2). \tag{1.49}$$

Если при определении H_α-меры Хаусдорфа покрытия осуществляют шарами одинакового диаметра, то такую меру называют *энтропийной*. Тогда размерность (1.47) называют *энтропийной* или *размерностью Колмогорова*. Для множеств положительной k-мерной меры Лебега обе размерности совпадают и равны K.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича характеризует *внешнее свойство множества*. Поэтому целесообразно ввести понятие размерности Хаусдорфа–Безиковича множества в точке, которая характеризовала бы его *внутреннюю структуру*. В этом случае число

$$\alpha_E(x_0) = \lim_{n\to\infty} \alpha_0\left(E \bigcap O_n(x_0)\right) \tag{1.50}$$

называют *локальной размерностью Хаусдорфа–Безиковича* множества E в точке x_0. Здесь $\{O_n(x_0)\}$ — произвольная последовательность стягивающих окрестностей точки $x_0 \in M$. Предел в (1.50) существует всегда в силу монотонности размерности Хаусдорфа–Безиковича

$$\alpha_0\left(E \bigcap O_{n+1}(x_0)\right) \leqslant \alpha_0\left(E \bigcap O_n(x_0)\right) \text{ для всех } n \in N. \tag{1.51}$$

Каждое ограниченное замкнутое множество E m-мерного евклидова пространства содержит точку $x_0 \in E$, такую, что

$$\alpha_E(x_0) = \alpha_0(E). \tag{1.52}$$

Функцию $\alpha_E(x)$ называют *функцией локальной размерности* Хаусдорфа–Безиковича, если

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \alpha_E(x) \leqslant \alpha_0(E) \text{ для любого } x \in M, \\ \alpha_E(x) = 0 \text{ если множество } E \text{ — замкнутое и } x \notin E, \\ \alpha_E(x) = 0 \text{ для всех изолированных точек множества } E. \end{gathered} \tag{1.53}$$

Размерность Хаусдорфа–Безиковича является метрическим понятием, но существует ее *фундаментальная связь* с топологической размерностью $\dim E$, которую установили Л.С. Понтрягин и Л.Г. Шнирельман, введя понятие *метрического порядка* (*Понтрягин Л.С.*, *Шнирельман Л.Г.* Sur une Propriete Metrique de la Dimension // Ann. Math. 1932. V. 33, № 1. P. 156–162; см. также прибавление к русскому переводу книги [31]: *Понтрягин Л.С.*, *Шнирельман Л.Г.* Об одном метрическом свойстве размерности, с. 210–218), а именно: *нижняя грань размерности Хаусдорфа–Безиковича для всех метрик компакта E равна его топологической размерности*: $\dim E \leqslant \alpha(E)$.

Один из широко используемых методов для оценки хаусдорфовой размерности множеств, известный как принцип распределения масс, предложил Фростман (*Frostman O.* Potential d'Equilibre et Capacite des Ensembles avec Quelques Applications a la Theorie des Fonctions // Meddel. Lunds Univ. Math. Sem. 1935. V. 3. P. 1–118).

4. Первое упоминание о фракталах. Множества, размерность Хаусдорфа–Безиковича которых является дробным числом, называют *фрактальными множествами* или *фракталами*. Более строго, множество E называется фрактальным (фракталом) *в широком смысле* (в смысле Б. Мандельброта), если его топологическая размерность не совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича, а именно, $\alpha_0(E) > \dim E$. Например, множество E всех иррациональных точек [0;1] является фрактальным в широком смысле, так как $\alpha_0(E) = 1$, $\dim E = 0$.

Множество E называется фрактальным (фракталом) *в узком смысле*, если $\alpha_0(E)$ не является целым. Фрактальное множество в узком смысле является таким и в широком смысле. Примеры классических фрактальных множеств и фрактальных кривых будут приведены в монографии далее.

Как впервые было показано А.С. Безиковичем (*Besicovitch A.S.* On Linear Sets of Fractional Dimensions // Ann. Math. 1929. V. 101, № 1. P. 161–193), *существуют глубокие различия между лебеговскими множествами и фракталами*. В первую очередь, эти особенности касаются плотностей. Геометрические свойства фрактального множества E определяются поведением функции

$$D(x,\varepsilon) = \frac{H_\alpha\left(E \bigcap O(x,\varepsilon)\right)}{\varepsilon^\alpha} \tag{1.54}$$

для малых ε, где x — произвольная точка множества E. *Верхней* α-плотностью множества E в точке x называется

$$\overline{D}_\alpha(E,x) = \varlimsup_{\varepsilon\leqslant 0} D(x,\varepsilon), \tag{1.55}$$

соответственно *нижняя* α-плотность множества E в точке x записывается в виде

$$\underline{D}_\alpha(E, x) = \varliminf_{\varepsilon \leqslant 0} D(x, \varepsilon). \tag{1.56}$$

Когда $\overline{D}_\alpha(E, x) = \underline{D}_\alpha(E, x)$, то их общее значение называют *α-плотностью* множества E в точке x и обозначают $D_\alpha(E, x)$. Если $\varepsilon \to 0_+$, то $\overline{D}_\alpha(E, x)$ и $\underline{D}_\alpha(E, x)$ называют правосторонней, при $\varepsilon \to 0_-$ — левосторонней, при $\varepsilon \to 0$ — двусторонней верхней и нижней α-плотностью соответственно.

Можно отметить, что для почти всех (в смысле H_α-Хаусдорфа) точек α-множества на прямой односторонняя верхняя (правая и левая) α-плотность равна 1, односторонняя нижняя α-плотность равна 0 $(0 < \alpha < 1)$. Для двусторонних плотностей почти во всех точках α-множества на прямой двусторонняя α-плотность не существует, т. е. верхняя α-плотность отличается от нижней.

В качестве примера рассмотрим множество E чисел Лиувилля z, которые трансценденты и определяются через целые p и q $(q > 1)$ для каждого положительного целого n в виде

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}. \tag{1.57}$$

Множество E мало в смысле меры, но велико в смысле категории. Более сильно следующее утверждение: множество E чисел Лиувилля имеет нулевую α-мерную меру Хаусдорфа при любом $\alpha > 0$.

1.3. Основные понятия и свойства топологических пространств

1. Общая топология. Здесь мы рассмотрим основные понятия и свойства топологических пространств. Основателями *теории топологических пространств* или *общей топологии* являются М. Фреше (1906 г.) и Ф. Хаусдорф (1914 г.). Если Фреше исходил из нужд математического анализа в широком смысле слова, то Хаусдорф стоял целиком на почве собственно теории множеств. Дальнейшее развитие общей топологии исходит именно из *хаусдорфовых* пространств. Понятия *открытого* или *замкнутого* множества могут быть приняты за основу для определения более общих, чем метрические, а именно, *топологических пространств*.

В одном и том же множестве можно вводить различные топологии, получая тем самым различные топологические пространства. Язык теории топологических пространств в настоящее время стал общепринятым во всех разделах математики.

Чтобы задать топологию в пространстве, нет необходимости определять сразу все открытые множества. Проще определить совокупность множеств элементов или базу данной топологии, достаточную для того, чтобы все остальные элементы топологии получить операциями объединения (открытая топология) или пересечения (замкнутая топология) множеств, которые составляют базу.

Когда говорят о базе топологического пространства, то всегда имеют в виду его открытую базу. *Базой* топологического пространства (X, F) называется семейство B открытых подмножеств X такое, что любое открытое множество $G \in F$ является объединением некоторых множеств $B_\alpha \in B$, $G = \bigcup_\alpha B_\alpha$. Топология определяется базой однозначно. Напротив, у одной и той же топологии может быть много разных баз. Это придает гибкость понятию базы.

Аддитивная база открытой топологии называется *сетью* топологического пространства. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы рассматриваемого топологического пространства, определяет его *вес*. Не каждое семейство множеств $\mathfrak{S}$ может служить базой топологии. Одновременно возникает вопрос: можно ли по произвольному семейству $\mathfrak{S}$ множеств однозначно определить некоторую топологию? На эти вопросы отвечают две нижеприведенные теоремы соответственно.

Теорема 1.2. *Семейство S множеств является базой некоторой топологии на множестве $X = \bigcup\{B : B \in S\}$ в том и только в том случае, когда для любых двух элементов U и V этого семейства и каждой точки x из $U \bigcap V$ существует такой элемент W в S, что $x \in W$ и $W \subset U \bigcap V$.*

Теорема 1.3. *Пусть S — произвольное непустое семейство множеств. Тогда семейство всевозможных конечных пересечений элементов из S образует базу некоторой топологии на множестве $X = \bigcup\{B : B \in S\}$.*

Семейство $\mathfrak{S}$ множеств будет называться *предбазой* топологии $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathfrak{S}$ образует базу топологии $\mathfrak{J}$. Важный класс топологических пространств образуют *пространства со счетной базой*, т. е. такие пространства, в которых существует хотя бы одна база, состоящая не более чем из счетного числа множеств. В топологическом пространстве X со счетной базой обязательно имеется счетное всюду плотное множество, а именно, такое счетное множество, замыкание которого есть всё X.

Топологические пространства со счетной базой называют также пространствами со второй аксиомой счетности. В свою очередь, топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, *сепарабельно*. Наоборот, сепарабельное топологическое пространство может не иметь счетной базы.

2. Хаусдорфовы топологические пространства. Определим *хаусдорфовы топологические пространства* с помощью системы окрестностей. Множество R точек называется *хаусдорфовым топологическим пространством,* если в нем выделены подмножества, называемые окрестностями, удовлетворяющие следующей *системе аксиом*:

1. Каждая точка x обладает хотя бы одной окрестностью U_x и содержится в каждой из своих окрестностей.

2. Пересечение двух окрестностей $U_x^{(1)}$ и $U_x^{(2)}$ точки x содержит третью окрестность $U_x^{(3)}$ точки x.

3. Если $y \in U_x$, то существует окрестность U_y, содержащаяся в U_x.

4. Хаусдорфова аксиома отделимости: для двух точек $x \neq y$ всегда найдутся две непересекающиеся окрестности $U_x \bigcap U_y = \varnothing$.

Любое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью* этой точки. Точка x называется *внутренней точкой* множества R, если существует некоторая окрестность U_x точки x, целиком содержащаяся в R, $U_x \subset R$. Точка x называется *точкой прикосновения* множества R, если в любой окрестности точки x содержится хотя бы одна точка множества R. Точка $x \in R$ называется *предельной*, если любая ее окрестность U_x содержит по крайней мере одну точку из R, с ней не совпадающую. Совокупность всех точек прикосновения множества R называется *замыканием множества* R.

Семейство окрестностей точки x называется *базой системы окрестностей* точки x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность из этого семейства. Топологическое пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, если система окрестностей всякой его точки обладает счетной базой. Каждое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Поэтому вторая аксиома счетности является более сильным ограничением, чем первая.

3. Аксиомы топологического пространства. Дальнейшим развитием определения Хаусдорфа является определение топологического пространства, которое предложил К. Куратовский в 1922 г. *Топологическим пространством*, согласно Куратовскому, называется множество элементов или точек, для подмножеств A которого определена операция замыкания, удовлетворяющая следующим аксиомам замыкания:

1. Для объединения $\overline{A \bigcup B}$ множеств A и B $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

2. Множество A входит в свое замыкание, $A \subset \overline{A}$.

3. Замыкание пустого множества $\varnothing$ совпадает с ним, $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

4. Замыкание замыкания совпадает с ним самим, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Тогда замкнутые множества определятся как множества, совпадающие со своими замыканиями, а открытые — как множества, дополнительные к замкнутым.

В 1925 г. П.С. Александров ввел понятие *открытых топологических структур*, на основе которых построены следующие определения.

Топологическое пространство — множество X элементов или точек, в которых выделены подмножества, называемые *открытыми множествами*, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. Пустое множество $\varnothing$ и все множество X открыты.

2. Объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств открыты.

Топологическое пространство — множество X элементов или точек, в которых выделены подмножества, называемые *замкнутыми множествами*, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. Пустое множество $\varnothing$ и все множество X замкнуты.

2. Пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

Поэтому топологию $\mathfrak{T}$ всякого топологического пространства можно ввести и посредством открытых, и посредством замкнутых множеств. Стало общепринятым пользоваться открытыми множествами. Таким образом, можно вводить в данное множество одну и ту же топологию четырьмя способами: посредством окрестностей, посредством операции замыкания, посредством открытых множеств и посредством замкнутых множеств.

4. Аксиомы отделимости. Та общность, с которой вводятся понятия топологического пространства, и возможность в столь общих предположениях определять основные понятия теории точечных множеств имеют во многих случаях принципиальное значение. Однако свое полное геометрическое содержание теория множеств получает лишь при *постепенном сужении* класса рассматриваемых топологических пространств с помощью дополнительных условий или аксиом.

Эти дополнительные аксиомы бывают разной природы. Прежде всего это *аксиомы отделимости*. Перечислим их в порядке постепенного усиления.

Аксиома T_0 (аксиома Колмогорова). *Из любых двух точек пространства X по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Аксиома T_1. *Каждая из двух произвольных точек пространства X имеет окрестность, не содержащую вторую точку.*

Аксиома T_2 (аксиома Хаусдорфа). *Любые две различные точки пространства X имеют непересекающиеся окрестности.*

Аксиома T_3. *Для всякой точки x пространства X и всякого замкнутого множества F, не содержащего x, существует окрестность $U(x)$ точки x и открытая окрестность $U(F)$ множества F такие, что $U(x) \bigcap U(F) = \varnothing$.*

Аксиома T_4. *Любые два замкнутых непересекающихся множества F_1 и F_2 пространства имеют открытые окрестности $U_1(F)$ и $U_2(F)$ такие, что $U(F_1) \bigcap U(F_2) = \varnothing$.*

Топологическое пространство X называют *T_i-пространством* ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), если оно удовлетворяет аксиоме T_i. T_0-пространства называют также *колмогоровскими*, а T_2-пространства — *хаусдорфовыми*. При одновременном выполнении аксиом T_1 и T_3 топологическое пространство X называют *регулярным* пространством. Если выполнены одновременно аксиомы T_1 и T_4, то топологическое пространство X называют *нормальным* пространством. Из нормальности следует регулярность, из регулярности — хаусдорфовость.

Пусть задано топологическое пространство (X, F). Уместен вопрос: существует ли на множестве X метрика, которая индуцирует на X топологию F? При существовании такой метрики, говорят, что она *метризует* данное топологическое пространство, которое называется *метризуемым*. Данную задачу метризации полностью решает теорема Урысона, по которой, чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемо, необходима и достаточна его нормальность. Доказательство теоремы опирается на «большую» и «малую» леммы П.С. Урысона.

В 1924 г. Урысон ввел понятие функциональной отделимости. Два множества A и B в топологическом пространстве X называются *функционально отделимыми*, если существует определенная на всем X действительная непрерывная и ограниченная на всем X функция f, принимающая во всех точках множества A значение «0» и во всех точках множества B значение «1». Очень важен класс T_1-пространств, в которых каждая точка функционально отделима от любого не содержащего данную точку замкнутого множества. Полученные пространства, введенные А.Н. Тихоновым, называются *вполне регулярными*. Вполне регулярные пространства суть множества, лежащие в нормальных пространствах.

5. Прямое или декартово произведение топологических пространств. Операция *декартова* или *прямого произведения* топологических пространств позволяет конструировать новые топологические пространства. *Декартовым произведением* двух непустых множеств X и Y называется множество $X \times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \big| x \in X, y \in Y\}. \tag{1.58}$$

Множество $X \times Y$ можно отождествить с множеством функций, определенных на двухэлементном множестве $\{1,\ 2\}$ и принимающих значения в множестве X при значении аргумента, равном 1, и в множестве Y при значении аргумента, равном 2. Это позволяет распространить прямое произведение на случай любого числа сомножителей. Пусть каждому индексу i из некоторого множества I отнесено определенное множество X_i. *Прямым произведением* $\prod_{i \in I} X_i$ семейства множеств X_i называется множество таких функций $f : I \to X$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, что $f(i) \in X_i$ для каждого $i \in I$.

6. Тихоновская топология. Рассмотрим прямое произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Предположим, что множества X_α суть топологические пространства. По А.Н. Тихонову топология в произведение X вводится следующим образом. Для каждого α_i при $i = 1, \ldots, s$ (из конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$) в X_{α_i} берем открытое множество u_{α_i}, и назовем элементарным открытым множеством $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$ или открытым множеством, определенным данными $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s}$, множество всех $x = \{x_\alpha\} \in X$, для которых $x_{\alpha_1} \in u_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_s} \in u_{\alpha_s}$. Элементарные множества образуют базу некоторой топологии на X.

Полученная топология на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ называется *тихоновской топологией* или *топологией произведения* (предложена А.Н. Тихоновым в 1929 г.). Видно, что открытые множества топологического произведения суть всевозможные суммы элементарных открытых множеств. Топологическое произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым пространством. Произведение регулярных пространств регулярно.

7. Некоторые примеры топологических произведений. Рассмотрим примеры топологических произведений. Произведение двух прямых есть плоскость. Произведение n прямых есть n-мерное евклидово пространство. Произведение двух окружностей есть тор. Произведение счетного числа простого двоеточия {0,1} гомеоморфно канторову совершенному множеству. *Основной параллелепипед* гильбертова пространства или *гильбертов кирпич* Q определяется как множество, состоящее из точек $0 \leqslant x_n \leqslant 2^{-n}$ при $n = 1, 2, \ldots$, и есть топологическое произведение счетного числа прямолинейных сегментов. *Тихоновский куб* I^τ веса τ — произведение τ экземпляров единичного отрезка. Гильбертов кирпич гомеоморфен тихоновскому кубу I^ω счетного веса.

8. Покрытия. Семейство множеств $\mathfrak{U}$ называется *покрытием* множества B, если каждая точка множества B принадлежит некоторому элементу семейства $\mathfrak{U}$. Семейство $\mathfrak{U}$ называют *открытым покрытием* множества B, если каждый элемент из $\mathfrak{U}$ является открытым множеством. *Подпокрытие* покрытия $\mathfrak{U}$ — такое его подсемейство, которое само является покрытием. По теореме Линделефа в произвольном открытом покрытии пространства со счетной базой есть *счетное подпокрытие*.

1.4. Некоторые факты из теории размерности

1. Исторический аспект. Теория размерности, как раздел общей топологии, имеет дело с одним из численных топологических инвариантов топологического пространства, а именно, его *размерностью*. До появления теории множеств понятие размерности существовало только в неопределенном смысле. Конфигурация считалась n-мерной, если минимальное число параметров, необходимых для ее описания, было равно n. Опасность и противоречивость такого подхода стала очевидной после двух знаменитых открытий XIX в.

Первое — построение Г. Кантором взаимно однозначного соответствия между точками линии и квадрата. ***Второе*** — построение Д. Пеано (*Peano G.* Sur une Courble, qui Remplit tout une Aire Plane // Math. Ann. 1890. B. 36. S. 156–160) и построение Д. Гильберта (*Hilbert D.* Uber die Stetige Abbildung einer Linie auf ein Flachenstuck // Math. Ann. 1891. B. 38. S. 459–460) непрерывного отображения отрезка на квадрат. Первое разрушило чувство, что плоскость богаче точками, чем линия; второе противоречило убеждению, что размерность пространства может быть определена, как минимальное число параметров, требуемых для описания пространства. Эти примеры показали также, что размерность: **а)** может изменяться при взаимно однозначных отображениях, **б)** может возрастать при однозначных непрерывных отображениях.

Возникла проблема *топологической инвариантности* числа измерений евклидова пространства. Данная проблема была решена Брауэром, в статье которого (*Brouwer L.E.J.* Beweis der Invarianz der Dimensionzahl // Math. Ann. 1911. B. 70. S. 161–165) было доказано, что n-мерное и m-мерное евклидовы пространства при $n \neq m$ не гомеоморфны, т. е. два гомеоморфных между собой полиэдра имеют одно и то же число измерений. В том же номере журнала, что и упомянутая статья Брауэра, была сформулирована «теорема о мостовых» А. Лебега (*Lebesgue H.* Sur la Non-Applicabilite de Deux Domaines Appartenant Respectivement a des Espaces a n et $n+p$ Dimensions // Math. Ann. 1911. B. 70. S. 166–168), гласящая, что n-мерный куб I^n при любом $\varepsilon > 0$ может быть покрыт конечным числом своих замкнутых множеств диаметром $< \varepsilon$ так, что кратность этого покрытия будет $n+1$, тогда как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ не существует покрытия куба I^m, которое имеет кратность $< n+1$ и состоит из замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$. *Кратностью* системы множеств называется наибольшее целое m такое, что в данной системе имеется m множеств с непустым пересечением.

Таким образом, Лебег первым из математиков понял *связь между размерностью и кратностью покрытий*. Например, квадрат имеет размерность 2, так как его можно «замостить» или покрыть сколь угодно малыми «кирпичами» таким образом, что никакая точка квадрата не содержится более, чем в трех из этих «кирпичей»; когда эти «кирпичи» достаточно малы, то по крайней мере три из них имеют общую точку. Первое безупречное доказательство теоремы Лебега было дано Брауэром (*Brouwer L.E.J.* Uber den Naturlichen Dimensiosbegriff // J. Reine Angew. Math. 1913. B. 142. S. 146–152), а затем сам Лебег доказал свою теорему (*Lebesgue H.* Sur les Correspondences Entre les Points de Deux Espaces // Fundam. Math. 1921. V. 2. P. 256–285).

В 1912 г. появилась статья А. Пуанкаре (*Poincare H.* Pourquoi l'espace a Trois Dimensions? // Rev. Metaphys. Morale. 1912. V. 20. P. 483–504) с глубокими идеями о возможности индуктивного определения числа измерений, основанного на разбиении пространства множествами более низкой размерности. В 1913 г. эта идея Пуанкаре была точно сформулирована в уже упомянутой выше работе Брауэра. Таким образом, три знаменитые статьи, принадлежащие Пуанкаре (1912 г.), Лебегу (1911 г.) и Брауэру (1913 г.), составили первый период развития *теории размерности*.

Непосредственно топологическая теория размерности, основанная на определении, очень близком к определению Пуанкаре–Брауэра, была создана и независимо развита П.С. Урысоном и К. Менгером в многочисленных работах, начиная с 20-х гг. XX в.

2. Топологические инварианты. Размерностный инвариант, определенный Брауэром, совпадает для метрических пространств X с большой индуктивной размерностью $\operatorname{Ind} X$. Малая индуктивная размерность $\operatorname{ind} X$ была определена независимо Л.С. Урысоном и К. Менгером. Топологические инварианты $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ определяются по индукции с помощью понятия перегородки между двумя множествами.

Для пустого пространства $X = \varnothing$ полагаем по определению, $\operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X = -1$. Предположим, что класс пространств X, для которых $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$, где n — целое неотрицательное число, уже определен. Для данного непустого пространства X полагаем $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, если между любыми двумя непересекающимися множествами A и B пространства X имеется перегородка C, для которой $\operatorname{Ind} C \leqslant n-1$. Если условие $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ выполнено, а условие $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$ не выполнено, то $\operatorname{Ind} X = n$.

Если условие $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ не выполняется ни при каком натуральном числе n, то говорим, что $\operatorname{Ind} X = \infty$, причем считаем, что $n < \infty$ при любом $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Замкнутое множество C называется *перегородкой* между множествами A_1 и A_2, если открытое множество $X \setminus C$ есть сумма двух открытых дизъюнктивных множеств U_1 и U_2, являющихся окрестностями множеств A_1 и A_2 соответственно. Про множества A_1 и A_2 тогда говорят, что они *отделены* в X множеством C. Если A_1 и A_2 отделены пустым множеством, то говорят, что A_1 и A_2 отделены в X.

Приведенное выше определение переходит в определение *малой индуктивной размерности* $\operatorname{ind} X$, если считать, что одно из множеств A_1 или A_2 состоит из одной лишь точки, а другое является произвольным замкнутым множеством, не содержащим этой точки. Для хаусдорфовых пространств

$$\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X. \tag{1.59}$$

Если $X_0 \subset X$, то $\operatorname{ind} X_0 \leqslant \operatorname{ind} X$. Когда X_0 замкнуто в X, то $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Совершенно иной подход, определенный посредством покрытий, берет свое начало от Лебега и определяет размерностный инвариант $\dim X$ в виде *размерности Лебега*. Пространство X имеет $\dim X \leqslant n$, если в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant n+1$. Когда X_0 замкнуто в X, то $\dim X_0 \leqslant \dim X$. Под *покрытием топологического пространства* полагаем любую конечную совокупность его открытых множеств, дающих в сумме все это пространство.

3. Общая теория размерности. Задача *общей теории размерности* состоит в исследовании *размерностных инвариантов*, которые в элементарных случаях совпадают с числом измерений фигуры, а в случае более общих пространств подчиняются довольно неожиданным соотношениям. Хотя совпадение размерностных инвариантов $\dim X$, $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$ было доказано для обширного класса топологических пространств, позднейшие исследования показали самостоятельность этих инвариантов.

Так, например, если тождество Урысона

$$\dim X = \operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X \tag{1.60}$$

справедливо для метризуемых пространств со счетной базой, то для любых метризуемых пространств существует только равенство М. Катетова (1951 г.):

$$\dim X = \operatorname{Ind} X, \tag{1.61}$$

причем (П. Рой, 1968 г.) может быть

$$\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X. \tag{1.62}$$

Для *бикомпактов* достигнуты большие успехи в исследовании взаимоотношений между $\dim X$, $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$. Оказалось, что для бикомпактов (П.С. Александров, 1940 г.) и даже сильно паракомпактных (К. Морита, 1950 г.) всегда

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X, \tag{1.63}$$

но может быть (А.Л. Лунц, 1949 г. и О.В. Локуциевский, 1949 г.)

$$\dim X = 1 < \operatorname{ind} X = 2, \tag{1.64}$$

а также (В.В. Филиппов, 1969 г.)

$$\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X. \tag{1.65}$$

Для любых целых $n \geqslant 1$ и $m > n$ были построены (П. Вопенка, 1958 г.) бикомпакты X_{nm} и Y_{nm}, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} \dim X_{nm} = \dim Y_{nm} = n, \\ \operatorname{ind} X_{nm} = m, \quad \operatorname{Ind} Y_{nm} = m. \end{gathered} \tag{1.66}$$

Был построен (В.В. Федорчук, 1968 г.) бикомпакт с несовпадающими размерностями $\dim\theta \neq \operatorname{ind}\theta$ и удовлетворяющий первой аксиоме счетности. Бикомпакт θ ($\dim\theta = 2$, $3 \leqslant \operatorname{ind}\theta \leqslant 4$) вообще не имеет никакой перегородки Φ размерности $\dim\Phi \leqslant 1$ и содержит счетное всюду плотное множество. Был также построен бикомпакт X (В.В. Федорчук, 1971 г.) размерности

$\dim X = 1 < \operatorname{ind} X = 2$, который топологически однороден в том смысле, что любую его точку x можно топологическим отображением пространства X на себя перевести в любую другую точку $x' \in X$.

Пространство X имеет *размерность* 0, *если любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся одновременно замкнутой и открытой, т.е. граница этой окрестности пуста*. Под окрестностью точки мы понимаем любое открытое множество, содержащее эту точку.

Примером *нульмерных пространств* являются: каждое непустое конечное или счетное пространство; множество действительных рациональных чисел; множество действительных иррациональных чисел; канторов дисконтинуум; любое множество действительных чисел, не содержащее никакого интервала; множество точек плоскости, обе координаты которых иррациональны; множество точек n-мерного евклидова пространства, все координаты которых рациональны; множество точек n-мерного евклидова пространства, все координаты которых иррациональны; множество точек гильбертова кирпича I_ω, все координаты которых рациональны; множество точек гильбертова кирпича I_ω, все координаты которых иррациональны.

Однако множество точек гильбертова пространства, все координаты которых рациональны, не нульмерно. Нульмерные пространства со счетной базой и только они гомеоморфны подмножествам канторова дисконтинуума. Сумма нульмерных множеств не обязана быть нульмерной. Однако имеет место теорема: пространство, являющееся суммой счетного числа нульмерных замкнутых множеств, нульмерно. Следствием данной теоремы является нульмерность нульмерного пространства после прибавления к нему одной точки.

Рассмотрим нульмерность в компактах и сепарабельных метрических пространствах. *Сепарабельное* пространство — это топологическое пространство, обладающее счетной базой. Такие пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности. Топологическое пространство X называется *бикомпактом*, если каждое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие этого пространства.

Термин «*бикомпактное пространство*» принадлежит П.С. Александрову. Соответственно, *бикомпактом* называются *бикомпактные хаусдорфовы пространства*. Понятие бикомпактного топологического пространства имеет фундаментальное положение в топологии и функциональном анализе.

Принципиальные свойства бикомпактных пространств рассматриваются уже в математическом анализе: *всякая непрерывная функция, определенная на бикомпактном пространстве, ограничена и принимает максимальное и минимальное значения*. Топологическое произведение любого бикомпактного пространства бикомпактно. Каждый бикомпакт является нормальным и вполне регулярным пространством. Любое взаимно однозначное непрерывное отображение бикомпактного пространства на хаусдорфово пространство есть *гомеоморфизм*.

Всякий компакт есть непрерывный образ канторова дисконтинуума. Основным понятием теории размерности П.С. Урысон считал введенное им понятие *n-мерного канторова многообразия*, под которым понимается всякий n-мерный бикомпакт X, $\dim X = n$, в котором любая перегородка C между непустым множеством имеет размерность $\dim C \geqslant n-1$. В частности, одномерные канторовы многообразия, по П.С. Урысону, есть «канторовы кривые» или одномерные континуумы (связные одномерные бикомпакты).

Б. Кнастер и К. Куратовский (1921 г.) построили замечательный пример вполне несвязного одномерного множества, но теряющего это свойство и становящегося связным после прибавления к нему одной точки. Построим на оси абсцисс на отрезке [0;1] канторов дисконтинуум. Для точки с координатами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ на плоскости рассмотрим всевозможные прямолинейные отрезки $[c, p]$ где p пробегает все точки множества П. Сумму всех этих отрезков обозначим через C и назовем конусом над множеством П с вершиной c.

Множество C замкнуто на плоскости и, будучи ограниченным, является компактом. Кроме того, множество C как объединение отрезков с общей точкой (вершина c), связно. Поэтому, C — плоский континуум, следовательно, $1 \leqslant \operatorname{ind} C \leqslant 2$.

Назовем отрезок $[c, p]$, $p \in \Pi$, отрезком первого (второго) рода, если его конец p есть точка первого (второго) рода канторова множества П. Если $[c, p]$ — отрезок первого рода, то обозначим через C_p множество всех тех лежащих на нем точек (p, y), ординаты которых рациональны; если же $[c, p]$ — отрезок второго рода, то C_p — множество его точек с иррациональными ординатами. Объединение $X = \bigcup_{p \in \Pi} C_p$ всех множеств C_p называется *веером* Кнастера–Куратовского. Положим $X_0 = X \setminus c$.

Видно, что $X_0 \subset X \subset C$. Можно доказать, что X связно, X_0 вполне несвязно и $\operatorname{ind} X_0 = \operatorname{ind} X = 1$, $\operatorname{ind} C = 1$. Так как X связно, оно не нульмерно, а поэтому и X_0 не нульмерно. Следовательно, тот факт, что пространство имеет положительную размерность, очень мало говорит о его связности.

Для любых множеств в произвольном наследственно нормальном пространстве $X = A \bigcup B$ выполняются формулы Урысона–Менгера

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}\left(A \bigcup B\right) &\leqslant \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B + 1, \\ \dim\left(A \bigcup B\right) &\leqslant \dim A + \dim B + 1 \end{aligned} \tag{1.67}$$

с непосредственным обобщением

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}\left(A_0 \bigcup A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right) &\leqslant \operatorname{ind} A_0 + \operatorname{ind} A_1 + \ldots + \operatorname{ind} A_n + n, \\ \dim\left(A_0 \bigcup A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right) &\leqslant \dim A_0 + \dim A_1 + \ldots + \dim A_n + n. \end{aligned} \tag{1.68}$$

4. Размерность пространства. Размерность пространства определяется индуктивно с исходной точкой индукции принятия пустого множества в качестве (-1)-мерного пространства. Тогда пространство X имеет размерность $\leqslant n$ при $n \geqslant 0$ в точке p, если p обладает сколь угодно малыми окрестностями, границы которых имеют размерность $\leqslant n - 1$.

Пространство X имеет размерность $\leqslant n$ ($\dim X \leqslant n$), если X имеет размерность $\leqslant n$ в каждой своей точке. Пространство X имеет размерность n в точке p, если верно, что X имеет размерность $\leqslant n$ в p, и неверно, что X имеет размерность $\leqslant n - 1$ в p. Пространство X имеет размерность n, если $\dim X \leqslant n$ верно, а $\dim X \leqslant n - 1$ неверно. Пространство X имеет