Министерство образования и науки Российской Федерации

Сибирский федеральный университет

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Д. А. Краснова

А. А. Родионов

И. В. Степанова

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Красноярск

СФУ

2017

УДК 512.543.7(07)
ББК 22.147.4я73
К782

Рецензенты:

С. И. Сенашов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных экономических систем СибГУ им. М. Ф. Решетнева;

О. В. Капцов, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела вычислительных моделей в гидрофизике ИВМ СО РАН

Краснова, Д. А.

К782 Непрерывные группы уравнений: учеб. пособие/ Д. А. Краснова, А. А. Родионов, И. В. Степанова. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017. – 116 с.

ISBN 978-5-7638-3627-1

Содержит теоретический материал, примеры решения типовых задач, контрольные вопросы и задания, упражнения для самостоятельного выполнения.

Предназначено для студентов старших курсов, аспирантов, преподавателей и научных работников в области дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при частичном финансировании из средств гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых – кандидатов наук (код проекта МК-4519.2016.1).

Электронный вариант издания см.:
http://catalog.sfu-kras.ru

УДК 512.543.7(07)
ББК 22.147.4я73

ISBN 978-5-7638-3627-1

Оглавление

Предисловие

Теория непрерывных групп преобразований дифференциальных уравнений лежит на стыке двух больших математических дисциплин – алгебры и анализа. Ее основы заложил в конце XIX в. норвежский математик Софус Ли (1842–1899). Важность вклада Ли в современную теорию дифференциальных уравнений сложно переоценить: он обнаружил, что все специальные методы решения разных видов обыкновенных дифференциальных уравнений основаны на инвариантности каждого уравнения относительно некоторой непрерывной группы преобразований. Эти группы, теперь известные как группы Ли, оказали влияние на многие области теоретической и прикладной науки: от чистой алгебры до прикладной механики и теоретической физики. Кроме того, Софус Ли создал и первым использовал механизмы редукции, когда решение исследуемого уравнения ищется в виде специальной подстановки, которая сводит данное уравнение к дифференциальному уравнению с меньшим количеством независимых переменных.

Развитие теоретико-групповых методов дифференциальных уравнений в XX в. связано с работами академика Л.В. Овсянникова [1,2] и его учеников [3–8]. После выхода в свет монографии Л.В. Овсянникова [2] в математической науке окончательно сформировалось направление, получившее название *групповой анализ дифференциальных уравнений*. С помощью этой красивой и в известной степени законченной теории можно описать общую структуру семейства решений дифференциального уравнения; выделить определенные классы решений, отыскание которых в каком-либо смысле проще по сравнению с общим решением; построить законы сохранения; вывести новые решения из уже известных. Основным преимуществом теории является ее применимость к различным уравнениям независимо от их типа, порядка и свойства линейности. Из зарубежных работ, подробно описывающих теорию и методы группового анализа, стоит отметить книгу П. Олвера [9].

Настоящее пособие посвящено изложению основ теоретико-группового анализа для студентов ИМиФИ СФУ. Приведены основные теоремы с доказательствами, даны понятия группы и алгебры преобразований, определение инвариантного решения. Теоретический материал сопровождается большим количеством примеров, что позволит читателю быстрее овладеть удобной техникой исследования качественных свойств дифференциальных уравнений.

Пособие состоит из восьми глав. В первой главе излагаются теоретические основы однопараметрических групп преобразований, дается понятие инфинитезимального оператора, формулируется и доказывается теорема Ли, вводится определение группового инварианта. Целью второй главы является обучение вычислению допускаемой группы преобразований на примере уравнения линейной теплопроводности. Даются формулы для продолжений инфинитезимального оператора, описывается процесс расщепления полученных определяющих уравнений. Третья глава посвящена теории алгебр Ли и порождаемым ими многопараметрическим группам. В четвертой и пятой главах излагается процесс построения инвариантных и частично-инвариантных решений для дифференциальных уравнений, допускающих группу преобразований. Введены понятия ранга и дефекта частично-инвариантного решения. Анализу задачи групповой классификации посвящена глава шестая. Четкий алгоритм решения данной задачи сопровождается тщательно разобранным примером для уравнения нелинейной теплопроводности. В седьмой и восьмой главах описывается применение группового анализа для построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Предложен алгоритм восстановления общего вида обыкновенного дифференциального уравнения по допускаемой группе преобразований.

При подготовке данного пособия авторы в основном опирались на работы Л.В. Овсянникова [1,2] и Н. Х. Ибрагимова [10,11]; использовали некоторые формулировки задач из пособий [12,13]; а также руководствовались личным опытом и опытом коллег [14–19], накопленным в результате постоянного применения теоретико-групповых методов в исследованиях фундаментальных свойств уравнений динамики жидкостей.

1. Однопараметрические группы преобразований

Цель главы. *Излагаются теоретические основы однопараметрических групп преобразований: приводятся основные определения, даются формулировки и доказательства теоремы Ли, критерия инвариантности, теоремы о представлении системы уравнений в терминах инвариантов, демонстрируется множество примеров групп преобразований, указывается их геометрическая или физическая интерпретация.*

Рассмотрим преобразование $T : z'(x) = f(z)$, $z(x) = (z^1, ..., z^n)$, $z'(x) = (z'^1, ..., z'^n) \in R^n$ – точки евклидова пространства. Считаем, что преобразование обратимо. Обратное преобразование есть $T^{-1} : z' \to z$, $T^{-1}T = I$ – тождественное преобразование. На множестве преобразований $\{T\}$ рассмотрим преобразования однопараметрического семейства $\{T_a\}$:

$$T_a : z' = f(z, a), \tag{1.1}$$

где a – вещественный параметр, $a \in \Delta \subset R$, Δ – интервал.

Каждому a соответствует преобразование T_a семейства $\{T_a\}$. Будем предполагать, что $a = 0$ соответствует $T_0 = I \in \{T_a\}$ тождественное преобразование, любому $a \neq 0$, $a \in \Delta$, соответствует $T_a \neq I$. Если окажется, что $T_{a_0} = I$ при $a_0 \neq 0$, $a_0 \in \Delta$, то условие $T_0 = I$ достигается сдвигом параметра $a = \overline{a} + a_0$. Предполагаем, что если $\{T_a\} \supset T_a$, то $\{T_a\} \supset T_a^{-1}$ – обратное преобразование и $T_aT_a^{-1} = T_a^{-1}T_a = T_0 = I$. Параметр, соответствующий обратному преобразованию, будем обозначать a^{-1}, так что $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$.

Пример 1.1. Преобразование растяжения $T_{a^*} : z' = a^*z$. Оно является тождественным при $a_0^* = 1$. Сдвиг параметра $a_0^* = 1 + a$ приводит к преобразованиям

$$T_a : z' = z + az. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $T_0 = I$. При $a^{-1} = -a/(1 + a)$, определено обратное преобразование $T_{a^{-1}}$ к T_a и $-1 < a < \infty$.

Возьмем $a, b \in \Delta$ и соответствующие преобразования

$$T_a : z' = z + az;\ T_b : z'' = z' + bz'.$$

Тогда $T_bT_a : z'' = z' + bz' = z + az + b(z + az) = z + (a + b + ab)z$, т. е. $T_bT_a = T_c$, где $c = a + b + ab \in \Delta$.

Говорят, что преобразования (1.2) образуют однопараметрическую группу. В общем случае считают, что преобразования (1.1) образуют однопараметрическую группу, если, помимо перечисленных свойств, они удовлетворяют условию

$$T_bT_a = T_{\varphi(a,b)}, \tag{1.3}$$

$\varphi(a, b)$ – достаточное число раз дифференцируемая функция.

Примеры, когда однопараметрические семейства преобразований не образуют группу:

Пример 1.2. $z' = z + az^2$, тогда $z'' = z' + bz'^2 = z + az^2 + b(z + az^2)^2 \neq$ $\neq z + \varphi(a, b)z^2$.

Пример 1.3. $z' = z + \frac{a}{z} \Rightarrow z'' = z' + \frac{b}{z'} = z + \frac{a}{z} + \frac{bz}{z^2+a} \neq z + \frac{\varphi(a,b)}{z}$.

Пусть выполнено групповое свойство (1.3) и «начальное» условие $T_0 = I$. Тогда $T_0T_a = T_a,\ T_bT_0 = T_b$, откуда следует

$$\varphi(a, 0) = a,\ \varphi(0, b) = b. \tag{1.4}$$

Например, для преобразования (1.2) $\varphi(a, b) = a + b + ab$ и очевидно, что условия (1.4) выполнены. Другой пример – группа переносов вдоль оси x :

Пример 1.4. $x' = x + a$, $x'' = x' + b = x + a + b \Rightarrow \varphi(a, b) = a + b$, $a^{-1} = -a$.

Итак, основные свойства однопараметрической группы:
1) если $T_a, T_b \in \{T_a\}$, то $T_bT_a \in \{T_a\}$ (замкнутость умножения в группе);
2) $T_0 = I \in \{T_a\}$ (или $T_{a_0} = I \in \{T_a\}$) (существование единицы);
3) $T_a^{-1} = T_{a^{-1}},\ T_{a^{-1}}T_a = I$ (существование обратного элемента);
4) $T_c(T_bT_a) = (T_cT_b)T_a$ (ассоциативность умножения).

В теории групп эти свойства кладутся в основу определения группы, но здесь имеется еще непрерывная зависимость от параметра (это характерная черта групп Ли).

Пусть R^n – евклидово пространство точек $z = (z^1, \dots, z^n)$, Δ – интервал в R, симметричный относительно нуля.

Определение 1.1. *Локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства* R^n *называется такое семейство локальных преобразований* $f : R^n \times \Delta \to R^n$, *которое обладает следующими свойствами:*
1) $f(z, 0) = z$, $\forall z \in R^n$;
2) для $\forall a, b, a + b \in \Delta$, $z \in R^n$

$$f(f(z, a), b) = f(z, a + b); \tag{1.5}$$

3) если $a \in \Delta$, $f(z, a) = z$ *для* $\forall z \in R^n$, *то* $a = 0$;
4) $f \in C^\infty(R^n \times \Delta)$.

Замечание. Здесь для преобразования $T_b T_a :$ $f(f(z, a), b) = f(z, \varphi(a, b))$ для $\forall a, b$, $\varphi(a, b) \in \Delta$. В (1.5) взята функция $\varphi(a, b) = a + b$, $a^{-1} = -a$. На самом деле любой закон умножения $\varphi(a, b)$ в однопараметрической группе может быть приведен к виду (1.5) путем перепараметризации.

Локальную однопараметрическую группу Ли локальных преобразований будем обозначать G_1. Каждое преобразование $f_a \in G_1$, $a \in \Delta$, в координатной записи действует по формуле

$$f_a : z'^i = f^i(z, a), \ i = \overline{1, n}. \tag{1.1$'$}$$

Если параметры $a \in \Delta^r$, где Δ^r – окрестность нуля в R^r, то получаем определение локальной r-параметрической группы Ли G_r локальных преобразований $f : R^n \times \Delta^r \to R^n$ $(z' = f(z, a^1, \dots, a^r))$.

Определение 1.2. *Для отображения* $f \in G_1$ *фиксируем точку* $z \in R^n$. *Отображение* $f_z : \Delta \to R^n$ *определяет некоторую кривую* $f_z(\Delta)$ *в* R^{n+1}, *которая называется орбитой точки* z.

Определение 1.3. *Векторное поле* $\xi : R^n \to R^n$, *определяемое формулой*

$$\xi(z) = \frac{\partial f(z,a)}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \qquad (1.6)$$

называется касательным векторным полем группы G_1.

Вектор $\xi(z) = (\xi^1(z), \xi^2(z), \ldots, \xi^n(z))$ является касательным к орбите $f_z(\Delta)$ в точке z.

Разложим функцию $f(z,a)$ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности $a = 0$. По условию $f(z,0) = z$, поэтому преобразование (1.1) запишем в виде

$$z' = z + \xi(z)a + o(a). \qquad (1.7)$$

Следующая теорема утверждает, что двумя первыми слагаемыми разложения (1.7) однозначно задается функция $f(z,a)$, удовлетворяющая групповому свойству (1.5). Говорят также, что группа G_1 определяется своим касательным векторным полем $\xi(z)$.

Теорема 1.1 (Ли). *Пусть функция* $f(z,a)$ *удовлетворяет групповому свойству* (1.5), *и имеет место разложение* (1.7). *Тогда* $f(z,a)$ *является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (называемого уравнением Ли) с начальным условием*

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad f|_{a=0} = z. \qquad (1.8)$$

Обратно: пусть $\xi(z)$ *– произвольное гладкое векторное поле, тогда отображение* f, *построенное как решение задачи Коши* (1.8) *(решение существует и единственно), порождает локальную однопараметрическую группу Ли* G_1.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть выполнено (1.5): $f(f(z,a),b) = f(z,a+b)$, $\forall a, b, a+b \in \Delta$, $z \in R^n$. Придадим параметру a приращение Δa : положим $b = \Delta a$, $f(z, a+\Delta a) = f(f(z,a), \Delta a)$. Выделим главную линейную часть по Δa:

$$f(z, a+\Delta a) = f(z,a) + \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + o(\Delta a),$$

$$f(f(z,a),\Delta a) = f(z,a) + \frac{\partial f(f(z,a),\Delta a)}{\partial(\Delta a)}\bigg|_{\Delta a=0} \cdot \Delta a + o(\Delta a).$$

Сравнивая выражения в правых частях, приравниваем коэффициенты при Δa :
$$\frac{\partial f(z,a)}{\partial a} = \frac{\partial f(f(z,a),\Delta a)}{\partial(\Delta a)}\bigg|_{\Delta a=0} \overset{(1.6)}{=} \xi(f(z,a)).$$
Получили уравнение Ли (1.8).

$\Leftarrow$ Пусть $f(z,a)$ – решение задачи (1.8). Зафиксируем значение параметра a (близкое к $a=0$, поскольку решение может существовать лишь локально) и рассмотрим две функции:

$$u(b) = f(z',b) \equiv f(f(z,a),b);\ v(b) = f(z,a+b).$$

Для них в силу уравнения Ли (1.8) имеем

$$\frac{du}{db} = \frac{df(z',b)}{db} \overset{(1.8)}{=} \xi(f(z',b)) = \xi(u),\ u|_{b=0} = f(z',0) = z' = f(z,a);$$
$$\frac{dv}{db} = \frac{df(z',a+b)}{db} \overset{(1.8)}{=} \xi(f(z',a+b)) = \xi(v),\ v|_{b=0} = f(z,a).$$

Таким образом, $u(b)$ и $v(b)$ удовлетворяют одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка и одинаковым начальным условиям. В силу единственности решения задачи Коши следует, что $u(b)=v(b)$, т. е. выполнено групповое свойство (1.5). $\square$

Пример 1.5. Группа переносов $x' = x+a$ имеет векторное поле $\xi(x)=1$. Уравнение Ли будет $\frac{dx'}{da} = 1$.

Пример 1.6. Пусть $\xi(x) = x \in R$. Задача (1.8) имеет вид $\frac{dx'}{da} = x'$, $x'|_{a=0} = x$. Ее решение $x' = e^a x$ дает группу растяжений с отличным от (1.2) параметром.

Пример 1.7. Если на плоскости (x,y) задано векторное поле $\xi(x,y) = (x,2y)$, то решением уравнения (1.8)

$$\frac{dx'}{da} = x',\ x'|_{a=0} = x;\quad \frac{dy'}{da} = 2y',\ y'|_{a=0} = y$$

являются функции $x' = e^a x$, $y' = e^{2a}y$, которые определяют группу растяжений.

Пример 1.8. Пусть $\xi(x,y) = (x^2, xy)$. Тогда уравнение (1.8) представимо в виде

$$\frac{dx'}{da} = x'^2,\ \ x'|_{a=0} = x, \quad \frac{dy'}{da} = x'y',\ \ y'|_{a=0} = y.$$

В результате решения получим однопараметрическую группу проективных преобразований:

$$T_a: \quad x' = \frac{x}{1-ax}, \quad y' = \frac{y}{1-ax}. \tag{1.9}$$

Легко проверить, что преобразования (1.9) удовлетворяют свойству (1.5), $T_bT_a = T_{a+b}$:

$$x'' = \frac{x}{1-(a+b)x},\ y'' = \frac{y}{1-(a+b)x}. \tag{1.9$'$}$$

Последний пример интересен тем, что он иллюстрирует одно из свойств группы преобразований – их локальный характер. Пусть векторное поле $(x,y) = (1,1)$. Тогда $x' = 1/(1-a)$, $y' = 1/(1-a)$. Видно, что $a \in \Delta = (-\infty, 1)$. Из (1.9$'$): $x'' = 1/(1-(a+b))$, $y'' = 1/(1-(a+b))$. Ясно, что если $a, b \in \Delta$, то это может привести к недопустимому значению, когда $a+b \geq 1$ (например, T_a и T_b определены при $a = 1/4$, $b = 3/4$, но T_bT_a – не определено). Следовательно, перемножать можно только те преобразования, параметры которых принадлежат подынтервалу Δ' интервала Δ. В нашем случае T_bT_a определено, если $a, b \in \Delta' = (-\infty, 1/2) \subset \Delta$. Для $T_cT_bT_a$ $c, b, a \in \Delta'' = (-\infty, 1/3) \subset \Delta'$ и т. д. Это говорит о том, что уравнение Ли (1.8) определяет не группу, а *локальную группу,* в том смысле, что в семействе $\{T_a\}$ преобразований (1.1) умножение T_bT_a возможно не при всех $a, b \in \Delta$, а только для a, b из подынтервала $\Delta' \subset \Delta$, содержащего $a = 0$. Причем Δ' можно выбрать так, что всякое преобразование $T_a, a \in \Delta'$, обладает обратным преобразованием $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$ с $a^{-1} \in \Delta'$. Этот же пример показывает, что основной интервал Δ может зависеть от преобразуемой точки z непрерывным образом.

Вернемся к вопросу о приведении группового закона к виду (1.5).

Теорема 1.2. *Всякая локальная однопараметрическая группа Ли локальных преобразований с групповым законом* (1.3) $T_bT_a = T_{\varphi(a,b)}$ *путем перепараметризации может быть сведена к группе с законом* (1.5)