

Бондарь В.С.

Неупругость. Варианты теории



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®
2004

УДК 539.3
ББК 22.251
Б 81

Бондарь В. С. **Неупругость. Варианты теории.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 144 с. — ISBN 5-9221-0521-3.

Изложены простейшие прикладные варианты теории неупругости, которые могут быть использованы для исследования закономерностей деформирования и разрушения материала при сложном неизотермическом нагружении, а также для расчетов кинетики напряженно-деформированного состояния и прогнозирования ресурса конструкций высоких параметров.

Для специалистов конструкторских и проектных организаций, научно-исследовательских институтов, а также для аспирантов и студентов, занимающихся расчетами и исследованиями высоконагруженных конструкций современной техники.

Рецензенты:

кафедра Теории упругости Механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова;

доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Кадашевич

Научное издание

БОНДАРЬ Валентин Степанович

НЕУПРУГОСТЬ. ВАРИАНТЫ ТЕОРИИ

Редактор *М.Б. Козинцова*

Оригинал-макет: *В.В. Худяков*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 15.07.04. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9. Уч.-изд. л. 10. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru

http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Московская типография № 6»
115088, Москва, Ж-88, ул. Южнопортовая, 24

ISBN 5-9221-0521-3



9 785922 105217

ISBN 5-9221-0521-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2004

© В. С. Бондарь, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
--------------------	---

1. Упругость

Глава 1. Теория напряжений и деформаций	10
§ 1. Тензор напряжений и его инварианты	10
§ 2. Девиатор напряжений и его инварианты	11
§ 3. Тензор деформаций и его инварианты	13
§ 4. Девиатор деформаций и его инварианты	14
Глава 2. Векторное представление напряжений и деформаций . . .	16
§ 1. Вектор напряжений	16
§ 2. Вектор деформаций	17
§ 3. Векторные и скалярные свойства	18
Глава 3. Термоупругость	20
§ 1. Зависимости между напряжениями и деформациями	20
§ 2. Матричное представление зависимостей между напряжениями и деформациями	21
§ 3. Зависимости между скоростями напряжений и деформаций	25
§ 4. Матричное представление зависимостей между скоростями напряжений и деформаций	26

2. Пластичность

Глава 1. Теория пластического деформирования	32
§ 1. Основные положения и уравнения теории	32
§ 2. Материальные функции	35
§ 3. Связь теории пластического деформирования с общими теориями пластичности	37
§ 4. Матричное представление уравнений теории	39

§ 5. Уравнения теории в случае обобщённого плоского состояния	41
§ 6. Уравнения теории в случае одноосного напряжённого состояния . .	44
§ 7. Критерии малоциклового усталости при одноосном напряжённом состоянии	44
§ 8. Расчётно-экспериментальный метод определения материальных функций	47
§ 9. Материальные функции некоторых конструкционных сталей и сплавов	52
Глава 2. Теория пластического деформирования материалов, чувствительных к виду напряжённого состояния	54
§ 1. Основные положения и уравнения теории	54
§ 2. Материальные функции и метод их определения	57
§ 3. Матричное представление уравнений теории	60
§ 4. Уравнения теории в случае обобщённого плоского состояния	61
Глава 3. Теория пластического деформирования материалов, обладающих эффектом дополнительного упрочнения	63
§ 1. Основные положения и уравнения теории	63
§ 2. Расчётно-экспериментальный метод определения материальных функций	67
§ 3. Матричное представление уравнений теории	70
Глава 4. Теории пластического деформирования в условиях неизотермического нагружения и ионизирующего излучения . .	72
§ 1. Уравнения вариантов теорий	72
§ 2. Материальные функции и метод их определения	75
§ 3. Материальные функции некоторых конструкционных сталей и сплавов	77
§ 4. Матричное представление уравнений вариантов теорий	79
§ 5. Уравнения теорий в случае обобщённого плоского состояния	83

3. Неупругость

Глава 1. Теория неупругого деформирования	88
§ 1. Основные положения и уравнения	88
§ 2. Материальные функции	92
§ 3. Связь теории неупругого деформирования с общими теориями . . .	94
§ 4. Матричное представление уравнений теории	97
§ 5. Уравнения теории в случае обобщённого плоского состояния	99
§ 6. Уравнения теории в случае одноосного напряжённого состояния . .	101

§ 7. Критерии длительной прочности при одноосном напряжённом состоянии	102
§ 8. Расчётно-экспериментальный метод определения материальных функций	109
 Глава 2. Теория неупругого деформирования материалов, чувствительных к виду напряжённого состояния	 118
§ 1. Основные положения и уравнения	118
§ 2. Материальные функции и метод их определения	122
 Глава 3. Теории неупругого деформирования в условиях неизо-термического нагружения и ионизирующего излучения	 124
§ 1. Уравнения вариантов теорий	124
§ 2. Материальные функции и метод их определения	127
§ 3. Материальные функции некоторых конструкционных сталей и сплавов	129
§ 4. Матричное представление уравнений вариантов теорий	130
§ 5. Уравнения теории неупругого деформирования в случае обобщённого плоского состояния	133
 Список литературы	 142

*Выдающимся механикам современности
Алексее Антоновичу Ильюшину и
Валентину Валентиновичу Новожилову
посвящается*

Введение

Проблемы надёжного функционирования и снижения материалоемкости конструкций современной техники, работающих в условиях высокого уровня силовых и температурных нагрузок, а также ионизирующего излучения, делают весьма актуальной задачу математического моделирования неупругого поведения и разрушения конструкций. Увеличение рабочих параметров современных машин и аппаратов приводит к возрастанию как общей, так и местной напряжённости конструкций. Реальные процессы нагружения таких конструкций приводят к тому, что в материале конструкций возникают неупругие (вязкопластические) деформации. При этом нагружение является сложным неизотермическим, и характер его изменения может быть самым произвольным в условиях повторности и длительности воздействия температурно-силовых нагрузок и ионизирующего излучения.

Используемые в настоящее время для практических расчётов теории пластичности, ползучести и неупругости, обобщённые на неизотермическое нагружение, могут привести к достоверным результатам только в узко ограниченных условиях — при нагружениях близких к простым и стационарным. Раздельное рассмотрение процессов пластичности, ползучести и накопления повреждений без учёта их взаимного влияния свойственно практически всем применяемым в расчётах теориям. Практически не рассматриваются такие важные аспекты, влияющие на накопление повреждений, как охрупчивание и залечивание. Всё это существенно ограничивает области применимости используемых в расчётах теорий пластичности, ползучести и кинетических уравнений накопления повреждений (критериев разрушения).

В настоящее время разработана теория неупругости [1–3], которая является обобщением и развитием идей, содержащихся в различных вариантах теорий пластичности, ползучести и неупругости, базирующихся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым и его школой [4–6]. Теория неупругости относится к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном упрочнении. Обоснование достоверности разработанной теории неупругости проведено [7–10, 3] на широком спектре конструкционных материалов (сталей и сплавов) и разнообразных программ экспериментальных исследований. Сравнения расчётов по различным теориям пластичности, ползучести и неупругости показали, что результаты, полученные

с помощью разработанной теории неупругости, лучше всего соответствуют экспериментальным данным. На основании этих исследований сделан вывод, что разработанная теория неупругости может применяться для практических расчётов неупругого поведения и накопления повреждений материала конструкций при произвольном процессе сложного неизотермического нагружения и на основании этой теории может проводиться достоверное прогнозирование ресурса материала конструкций высоких параметров при повторном и длительном воздействии температурно-силовых нагрузок и ионизирующего излучения.

Область применимости теории неупругости ограничивается малыми деформациями однородных и начально изотропных металлов при температурах, когда нет фазовых превращений, и при скоростях деформаций, когда динамическими эффектами можно пренебречь.

Следует отметить некоторые особенности разработанной теории неупругости:

- деформация имеет упругую и неупругую составляющие (условного разделения неупругой деформации на деформации пластичности и ползучести нет);

- поверхность нагружения может смещаться, расширяться или сужаться и изменять форму;

- трёхчленная структура уравнений для смещения поверхности нагружения обуславливает снятие ограничений на траектории сложного нагружения;

- кинетические уравнения накопления повреждений построены на энергетическом принципе с учётом процессов охрупчивания и залечивания;

- уравнения неупругого поведения и накопления повреждений взаимосвязаны, т. е. повреждение влияет на поведение, а история нагружения на процесс повреждения;

- неупругое поведение и разрушение может зависеть от вида напряжённого состояния;

- при сложном (непропорциональном) циклическом нагружении возможно дополнительное изотропное упрочнение;

- аналитическое интегрирование уравнений теории неупругости для простейших стационарных режимов нагружения приводит к известным критериям малоциклового и длительной прочности;

- основу расчётно-экспериментального метода определения материальных функций теории неупругости составляет обработка экспериментальных кривых, не связанная с определением пределов текучести и других величин с какими-либо допусками;

- базовыми экспериментами, на которых построен расчётно-экспериментальный метод, являются стандартные испытания материала на малоцикловую и длительную прочность, а также деформирование в условиях пластичности и ползучести.

В настоящей книге излагаются простейшие прикладные варианты теории неупругости, которые могут быть использованы для иссле-

дования закономерностей деформирования и разрушения материала при сложном неизотермическом нагружении, а также для расчётов кинетики напряжённо-деформированного состояния и прогнозирования ресурса конструкций высоких параметров.

Автор выражает благодарность профессорам Р.А. Васину, Ю.И. Кадашевичу и И.А. Кийко за ценные советы и замечания в процессе работы над монографией, инженерам Е.В. Карначевой и И.А. Титареву за помощь в подготовке рукописи к печати, а также В.А. Берстневу, А.П. Титареву и В.И. Яковенко за материальную поддержку при издании монографии.

Автор будет благодарен всем приславшим свои пожелания и замечания по адресу: 107 023 Москва, ул. Б. Семеновская, 38, МГТУ «МАМИ», кафедра теоретической механики.

E-mail: tm@mami.ru

Часть 1

УПРУГОСТЬ

Глава 1

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

§ 1. Тензор напряжений и его инварианты

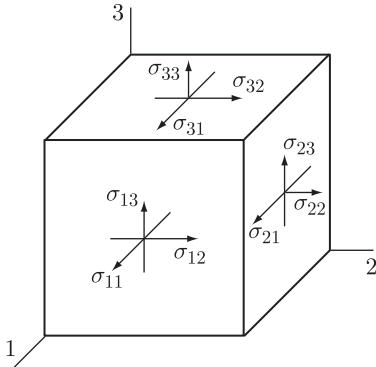
Напряжённое состояние в точке тела определяется [11, 12] тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Согласно закону парности касательных напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (1.2)$$

Для изображения напряжённого состояния в точке тела в окрестности этой точки выделяется элемент тела в виде прямоугольного параллелепипеда, три ребра которого совпадают с осями координат (рис. 1.1).



Таким образом, напряжённое состояние в точке тела определяется симметричным тензором второго ранга.

Тензор напряжений имеет следующие инварианты:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_{ii}, \quad (1.3)$$

$$I_2(T_\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} (\sigma_{kk})^2; \quad (1.4)$$

$$I_3(T_\sigma) = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} (\sigma_{kk}) + \frac{1}{6} (\sigma_{kk})^3. \quad (1.5)$$

Рис. 1.1. Модель напряжённого состояния

Здесь и в дальнейшем наличие в одночлене повторяющихся индексов указывает на суммирование по всем значениям этих индексов.

На основе формул (1.3)–(1.5) можно получить следующие выражения для инвариантов тензора напряжений:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (1.6)$$

$$I_2(T_\sigma) = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2, \quad (1.7)$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}. \quad (1.8)$$

В качестве примера рассматриваются три различных случая нагружения тонкостенного трубчатого образца: осевой силой (P -опыты); крутящим моментом (M -опыты); осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением (P, M, q -опыты). В первых двух случаях реализуются одноосные растяжение (сжатие) и кручение, а в третьем случае — обобщённое плоское состояние. Для всех трёх случаев тензор напряжений и его инварианты имеют следующий вид (ось 1 направлена вдоль оси образца):

1) одноосное растяжение (сжатие)

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.9)$$

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_{11}, \quad I_2(T_\sigma) = 0, \quad I_3(T_\sigma) = 0; \quad (1.10)$$

2) кручение

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$I_1(T_\sigma) = 0, \quad I_2(T_\sigma) = \sigma_{12}^2, \quad I_3(T_\sigma) = 0; \quad (1.12)$$

3) обобщённое плоское состояние

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$I_2(T_\sigma) = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2, \quad (1.14)$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{12}^2.$$

§ 2. Девиатор напряжений и его инварианты

Тензор напряжений разлагается [11, 12] на шаровой тензор и девиатор

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{Bmatrix} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}. \quad (1.15)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$); $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ — среднее напряжение; s_{ij} — девиатор напряжений. Таким образом, компоненты девиатора напряжений определяются по формуле

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}. \quad (1.16)$$

Девиатор напряжений D_σ имеет следующие инварианты:

$$I_1(D_\sigma) = s_{ii} = 0, \quad (1.17)$$

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad (1.18)$$

$$I_3(D_\sigma) = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}. \quad (1.19)$$

Или, раскрывая формулы (1.18) и (1.19), можно получить следующие выражения для второго и третьего инвариантов девиатора напряжений:

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2, \quad (1.20)$$

$$I_3(D_\sigma) = s_{11}s_{22}s_{33} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{31}^2 - s_{33}s_{12}^2 + 2s_{12}s_{23}s_{31}. \quad (1.21)$$

В теории напряжений вводится важное понятие интенсивности напряжений, характеризующей уровень напряжённого состояния,

$$\sigma_u = [3I_2(D_\sigma)]^{1/2} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}. \quad (1.22)$$

Рассматривается также параметр, характеризующий вид напряжённого состояния,

$$\mu = \frac{27}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{[3I_2(D_\sigma)]^{3/2}} \quad (\mu \in [-1; +1]). \quad (1.23)$$

При одноосных сжатии, кручении и растяжении параметр вида напряжённого состояния, соответственно, равен: -1 , 0 и $+1$.

Рассматривая также три случая нагружения тонкостенного трубчатого образца, можно получить:

1) одноосное растяжение (сжатие)

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \sigma_{11} \end{Bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\sigma_u = |\sigma_{11}|, \quad \mu = +1 \text{ } (-1); \quad (1.25)$$

2) кручение

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.26)$$

$$\sigma_u = \sqrt{3} |\sigma_{12}|, \quad \mu = 0; \quad (1.27)$$

3) обобщённое плоское состояние

$$D_\sigma = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{2\sigma_{11}}{3} - \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \frac{2\sigma_{22}}{3} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_{33}}{3} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3} \end{array} \right\}, \quad (1.28)$$

$$\sigma_u = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}, \quad (1.29)$$

$$\mu = \frac{1}{(\sigma_u)^3} \left[\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 - \frac{9}{2} \sigma (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - 3\sigma_{12}^2) \right]. \quad (1.30)$$

§ 3. Тензор деформаций и его инварианты

Деформированное состояние в точке тела определяется [11, 12] тензором деформаций

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{array} \right\} = \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.31)$$

Тензор деформаций является [1, 2] симметричным тензором,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (1.32)$$

Тензор деформаций имеет следующие инварианты:

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_{ii}, \quad (1.33)$$

$$I_2(T_\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (\varepsilon_{kk})^2, \quad (1.34)$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} (\varepsilon_{kk}) + \frac{1}{6} (\varepsilon_{kk})^3. \quad (1.35)$$

На основе формул (1.33)–(1.35) можно получить следующие выражения для инвариантов тензора деформаций:

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (1.36)$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2, \quad (1.37)$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}. \quad (1.38)$$

Рассматривая также три случая нагружения тонкостенного трубчатого образца, можно получить:

1) одноосное растяжение (сжатие)

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{array} \right\} \quad (\varepsilon_{33} = \varepsilon_{22}), \quad (1.39)$$

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}, \quad (1.40)$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33};$$

2) кручение

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.41)$$

$$I_1(T_\varepsilon) = 0, \quad I_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_{12}^2, \quad I_3(T_\varepsilon) = 0; \quad (1.42)$$

3) обобщённое плоское состояние

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}, \quad (1.43)$$

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}^2, \quad (1.44)$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2.$$

§ 4. Девиатор деформаций и его инварианты

Тензор деформаций разлагается [11, 12] на шаровой тензор и девиатор

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{Bmatrix} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij}. \quad (1.45)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ — средняя деформация; e_{ij} — девиатор деформаций. Таким образом компоненты девиатора деформаций определяются по формуле

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}. \quad (1.46)$$

Девиатор деформаций D_ε имеет следующие инварианты:

$$I_1(D_\varepsilon) = e_{ii} = 0, \quad (1.47)$$

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}, \quad (1.48)$$

$$I_3(D_\varepsilon) = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}. \quad (1.49)$$

Или, раскрывая формулы (1.48) и (1.49), можно получить выражения для второго и третьего инвариантов девиатора деформаций:

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2, \quad (1.50)$$

$$I_3(D_\varepsilon) = e_{11}e_{22}e_{33} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{31}^2 - e_{33}e_{12}^2 + 2e_{12}e_{23}e_{31}. \quad (1.51)$$