

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Ю.В. Видин, В.С. Злобин, Д.И. Иванов

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В НЕОДНОРОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ КРИВОЛИНЕЙНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Монография

Красноярск
СФУ
2016

УДК 621.1.016+536.24

ББК 31.311+22.365.55

В421

Рецензенты:

С.В. Голдаев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теоретическая и промышленная теплотехника» Томского национально-исследовательского политехнического университета;

А.А. Федяев, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Промышленная теплоэнергетика» Братского государственного университета

Видин, Ю.В.

В421

Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации : монография / Ю.В. Видин, В.С. Злобин, Д.И. Иванов. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. – 168 с.

ISBN 978-5-7638-3540-3

Изложены как строгие, так и приближенные аналитические методы решения стационарных и нестационарных задач теплопереноса в твердых телах. В большом объеме представлены результаты научно-практического характера в области тепломассообмена, полученные авторами на протяжении нескольких последних лет. Приведены подробные таблицы значений ряда наиболее важных специальных функций Бесселя.

Предназначена научным работникам, инженерам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам, специализирующимся в области теории теплообмена.

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 621.1.016+536.24
ББК 31.311+22.365.55

ISBN 978-5-7638-3540-3

© Сибирский федеральный
университет, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что основной целью проведения большинства инженерно-технических расчетов обычно является получение итоговых результатов в численном виде [1, 5]. Следовательно, исследуемый физический процесс должен быть представлен в виде соответствующей математической модели. Как правило, для этой цели используют как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных. При этом, естественно, реальное физическое явление (или процесс) и его математическую модель разделяют допущения и упрощения, которые могут существенно облегчить проведение теоретического анализа изучаемого процесса. Для того чтобы получить результаты, которые достаточно объективно отражают ход исследуемого явления, необходимо чтобы математический алгоритм точно соответствовал ему.

В данной монографии подробно рассматриваются аналитические методы решения наиболее важных с инженерной точки зрения задач как стационарной, так и нестационарной теплопроводности твердых тел, имеющих криволинейную конфигурацию поверхностей. Значительное внимание в работе уделено определению собственных чисел сложных характеристических уравнений. Предложено несколько эффективных приближенных теоретических приемов для нахождения корней таких уравнений. Рекомендуемые методы являются сравнительно простыми в математическом отношении и одновременно обладают вполне достаточной с инженерной точки зрения точностью.

Завершается монография рассмотрением процессов теплопереноса в телах, имеющих сравнительно умеренную кривизну граничных поверхностей, на которые действуют подвижные концентрированные источники энергии.

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дифференциальное уравнение теплопроводности выводится на основе закона Фурье, по имени выдающегося французского математика Ж. Фурье (J.D.J. Fourier, 1768–1830), и закона сохранения энергии для термодинамической системы [1–3]. Как правило, такой вывод осуществляется для прямоугольной системы пространственных координат, являющейся с геометрической точки зрения наиболее простой. В зависимости от принимаемых исходных физических допущений окончательный вид дифференциального уравнения может быть различным.

1.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности для изотропного твердого тела

Если тело является изотропным, т. е. физические свойства среды одинаковы по всем направлениям и его тепловые характеристики на протяжении исследуемого процесса близки к постоянным, дифференциальное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.1)$$

где t – температурное поле, К; τ – время, с; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент темпе-

ратуропроводности материала, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$; λ и c – соответственно коэффициен-

ты теплопроводности, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, и удельной массовой теплоемкости, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;

ρ – плотность материала, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; q_v – удельная мощность внутренних источ-

ников энергии (или стоков, если $q_v < 0$), $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$; $\nabla^2 t$ – оператор Лапласа, вид

которого зависит от выбранной системы пространственных координат.

В случае использования декартовой системы координат имеет место выражение

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (1.2)$$

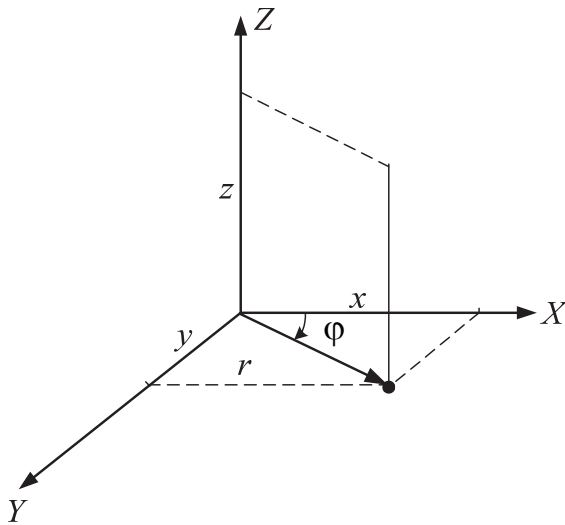


Рис. 1.1. Цилиндрические координаты

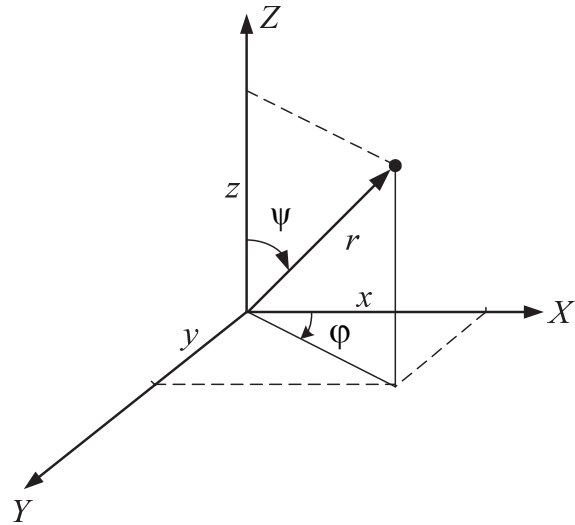


Рис. 1.2. Сферические координаты

Если исследуемое тело обладает цилиндрической или сферической симметрией, то целесообразно произвести соответствующую замену независимых переменных. Для этого следует преобразовать оператор $\nabla^2 t$ из прямоугольной системы координат в цилиндрическую или сферическую. Прямоугольная и цилиндрическая системы координат, как видно из рис. 1.1, связаны между собой соотношениями

$$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi; \quad z = z.$$

Их можно представить в виде зависимостей

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x}{y}.$$

Прямоугольные и сферические пространственные координаты связаны друг с другом (рис. 1.2) формулами

$$x = r \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi; \quad z = r \cdot \cos \psi.$$

Отсюда вытекает, что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \psi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Переход от декартовой системы координат к цилиндрической выполняется на основе следующих основных условий:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Далее аналогичным образом выражаются вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (1.6)$$

Если воспользоваться легко доказуемыми соотношениями вида

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2 \cos \varphi \sin \varphi; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

то нетрудно показать, что формулы (1.5) и (1.6) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \sin^2 \varphi - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial t}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi; \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \cos^2 \varphi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial t}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (1.2) и используя тождество $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, удастся получить выражение оператора Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (1.7)$$

Применив аналогичные преобразования, можно представить оператор Лапласа также в сферических координатах

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}. \quad (1.8)$$

Если определяемое температурное поле является одномерным, то оператор $\nabla^2 t$ существенно упрощается и принимает общий вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\Gamma - 1}{r} \frac{\partial t}{\partial r}, \quad (1.9)$$

где $\Gamma = 1$ для плоского тела, $\Gamma = 2$ для неограниченного цилиндра и $\Gamma = 3$ для шара.

Известно, что криволинейные участки – это неотъемлемые элементы современных трубопроводных систем и их суммарная доля в общей протяженности трасс может составлять значительную величину. Наиболее распространенными элементами являются повороты. С геометрической точки зрения их можно рассматривать как некоторые части тора. Поэтому дифференциальное уравнение теплопроводности, записанное в тороидальных координатах, представляет несомненный научно-технический интерес. В математическом отношении тороидальные координаты существенно сложнее по сравнению с названными выше. Оператор Лапласа в тороидальной системе координат может быть записан в виде [4, 6]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 t = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) + \\ & + \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Обозначения в этой формуле заимствованы из [4]. По-видимому, при определенных условиях тороидальные пространственные координаты должны приближаться к цилиндрическим.

1.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности твердого тела с переменными свойствами

В тех случаях, когда свойства материала тела существенно зависят от температуры, а также от некоторых других величин, например пространственных координат, времени и т. д., приходится использовать для нахожде-

ния температурного поля более сложные дифференциальные уравнения переноса энергии, чем приведенные в п. 1.1. Так, если коэффициент теплопроводности материала тела является некоторой известной функцией типа

$$\lambda = f(t, x, y, z, \tau),$$

то дифференциальное уравнение (1.1) принимает в системе прямоугольных координат следующий более общий вид

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v. \quad (1.11)$$

Причем входящие в (1.11) комплексы $c\rho$ и q_v тоже могут быть переменными. Зависимость (1.11) устанавливает математическую связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке внутри тела, в котором происходит процесс теплопроводности. Очевидно, что уравнение (1.11) оказывается нелинейным и нахождение его аналитического решения, как правило, связано с большими трудностями.

Для одномерного температурного поля зависимость (1.11) в цилиндрической системе координат принимает вид

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) \right] + q_v, \quad (1.12)$$

а в сферической –

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) \right] + q_v. \quad (1.13)$$

Выражения (1.11), (1.12) и (1.13) могут быть объединены в одно, а именно:

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^{\Gamma-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{\Gamma-1} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) \right] + q_v, \quad (1.14)$$

где параметр Γ отражает особенности геометрической конфигурации изучаемого тела. Он равен 1, 2 и 3 соответственно для плоской, цилиндрической и сферической конструкций изделий.

В реальной практике коэффициент теплопроводности λ является обычно только функцией температуры. Для многих материалов зависимость λ от температуры близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt), \quad (1.15)$$

где λ_0 – значение коэффициента теплопроводности при фиксированной температуре 0°C . При этом постоянная b может быть как положительной величиной, так и отрицательной. В частном случае $b = 0$.

1.3. Начальные и граничные условия

Приведенные выше дифференциальные уравнения в частных производных описывают классы явлений переноса энергии внутри тела или системы тел в самом общем виде. Решение этих уравнений должно удовлетворять начальным и граничным условиям, вытекающим из характера поставленной задачи.

Под начальным условием понимают тепловое состояние рассматриваемой системы в начальный момент времени ($\tau = 0$). При этом предполагается, что в некоторый момент времени, принятый за начало отсчета ($\tau = 0$), задано распределение температуры по всему объему тела. Другими словами, должны быть известны следующие виды температурных полей:

$t = t(x, y, z, \tau = 0)$ – для плоского тела;

$t = t(r, \varphi, z, \tau = 0)$ – для цилиндрического тела;

$t = t(r, \psi, \varphi, \tau = 0)$ – для сферического тела.

Начальные условия необходимо знать только в случае исследования нестационарных процессов теплопроводности, т. е. когда $\frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0$. При изучении стационарных процессов начальное условие не играет роли.

Граничные условия, или условия на поверхности, задаются в соответствии с законами теплообмена тела с окружающей средой. Различают четыре основных типа граничных условий. Первый тип, граничное условие первого рода, – это когда известна температура на поверхности. В этом случае температура может быть либо постоянной, либо зависеть от времени, либо от координат точек, расположенных на внешних границах тела, либо от того и другого одновременно. Данное граничное условие считается наиболее простым с математической точки зрения. Однако необходимо отметить, что на практике довольно часто сравнительно сложно задать температуру на поверхности. Граничное условие второго рода характеризуется тем, что задается закон изменения плотности теплового потока на внешних поверхностях тела. Под граничным условием третьего рода понимается закон конвективного теплообмена Ньютона-Рихмана, согласно которому величина удельного теплового потока между поверхностью и омывающей ее подвижной средой пропорциональна разности их температур. В случае когда коэффициент конвективного теплообмена становится весьма значительным, данное условие вырождается в условие первого рода.

Если имеет место процесс теплообмена между двумя твердыми телами, находящимися в механическом контакте друг с другом, то данный случай относится к граничному условию четвертого рода. Причем при очень плотном контакте температура в плоскости взаимодействия разнородных тел будет одинаковой. Если же в зоне соприкосновения образуется контактное термическое сопротивление, то в общем случае возможно возникновение некоторого скачка температуры. Принято начальные и граничные условия считать условиями однозначности. Таким образом, дифференциальное уравнение теплопроводности, дополненное условиями однозначности, позволяет из бесконечного количества явлений выделить конкретный процесс и дать ему полное математическое описание.

Глава 2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Для установившегося, или стационарного, теплового режима температурное поле тела во времени остается постоянным, т. е. тогда $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$.

Благодаря этому в частности дифференциальные уравнения теплопроводности (1.12)–(1.14) существенно упрощаются и принимают соответствующий вид:

- для цилиндрического тела

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) \right] + q_v = 0; \quad (2.1)$$

- для сферического

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) \right] + q_v = 0. \quad (2.2)$$

При постоянном коэффициенте теплопроводности λ они еще дополнительно становятся проще

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dt}{dr} \right] + \frac{q_v}{\lambda} = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dt}{dr} \right] + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, для стационарного режима одномерные дифференциальные уравнения вырождаются в обыкновенные дифференциальные уравнения, что существенно облегчает задачу их аналитического решения.

2.1. Стационарная теплопроводность одно- и многослойной цилиндрической стенки

Процесс стационарной теплопроводности в однослойной цилиндрической стенке при постоянном коэффициенте λ и отсутствии внутреннего источника энергии ($q_v = 0$), заданных температурах на внутренней и внешней поверхностях формулируется, как хорошо известно, в виде следующей математической системы:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$t = t_1 \text{ при } r = r_1, \quad (2.6)$$

$$t = t_2 \text{ при } r = r_2, \quad (2.7)$$

где r_1 и r_2 – радиусы соответственно внутренней и наружной поверхностей полого цилиндра.

Решение системы (2.5)–(2.7) имеет вид

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (2.8)$$

т. е. температурное поле в одномерной цилиндрической стенке описывается логарифмической функцией. Удельный линейный тепловой поток через такую стенку

$$q_l = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.9)$$

Знаменатель в выражении (2.9)

$$R_l = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (2.10)$$

является внутренним линейным термическим сопротивлением данной стенки.

Если цилиндрическая конструкция является многослойной и контакт между ее элементами совершенный, то зависимость (2.9) приобретет более общий вид

$$q_l = \frac{\pi(t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}, \quad (2.11)$$

где n – число слоев, а $R_{l_i} = \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}$ – внутреннее линейное термическое сопротивление i -го слоя.

Температура на границе между i -м и $(i + 1)$ -м слоями может быть рассчитана по рекуррентному выражению

$$t_{i+1} = t_i - \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}. \quad (2.12)$$

Если конструкция содержит большое количество слоев, то для определения температуры на стыке тел можно использовать графический метод (рис. 2.1).

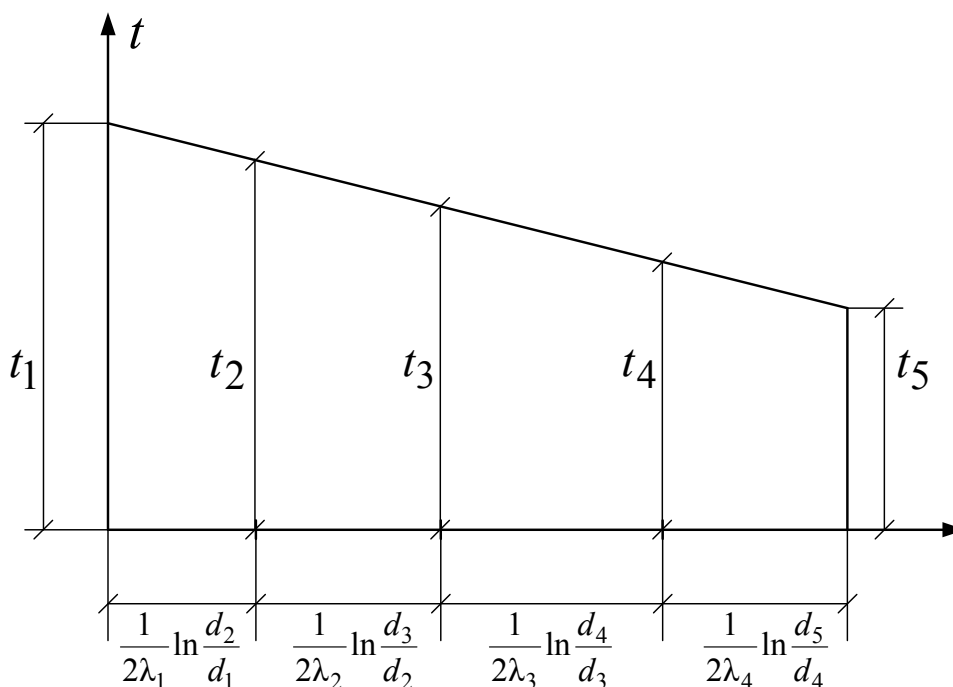


Рис. 2.1. Графический метод определения температуры в месте контакта слоев цилиндрической неоднородной конструкции

Этот способ позволяет легко и с достаточной точностью определить искомые температуры.

2.2. Стационарная теплопроводность цилиндрической стенки при переменном коэффициенте теплопроводности

Если коэффициент теплопроводности материала является линейной функцией температуры $\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$, то при $q_v = 0$ уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left[r(1 + bt) \frac{dt}{dr} \right] = 0. \quad (2.13)$$

Аналитическое решение этой зависимости с учетом граничных условий первого рода (2.6) и (2.7) можно записать в форме квадратного алгебраического уравнения

$$t + \frac{bt^2}{2} = t_1 + \frac{bt_1^2}{2} - \left[(t_1 - t_2) + \frac{b(t_1^2 - t_2^2)}{2} \right] \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что стационарное температурное поле в такой стенке при принятом законе изменения λ подчиняется зависимости

$$t = \frac{1}{b} \left(\sqrt{1 + 2b \left\{ t_1 + \frac{bt_1^2}{2} - \left[(t_1 - t_2) + \frac{b(t_1^2 - t_2^2)}{2} \right] \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right\}} - 1 \right). \quad (2.15)$$

Таким образом, даже при сравнительно простой линейной закономерности для коэффициента теплопроводности строгое аналитическое решение оказывается довольно громоздким.

Удельный линейный тепловой поток в случае, когда коэффициент теплопроводности есть линейная функция температуры, можно вычислять по формуле, аналогичной (2.9), т. е

$$q_l = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_{\text{ср}}} \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (2.16)$$

где $\lambda_{\text{ср}}$ — является осредненной величиной, рассчитываемой по выражению

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt. \quad (2.17)$$

Аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения, подобного (2.13), может быть получено и при более сложных функциональных зависимостях коэффициента теплопроводности от температуры, например когда они представляют собой многочлен или полином высокой степени (два и выше). Для этого целесообразно ввести новую переменную на основе условия

$$u = \int \lambda(t) dt. \quad (2.18)$$

Тогда уравнение (2.13) приобретает вид

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{du}{dr} \right] = 0 \quad (2.19)$$

и его общее решение записывается как соотношение

$$u = C_1 \ln r + C_2, \quad (2.20)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 могут быть найдены из соответствующих граничных условий исходной задачи.

Переход от полученной функции $u = u(r)$ к исходному температурному полю $t = t(r)$ выполняется на базе выражения (2.18). При этом, как правило, итоговая функция $t = t(r)$ в математическом отношении оказывается весьма сложной. Следует отметить, что громоздкость расчетной формулы для определения температурного поля $t = t(r)$ тем значительнее, чем сложнее характер функции $\lambda = \lambda(t)$. В каждом конкретном случае целесообразно такую реальную зависимость попытаться обоснованно аппроксимировать более простым аналитическим выражением.

2.3. Стационарная теплопередача через одно- и многослойную цилиндрическую стенку

Обычно под теплопередачей понимают теплообмен между двумя разными теплоносителями через разделяющую их твердую стенку или поверхность раздела между ними [8]. С математической и физической точек зрения этот процесс отличается от рассмотренных в п. 2.1 и 2.2 данной главы тем, что вместо принятых ранее граничных условий первого рода нужно использовать граничные условия более общего вида, а именно условия третьего рода. Тогда необходимо заменить равенства (2.6) и (2.7) на выражения

$$-\lambda \frac{dt}{dr} = \alpha_1 (t_{ж1} - t) \text{ при } r = r_1, \quad (2.21)$$

$$\lambda \frac{dt}{dr} = \alpha_2 (t_{ж2} - t) \text{ при } r = r_2, \quad (2.22)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплообмена на внутренней и наружной поверхностях цилиндрического канала, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$, и $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ – значения температур подвижных сред, между которыми осуществляется теплопередача (рис. 2.2).

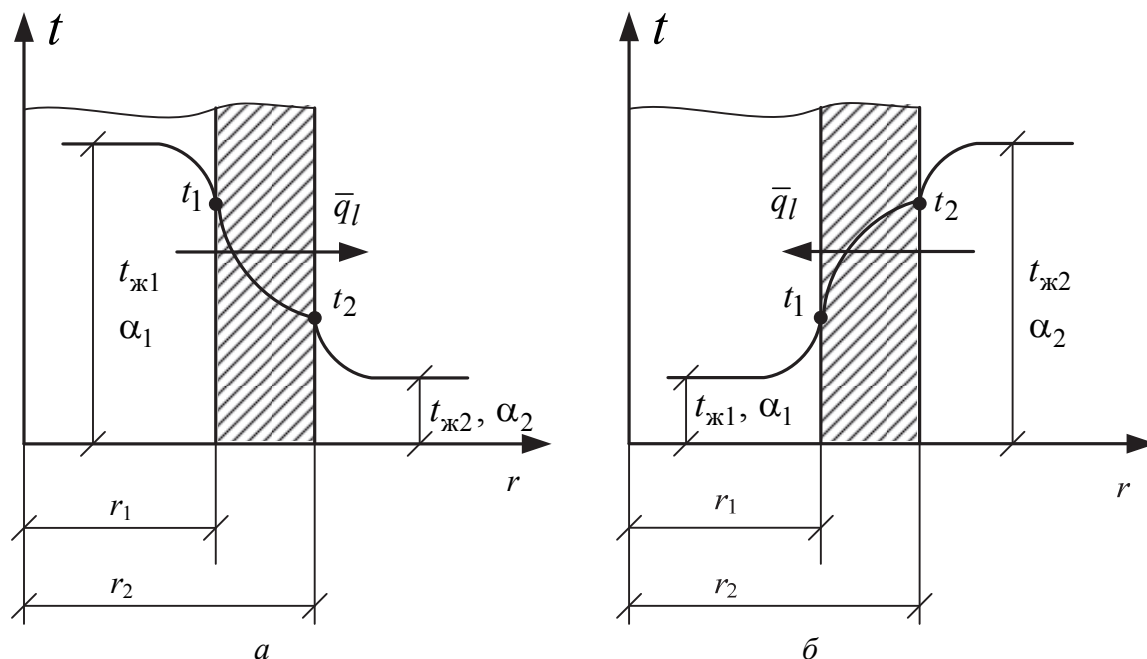


Рис. 2.2. Теплопередача через однослойную цилиндрическую стенку:

$a - t_{ж1} > t_{ж2}$; $b - t_{ж1} < t_{ж2}$

Аналитическое решение системы (2.5), (2.21)–(2.22) при постоянных $t_{ж1}$, $t_{ж2}$, α_1 и α_2 целесообразно начинать с определения удельного линейного теплового потока q_l , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}}$ на основе зависимости

$$q_l = \pi k_l (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.23)$$

где линейный коэффициент теплопередачи k_l , $\frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$ рассчитывается по формуле

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad (2.24)$$

здесь $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$, λ – коэффициент теплопроводности материала стенки, $\frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$.

Далее находятся температуры внутренней и внешней поверхностей трубы:

$$t_1 = t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi \alpha_1 d_1}, \quad (2.25)$$