

Батыршин И.З.
Недосекин А.О.
Стецко А.А.
Тарасов В.Б. и др.

Нечеткие гибридные системы. Теория и практика



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 510.63
ББК 32.813
Н 59



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 06-01-14087

Батыршин И. З., Недосекин А. О., Стецко А. А., Тарасов В. Б., Язенин А. В., Ярушкина Н. Г. **Нечеткие гибридные системы. Теория и практика** / Под ред. Н. Г. Ярушкиной. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-0786-0.

Книга посвящена современным подходам к математическому и компьютерному моделированию нечеткости. Рассмотрены операции нечеткой логики и их обобщения. Широко представлен контекст современной теории нечетких систем: синергетический искусственный интеллект, нечеткие нейронные и нечеткие эволюционные гибриды, возможностное программирование.

Наряду с теоретическими вопросами в книге описаны приложения теории нечетких гибридных систем к задачам портфельного, инвестиционного и рискового анализа, а также к задачам проектирования телекоммуникационных сетей.

Книга будет полезна исследователям, аспирантам, всем интересующимся проблемами нетрадиционных логик и искусственного интеллекта. Студенты, изучающие интеллектуальные информационные системы, смогут освоить новейшие интеллектуальные технологии.

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© И. З. Батыршин, А. О. Недосекин,
А. А. Стецко, В. Б. Тарасов,
А. В. Язенин, Н. Г. Ярушкина, 2007

ISBN 978-5-9221-0786-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Структурно-алгебраические и функционально-аксиоматические основы описания НЕ-факторов	10
§ 1.1. НЕ-факторы в информатике и искусственном интеллекте	10
1.1.1. Анализ и классификация НЕ-факторов (10). 1.1.2. Структурно-алгебраические основы описания НЕ-факторов: от предпорядоченных множеств к решеткам и бирешеткам (13).	
§ 1.2. Способы формализации НЕ-факторов на основе нечетких моделей и родственных формализмов.	16
1.2.1. Формализация неточности (16). 1.2.2. Формализация нечеткости (17). 1.2.3. Формализация противоречивости (20). 1.2.4. Формализация неопределенности (20). 1.2.5. Формализация НЕ-факторов на полярных шкалах (25).	
§ 1.3. Представление логико-лингвистических связей и модификаторов в теории нечетких множеств	29
1.3.1. Операции утверждения и формализация логико-лингвистических модификаторов (29). 1.3.2. Операции отрицания. Способы формирования отрицаний (30). 1.3.3. Операции отрицания в теории нечетких множеств (34). 1.3.4. Операции конъюнкции и дизъюнкции. Классические операции конъюнкции и дизъюнкции в нечеткой логике (36). 1.3.5. Операции импликации (41). 1.3.6. Операции осреднения. OWA-операции Ягера (43).	
Глава 2. Основные операции нечеткой логики и их обобщения. . .	45
§ 2.1. Операции Заде и алгебры Клини	45
2.1.1. Операции Заде (45). 2.1.2. Фокальные алгебры Клини (49). 2.1.3. Метрические алгебры Клини и меры нечеткости (51). 2.1.4. Система аксиом для операций Заде (53).	
§ 2.2. Операции отрицания	54
2.2.1. Операции отрицания на линейно упорядоченном множестве. Основные понятия (54). 2.2.2. Отрицания на $[0, 1]$ (60). 2.2.3. Сжимающие и разжимающие отрицания на $[0, 1]$ (63). 2.2.4. Биективные отрицания на $[0, 1]$ (66).	
§ 2.3. Операции конъюнкции и дизъюнкции	67
2.3.1. Предварительные замечания (67). 2.3.2. t -нормы и t -конормы (68). 2.3.3. Параметрические классы t -норм	

и t -конорм (73). 2.3.4. Обобщенные операции конъюнкции и дизъюнкции (75). 2.3.5. Примеры параметрических классов обобщенных конъюнкций (80). 2.3.6. Пример нечеткого моделирования с обобщенными параметрическими операциями (83). 2.3.7. G -конъюнкции и G -дизъюнкции (85).

Глава 3. Теоретические основы гибридных систем.	88
§ 3.1. Основные принципы системного подхода в информатике.	88
§ 3.2. Интегрированные, гибридные и синергетические системы в информатике	90
§ 3.3. Анализ вариантов построения гибридных интеллектуальных систем и систем вычислительного интеллекта	95
§ 3.4. Синергетический искусственный интеллект	98
§ 3.5. Нечеткие эволюционные и генетические гибриды	101
3.5.1. Нечеткие генетические алгоритмы (101).	
§ 3.6. Нечеткие нейронные сети и распределенные нечеткие системы	106
3.6.1. Моделирование нечетких логико-лингвистических систем на нейронных сетях (106). 3.6.2. Обобщенные модели логических и нечетких нейронов (107).	
Глава 4. Обобщение нечетких нейронных сетей. Варианты структуры	111
§ 4.1. Определение нечеткой нейронной сети	111
§ 4.2. Архитектуры гибридных систем (ГС).	112
4.2.1. NNFLC — нечеткий контроллер на основе НС (Neurons network fuzzy logic controller). Структура NNFLC. Обучение NNFLC (112). 4.2.2. ANFIS — адаптивная НС, основанная на системе нечеткого вывода (adaptive network based Fuzzy Inference System). Структура ANFIS и ее обучение (115). 4.2.3. NNDFR — НС для нечетких умозаключений (Neuron Network Driven Fuzzy Reasoning). Структура NNDFR. Обучение NNDFR (116). 4.2.4. GARIC — обобщенный приближенный вывод, основанный на интеллектуальном контроле (Generalized Approximate Reasoning based Intelligent Control). Структура и обучение GARIC (117). 4.2.5. Нечеткая сеть Fuzzy Net (FUN). Структура нечеткой сети Fuzzy Net (119).	
§ 4.3. Пример использования ГС.	120
§ 4.4. Алгоритмы обучения для нечеткой нейронной сети примера	123
§ 4.5. Нечеткие генетические гибриды. Нейронные сети с генетическим обучением.	124
4.5.1. Определение нечеткой системы с генетической настройкой (ГНС) (124). 4.5.2. ГА — средство настройки нечетких систем (124). 4.5.3. Нечеткое управление генетической системой (124).	
§ 4.6. Системы генетического проектирования нечетких нейронных сетей	127

Глава 5. Возможностное программирование, обобщение задач экономической информатики	129
§ 5.1. Нечеткие случайные величины и их распределения в возможно-вероятностном контексте.	129
§ 5.2. Представление нечетких случайных величин и расчет их числовых характеристик.	131
§ 5.3. Возможно-вероятностные модели оптимизации и принятия решений.	134
§ 5.4. Модели и методы портфельного анализа в нечеткой случайной среде.	135
5.4.1. Ожидаемая доходность и риск портфеля в условиях нечетких случайных данных (135). 5.4.2. Базовые модели портфельного анализа в возможно-вероятностном контексте (136).	
§ 5.5. Методы решения.	137
§ 5.6. Оценка риска инвестиций для решающих нечетких факторов инвестиционного проекта.	140
5.6.1. Оценка риска инвестиционного проекта (140). 5.6.2. Нечетко-множественная модель инвестиционного проекта (141). 5.6.3. Метод оценки риска неэффективности проекта (145). 5.6.4. Пример оценки риска инвестиций (149). 5.6.5. Простейший способ оценки риска инвестиций (151).	
Глава 6. Гибридные системы, обобщение некоторых задач информатики	155
§ 6.1. Способы представления неопределенности в базах данных, нечеткие базы данных, извлечение знаний.	155
6.1.1. Грубые множества З. Павлака (155). 6.1.2. Нечеткая реляционная алгебра (156).	
§ 6.2. Обобщение задачи моделирования трафика в телекоммуникационных сетях.	160
6.2.1. Представление трафика вычислительной сети с помощью нечеткой вероятностной величины (160). 6.2.2. Проектирование вычислительных сетей на основе байесовских сетей доверия (164). 6.2.3. Система моделирования роутинга телекоммуникационных сетей на основе нечетких гиперграфов (168).	
Заключение	178
Список литературы	181

Введение

Основные тенденции развития нечетких систем. Принципы синергетического интеллекта

Научное направление — «нечеткие системы» — относится к одному из направлений искусственного интеллекта, которое Д. А. Поспелов назвал нейробионическим. Это направление ставит перед собой цель воспроизвести искусственным образом те процессы, которые протекают в мозгу человека, и пытается создать технические средства для повторения биологических структур мозга. Оно резко отличается от программно-прагматического или информационного направлений, в которых основной целью работ считают создание наиболее удобных для разработчика и пользователя средств решения интеллектуальных задач.

Математические методы искусственного интеллекта (ИИ), используемые нейробионическим направлением, настолько сильно отличаются от методов, используемых программно-прагматическим направлением, что даже получили другое название — вычислительный интеллект. Сложно ответить на вопрос о роли «вычислительного интеллекта» в решении фундаментальных проблем. В 1972 г. известный американский математик Р. Е. Калман писал: «Наиболее серьезные возражения против выдвигаемой профессором Заде идеи «нечеткого» анализа систем заключаются в том, что недостаток методов системного анализа вовсе не является принципиальной проблемой в теории систем. Эта проблема должна решаться на основе развития существующих концепций и более глубокого изучения природы систем». В 1990 г. в книге известного специалиста по теории систем Дж. Клира говорится противоположное: «Одним из способов работы с очень сложными системами, возможно самым важным, является допущение неточности при описании данных...» Математический аппарат для этого подхода, разрабатываемый с середины 60-х годов, известен как «теория нечетких множеств».

С точки зрения фундаментальной проблемы искусственного интеллекта — проблемы моделирования как восприятия, так и мышления — «вычислительный интеллект», завершив почти сорокалетний этап развития своего математического аппарата, возвращается к коренной

проблеме искусственного интеллекта — к семантике знаков. Идеи Заде о нечеткой грануляции и вычислении на словах объединяют восприятие, как нечеткую гранулу, и логический вывод (распространение ограничений, мышление) в терминах естественного языка. Вероятно, самым существенным достижением «вычислительного интеллекта» является создание способа описания систем, сочетающего число и слово, сигнал и понятие, восприятие и абстракцию, непрерывное и дискретное. Именно такой способ описания нужен для сложных технических систем. Все вышесказанное позволяет надеяться, что у данного научного направления многое осталось впереди, поэтому вычислительный интеллект относится к несомненным перспективам развития искусственного интеллекта в XXI веке.

Сегодня все более и более очевидной становится ограниченность общенаучной парадигмы классического рационализма. Современный мир насыщен сложными самоорганизующимися системами, объединенными в неоднородные эволюционирующие сети, и уникальными динамическими объектами управления, которые не поддаются точному и полному описанию. Само существование подобных объектов неотделимо от управления неопределенностью. Одностороннее стремление к получению точных и непротиворечивых знаний, отбрасывание индивидуальных мнений и смутных идей не соответствует реалиям общества. Одним из первых это отметил Л. Заде, который писал: «С учетом нашего преклонения перед всем точным, строгим и количественным и нашего пренебрежения ко всему нечеткому, нестрогому и качественному неудивительным оказался приход эры цифровых компьютеров; однако до сих пор эти компьютеры оказались весьма эффективными лишь при работе с механистическими, т.е. неживыми, системами, поведение которых определяется законами механики, физики, химии, электромагнетизма. К сожалению, этого нельзя сказать о гуманистических системах, в которых центральное место занимают люди» [Заде, 1976]. Им было предложено следующее толкование текущей ситуации: «Неэффективность обычных компьютеров в работе с гуманистическими системами является выражением принципа несовместимости, согласно которому высокая точность несовместима с большой сложностью». В свою очередь, В.К. Финн обратил внимание на то, что во многих научных областях, особенно в гуманитарных науках, в основном фигурируют не понятия, а идеи, что означает наличие принципиальных ограничений на строгость рассуждений [Финн, 1999].

На наш взгляд, здесь большие перспективы открывает использование идей и принципов синергетики. Синергетика есть междисциплинарное научное направление, изучающее универсальные закономерности процессов самоорганизации, эволюции и кооперации. Ее цель состоит в построении общей теории сложных систем, обладающих особыми свойствами. В отличие от простых, сложные системы имеют следующие основные характеристики:

- 1) множество неоднородных компонентов;
- 2) активность (целенаправленность) компонентов;
- 3) множество различных, параллельно проявляющихся взаимосвязей между компонентами;
- 4) семиотическая природа взаимосвязей;
- 5) кооперативное поведение компонентов;
- 6) открытость;
- 7) распределенность;
- 8) динамичность, обучаемость, эволюционный потенциал;
- 9) неопределенность параметров среды.

Особое место в синергетике занимают вопросы спонтанного образования упорядоченных структур различной природы в процессах взаимодействия, когда исходные системы находятся в неустойчивых состояниях. Следуя И. Пригожину [Пригожин, 2002]. Синергетику можно кратко охарактеризовать как «комплекс наук о возникающих системах».

Согласно синергетическим моделям, эволюция системы сводится к последовательности неравновесных фазовых переходов. В работах И. Пригожина и Г. Хакена [Пригожин, 2002; Хакен, 1985] принцип развития формулируется как последовательное прохождение критических областей (точек бифуркаций). Вблизи точек бифуркации наблюдается резкое усиление флуктуации. Выбор, по которому пойдет развитие после бифуркации, определяется в момент неустойчивости. Поэтому зона бифуркации характеризуется принципиальной непредсказуемостью — неизвестно, станет ли дальнейшее развитие системы хаотическим или родится новая, более упорядоченная структура. Здесь резко возрастает роль неопределенности: случайность на входе в неравновесной ситуации может дать на выходе катастрофические последствия. В то же время сама возможность спонтанного возникновения порядка из хаоса — важнейший момент процесса самоорганизации в сложной системе.

Мягкие вычисления — это сложная компьютерная методология, основанная на нечеткой логике, генетических вычислениях, нейрокомпьютинге и вероятностных вычислениях. Составные части не конкурируют, но создают эффект взаимного усиления для достижения робастности, низкой цены решения, повышения эффективности приложений. Четыре составные части мягких вычислений включают в себя:

- нечеткую логику (приближенные вычисления, грануляция информации, вычисление на словах);
- нейрокомпьютинг (обучение, адаптация, классификация, системное моделирование и идентификация);
- генетические вычисления (синтез, настройка и оптимизация с помощью систематизированного случайного поиска и эволюции);
- вероятностные вычисления (управление неопределенностью, сети доверия, хаотические системы, предсказание).

Традиционные компьютерные вычисления (*hard computing*) «слишком точны» для реального мира. Имеется два класса проблем для мягких вычислений: во-первых, существуют проблемы, для решения которых полная информация не может быть получена, и, во-вторых, проблемы, определение которых недостаточно полно. Такие проблемы — норма для сложных технических систем, систем экономического планирования, систем жизни, социальных систем большой размерности и систем принятия решений человеком.

«По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные, содержащие смысл утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за которым точность и смысл становятся взаимоисключающими» — так сформулировал принцип неопределенности для человеческих рассуждений Л. Заде — основоположник теории нечетких систем и автор интегрирующего (зонтичного) термина. Термин «мягкие вычисления» был предложен им в 1994 г. на семинаре в Беркли (Калифорния).

Часто используется и другой интегрирующий термин — вычислительный интеллект. Очень многие работы, в основном западных исследователей, направлены на разработку гибридных систем. В настоящее время существуют в большинстве своем нейро-нечеткие системы. Однако мы начинаем видеть растущее число нечетко-генетических, нейро-генетических и нейро-нечетко-генетических систем.

Глава 1

СТРУКТУРНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ НЕ-ФАКТОРОВ

§ 1.1. НЕ-факторы в информатике и искусственном интеллекте

Термин НЕ-факторы был введен А.С. Нариньяни (см. [Нариньяни, 1998, 1999]) с целью единого представления различных ситуаций, в которых содержательно отрицается одно из свойств классических формальных систем — точность, определенность, однозначность, полнота, непротиворечивость и пр. Он же стал инициатором комплексного исследования различных НЕ-факторов. Кроме того, НЕ-факторы в искусственном интеллекте (ИИ) изучались в работах В.Н. Вагина [Вагин, 1998], Ю.Р. Валькмана [Валькман, 1997]; Д. Дюбуа и А. Прада [Дюбуа, Прад, 1990], В.Б. Тарасова [Тарасов, 2001] и др.

Однако еще раньше отдельные НЕ-факторы были рассмотрены в рамках проблем информатики, теории систем, теории управления, теории принятия решений и пр. Так, анализ феномена нечеткости впервые провел М. Блэк. Им введены «профили согласованности», которые можно рассматривать как прямые предшественники функций принадлежности. Затем Л. Заде сформулировал известный *принцип несовместимости* и предложил общий подход к моделированию *неточности* границ и *неопределенности* на основе нечетких множеств (функций распределения возможности) [Zadeh, 1965, 1978].

1.1.1. Анализ и классификация НЕ-факторов. В книге [Алексеев и др., 1997] дана классификация видов неопределенности в задачах управления. В ней различаются *неизвестность*, *неполнота* и *недостоверность* информации, причем выделяются ситуации физической (объективной, стохастической) и лингвистической (субъективной, нестохастической) недостоверности.

В работах В.Б. Тарасова были исследованы основные виды НЕ-факторов инженерных знаний на начальных этапах проектирования и разработаны варианты их формализации (см. [Тарасов, 1987]). В частности, были отмечены:

- а) *неполнота*, фрагментарность исходных данных и суждений, обусловленные недостаточным, неполным знанием характеристик новых материалов, особенностей технологических процессов, условий работы новых конструкций;
- б) *нечеткость* представлений о взаимосвязях между проектными параметрами, связанная с отсутствием аналитических зависимостей между ними или вычислительной сложностью;
- в) принципиальные *ограничения по точности* определения как количественных параметров, так и, в особенности, качественных факторов решения (для таких факторов, как качество, простота, ремонтпригодность инженерных конструкций естественные физические шкалы вообще отсутствуют; их учет всегда зависит от опыта и интуиции специалиста).

В свою очередь Д. Дюбуа и А. Прад также проводят основное разграничение между *неточностью* и *неопределенностью*. Неточность относится к содержанию имеющейся информации, а неопределенность — к ее истинности, понимаемой в смысле соответствия реальной действительности или правдивости эксперта [Дюбуа, Прад, 1990]. При этом ими развивается единый подход к моделированию этих двух видов НЕ-факторов на основе мер (квазимер) возможности и необходимости, а также интерпретации функции распределения возможности как нечеткого множества.

Сам А.С. Нариньяни указывает на существование четырех исходных типов НЕ-факторов: *неточность*, *недоопределенность*, *неоднозначность*, *нечеткость*. Здесь *неточное* значение есть величина, которая может быть получена с ограниченной точностью, не превышающей некий порог, определяемый природой соответствующего параметра.

Недоопределенное значение представляет собой оценку некоторого денотата, который является по своей природе более точным, чем позволяет установить доступная нам в данный момент времени информация.

Неоднозначность предполагает наличие распределения (возможности, вероятности, уверенности, правдоподобия и пр.)

Наконец, *нечеткое* (точнее, *лингвистическое*) значение приписывается лингвистическим переменным.

При оценивании объектов на полярных шкалах, т.е. в случае исходных суждений типа « X есть F^+ и X есть F^- », можно столкнуться со следующими НЕ-факторами [Тарасов, 2001].

Противоречивость: одновременное присутствие в оценке как положительного F^+ , так и отрицательного F^- свойств, которые обычно имеют различные степени выраженности, например wF^+ («слабо» F^+) и vF^- («сильно» F^-).

Неизвестность: отсутствие информации о проявлении свойств F^+ или F^- на данной шкале.

Неточность: приближенный, интервальный характер оценки свойства F^+ или F^- , например: $F^+ = [F_{\min}^+, F_{\max}^+]$.

Нечеткость: переход от простой, точечной или интервальной, к сложной, двумерной или многомерной, оценке, связанной с построением некоторого распределения (функции принадлежности), характеризующего вербальную, лингвистическую степень проявления F^+ или F^- .

Наряду с вышеперечисленными НЕ-факторами информации и знаний следует учитывать и *синергетические НЕ-факторы* (в том числе: *необратимость, нелинейность, неустойчивость, неравновесность, незамкнутость*) [Пригожин, 1989; Хакен, 1985]. Многие синергетические НЕ-факторы можно иначе назвать конструктивными НЕ-факторами развития.

Так, *необратимость* характеризует направленность эволюции (во времени). Она выступает как проявление всеобщей асимметрии природы, как процесс постоянного нарушения симметрии при развитии (по М. Планку, в природе невозможны процессы, при которых конечному состоянию отдается меньшее предпочтение, чем начальному). С необратимостью связан «энтропийный барьер», который определяет единственное направление времени и выступает как принцип отбора допустимых начальных условий в сложных системах.

Неравновесность определяет возникновение диссипативных структур, связанных с рассеиванием энергии. Как раз неравновесность и есть то, что порождает порядок из хаоса [Пригожин, Стенгерс, 2000]. Неравновесность в сложной системе — не источник ее распада, а наоборот, основание для становления упорядоченности, причина спонтанного структурогенеза.

В этой связи следует упомянуть о *принципе устойчивого неравновесия* Э.С. Бауэра, согласно которому живые (и только живые) системы никогда не бывают в равновесии, а исполняют за счет своей свободной энергии работу против равновесия. Живая система должна быть открытой и активной.

Неустойчивость означает несохранение близости состояний сложной системы в процессе ее эволюции. Неустойчивость является принципиальной особенностью изменяющихся систем, она выступает как необходимое условие их самоорганизации и развития. Системы, не обладающие неустойчивостью, не могут эволюционировать.

Наконец, *нелинейность* возникает в результате нарушения аддитивности в процессе развития сложной системы (принцип суперпозиции не работает).

Примеры. Среди известных психологических концепций, активно используемых в ИИ и опирающихся на идею неравновесности как источника развития, следует отметить *теорию когнитивного диссонанса* и *модель структурного баланса* (и, соответственно, дисбаланса) по Хайдеру. Суть теории диссонанса можно выразить в следующих

основных положениях: 1) могут существовать диссонансные отношения или отношения неравновесия, несоответствия между когнитивными (информационными) элементами; 2) возникновение диссонанса вызывает стремление к его уменьшению в интересах достижения консонанса, т.е. равновесия; 3) проявления подобного стремления состоят в изменении поведения, изменении отношения или в намеренном поиске новой информации и формировании новых мнений относительно породившего диссонанс суждения или объекта.

Здесь термины диссонанс и консонанс характеризуют особый тип отношений между парами (n -ками) элементов. Так, обычно считается, что два элемента, x и y , находятся между собой в диссонансном отношении, если $x \rightarrow \neg y$.

Теория структурного баланса расширяет концепцию когнитивного диссонанса, включая в себя качестве базиса не только когнитивные элементы, но и межличностные отношения.

1.1.2. Структурно-алгебраические основы описания НЕ-факторов: от предпорядоченных множеств к решеткам и бирешеткам.

Предпорядоченное множество. Предпорядоченным множеством называется такое множество X , на котором определено бинарное отношение предпорядка $\angle$, удовлетворяющее следующим условиям [Биркгоф, 1984]:

(I) рефлексивность: $x \angle x \quad \forall x \in X$

(II) транзитивность: если $x \angle y$ и $y \angle z$, то $x \angle z \quad \forall x, y, z \in X$.

Иными словами, предпорядоченное множество можно представить в виде пары $QO = \langle X, \angle \rangle$.

Частично упорядоченное множество. Множество X называется *частично упорядоченным*, если на нем определено бинарное отношение $x \leq y$, обладающее следующими свойствами:

(I) рефлексивность: $x \leq x \quad \forall x \in X$;

(II) транзитивность: если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z \quad \forall x, y, z \in X$;

(III) антисимметричность: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y \quad \forall x, y \in X$, $x \neq y$.

При рассмотрении частично упорядоченных множеств важную роль играет принцип двойственности, по которому отношение, обратное для отношения порядка, само является упорядоченностью. Соответственно, если Φ — утверждение о частично упорядоченных множествах, то, заменяя в нем $\leq$ на $\geq$, получаем утверждение, двойственное исходному Φ .

Цепь. Частично упорядоченное множество, удовлетворяющее, к тому же, условию

(IV) полнота (линейность): $x \leq y$ или $y \leq x \quad \forall x, y \in X$,

называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью* K [Биркгоф, 1984].

Решетка. Решеткой L называется частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань (пересечение) $\inf(x, y) = x \wedge y$ и точную верхнюю грань (объединение) $\sup(x, y) = x \vee y$.

Любую решетку можно представить как алгебру

$$L = \langle X, \wedge, \vee \rangle,$$

для которой выполняются следующие законы: $\forall x, y, z \in L$

а) идемпотентность:

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$$

б) коммутативность:

$$x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$$

в) ассоциативность:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$

г) поглощение:

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x.$$

Иными словами, решетки составляют примитивный класс универсальных алгебр с двумя бинарными операциями.

Решетка называется дистрибутивной, если в ней наряду с условиями (а–г) выполняются также условия дистрибутивности: $\forall x, y, z \in L$

д) дистрибутивность:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Решетка является ограниченной, если в ней выполняются требования ограниченности,

е) ограниченность:

$$(x \wedge 0) = 0, \quad (x \vee 0) = x, \quad (x \wedge 1) = x, \quad (x \vee 1) = 1.$$

Ограниченные решетки называются алгебрами.

В ограниченной решетке L элемент y называется дополнением x , если $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$.

Решетка L называется решеткой с дополнениями, если все ее элементы имеют дополнения.

Дистрибутивная решетка с дополнениями, удовлетворяющими требованию

ж) инволютивность:

$$(x')' = x \quad \forall x \in L,$$

называется решеткой Де Моргана, если для нее выполняются

з) законы де Моргана:

$$(x \wedge y)' = x' \vee y', \quad (x \vee y)' = x' \wedge y' \quad \forall x, y \in L.$$

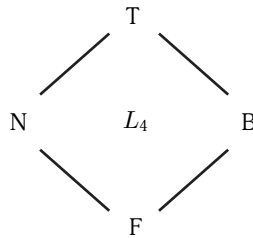


Рис. 1.1. Решетка L_4 : иллюстрация неклассической четырехзначной семантики

Наконец, решетка де Моргана, для которой выполняется

и) условие нормальности Клини:

$$x \wedge x' \leq y \vee y',$$

называется решеткой Клини.

Теория решеток активно используется при построении многозначных и нечетких логик. Например, Н. Белнап предложил строить логическую семантику на основе четырех базовых значений истинности (истина Т — противоречие В — неопределенность N — ложь F), образующих решетку, которую он назвал логической решеткой L_4 (на рис. 1.1 она представлена в виде диаграммы Хассе) [Белнап, Стил, 1981]. Эта решетка является логической, поскольку задаваемые на ней операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ представляют собой логические операции конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Например,

$$\begin{aligned} T \wedge F &= F, & N \wedge T &= N, & N \vee B &= T, \\ \neg T &= F, & \neg F &= T, & \neg N &= N, & \neg B &= B. \end{aligned}$$

Произведение решеток. Пусть L и K суть решетки. Построим множество $L \times K$ упорядоченных пар (x, y) , где $x \in L$, $y \in K$. Следуя Г. Биркгофу, будем определять точную нижнюю грань $\wedge$ и точную верхнюю грань $\vee$ по координатам: $(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$, $(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$.

В результате $L \times K$ будет новой решеткой, называемой *прямым произведением* решеток L и K . Здесь важным частным случаем (при $L = K$) являются степени решеток $ML = L^m$ и, в частности, квадратные степени решеток L^2 .

Другим важным случаем решеточных структур являются *бирешетки*. В общем случае биупорядоченным множеством называется структура вида $BX = \langle X, \leq_1, \leq_2 \rangle$, где $\langle X, \leq_1 \rangle$ и $\langle X, \leq_2 \rangle$ — два различных упорядоченных множества. Биупорядоченное множество становится предбирешеткой, если упорядоченные множества $\langle X, \leq_1 \rangle$ и $\langle X, \leq_2 \rangle$ образуют полные решетки.

Конечно, для многих приложений эти отношения порядка должны быть как-то связаны между собой. Эту связь разные авторы

определяют по-разному. Так, М. Гинсберг делает это с помощью специальной унарной операции m , такой что: i) если $x \leq_1 y$, то $m(x) \geq_1 m(y)$; ii) если $x \leq_2 y$, то $m(x) \leq_2 m(y)$. Здесь унарный оператор m (называемый Гинсбергом отрицанием) на самом деле представляет собой гибрид утверждения и отрицания, т.е. может быть назван «полутверждение–полутрицание».

Тогда бирешетка определяется четверкой $BL = \langle X, \leq_1, \leq_2, m \rangle$.

Очевидно, что бирешетка может рассматриваться как алгебра с двумя различными операциями пересечения и объединения соответственно: $BL = (X, \wedge_1, \vee_1, \wedge_2, \vee_2)$. Бирешетка называется сплетенной (*interlaced*), если каждая из четырех операций $\wedge_1, \vee_1, \wedge_2, \vee_2$ является монотонной по отношению к $\leq_1$ и $\leq_2$.

Все конечные бирешетки могут быть представлены в виде специальной разновидности диаграмм Хассе, где по вертикали (снизу-вверх) отображается один порядок, а по горизонтали (слева-направо) — другой порядок.

§ 1.2. Способы формализации НЕ-факторов на основе нечетких моделей и родственных формализмов

1.2.1. Формализация неточности. Основными средствами формализации неточности являются интервальный анализ, приближенные множества (*rough sets*) З. Павлака [Pavlak, 1984] и недоопределенные множества А. С. Нариньяни [Нариньяни, 1980].

Интервальный анализ. Приближенные множества. Пусть X — множество, а $R \subseteq X \times X$ — отношение неразличимости (эквивалентности). Пара $\wp = \langle X, R \rangle$ образует пространство приближений. Классы эквивалентности по отношению R называются элементарными множествами в $\wp$, а любая совокупность элементарных множеств образует составное множество в $\wp$.

Произвольное подмножество $X \subseteq U$ (U — универсум) можно точно определить на основе имеющейся информации, т.е. классов эквивалентности. В рамках данного подхода каждое множество заменяется двумя множествами, которые называются нижним приближением,

$$\underline{R}X = \{x \mid |x|_R \subseteq X\}$$

(наибольшее составное множество в M , содержащееся в X), и верхним приближением,

$$\overline{R}X = \{x \mid |x|_R \cap X\}$$

(наименьшее составное множество, содержащее X), соответственно.

Иными словами, нижнее приближение есть множество всех объектов, которые определено (с необходимостью) принадлежат X , а верхнее приближение — множество всех объектов, которые, возможно принадлежат X .

Приближенное (аппроксимируемое) множество расположено между этими двумя приближениями:

$$\underline{R}X \subseteq X \subseteq \overline{R}X.$$

Для каждой пары приближений указываются три различные области универсума U :

$\text{POS}_R(X) = \underline{R}X$ (т.е. R есть положительная область X , в которой все объекты определенно принадлежат множеству X);

$\text{NEG}_R(X) = U \setminus \overline{R}X$ (R — отрицательная область X , в которой все объекты определенно принадлежат дополнению X' к множеству X);

$\text{BND}_R(X) = \overline{R}X \setminus \underline{R}X$ (R — пограничная область X , где содержатся все объекты, которые не могут бы с определенностью отнесены ни к X , ни к его дополнению X').

Таким образом, теория приближенных множеств обеспечивает формальные средства для работы с неточной информацией в терминах трехзначной логики.

В рамках модели приближенных множеств пограничная область позволяет моделировать неточность, а повышение точности означает уменьшение пограничной области. Очевидно, что у обычных множеств нет пограничной области.

Недоопределенные множества. Недоопределенным множеством [Нариньяни, 1980, 1986] называется четверка

$$\text{UndSS} = \langle X^+, X^-, \overline{P}, \underline{P} \rangle,$$

где

$$X^+ = \{x | x \in X\}, \quad X^- = \{x | x \notin X\},$$

$\overline{P}$ — верхняя оценка мощности множества X , $\underline{P}$ — нижняя оценка мощности множества X , $\underline{P} \leq P \leq \overline{P}$.

Пусть неточные оценки не представляют собой подмножества A некоторой решетки L , т.е. $A \subset L$. Тогда класс мер неточности можно определить в виде функционалов $I : 2^L \rightarrow R^+$, таких что: i) $I(A) = 0$ тогда и только тогда, когда подмножество A является одноточечным, т.е. $A = \{x\}$; ii) $A \subseteq B \Rightarrow I(A) \leq I(B) \quad \forall A, B \in 2^L$.

Следует отметить, что и приближенные, и недоопределенные множества представляют собой частные случаи нечетких множеств

1.2.2. Формализация нечеткости. Основные пути моделирования нечеткости можно систематизировать с помощью следующих критериев [Аверкин и др., 1986]:

- а) общий подход к представлению нечеткости (нечеткие множества, описываемые функциями принадлежности семейства обычных множеств, вероятностные множества, двухосновные нечеткие множества и т.п.);

- б) область определения функции принадлежности (стандартные нечеткие множества, нечеткие множества уровня, нечеткие числа и пр.);
- в) область значений функции принадлежности (по этому критерию выделяются $[0, 1]$ -нечеткие множества, $[-1, +1]$ -нечеткие множества, L -нечеткие множества, интервальнозначные нечеткие множества, нечеткие множества с нечеткозначной функцией принадлежности и пр.);
- г) тип соответствия между областью определения и областью значений функции принадлежности (взаимнооднозначное, не взаимнооднозначное и пр.).

Нечеткое множество, по Л. Заде, есть совокупность упорядоченных пар, составленных из элемента и его значения принадлежности:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \quad \mu_A(x) \in [0, 1],$$

или, что то же самое, функция

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

Стандартная нечеткая логика Л. Заде представляет собой прямое обобщение классической двузначной логики. Таким образом, она опирается на весьма сильные допущения о природе принадлежности. Главными из них являются: а) допущение о полноте; б) допущение о различимости принадлежности. Согласно допущению о полноте любой элемент либо принадлежит, либо не принадлежит множеству: третье исключено. Допущение о различимости означает, что любые два элемента множества различимы на шкале принадлежности.

Следовательно, для базовой логики принадлежности удовлетворяются два основных принципа классической логической семантики: 1) *принцип бивалентности*: $\in \vee \notin$ (каждый элемент множества характеризуется либо принадлежностью, либо непринадлежностью этому множеству, т. е. *разрывы (провалы) принадлежности* типа $\mid \in \wedge \mid \notin = \mid (\in \vee \notin)$ недопустимы); 2) *принцип однозначности*: только одноточенные множества $\in = \{\in\}$, $\notin = \{\notin\}$ пригодны для оценки принадлежности; любые составные значения $\{\in, \notin\}$, выражающие одновременно принадлежность и непринадлежность, запрещены, что можно записать в форме $\mid (\in, \notin)$. Еще более сильным является *условие непротиворечивости* $\mid (\in \wedge \notin)$, понимаемое как запрет *пресыщенных оценок* принадлежности.

Таким образом, в стандартной теории нечетких множеств понятия принадлежности и непринадлежности тесно связаны, в частности, справедлив принцип их взаимной компенсации: при возрастании степени принадлежности убывает степень непринадлежности, и наоборот. Чаще всего их связь выражается классическим оператором отрицания $\notin = \mid \in$, что дает возможность ограничиться только рассмотрением принадлежности элемента множеству.

Большинство известных расширений нечетких множеств, например предложенные в 1967 г. Дж. Гогеном L -нечеткие множества [Goguen, 1967],

$$A : X \rightarrow L,$$

принимающие значения в некоторой решетке L , опираются на те же принципы бивалентности и однозначности, что и выше.

Нетрудно понять, что для многих реальных ситуаций, особенно ситуаций, характеризующихся взаимодействием различных НЕ-факторов, необходимо выбирать другие базовые семантики принадлежности. Например, если требуется расширить частичную или паранепротиворечивую логику, то за основу надо взять трехзначную семантику, а при фазсификации минимальных гибридных логик (учитывающих НЕ-факторы по крайней мере двух типов) следует опираться на исходную четырехзначную семантику Данна – Белнапа.

Для расширения областей значений функций принадлежности могут использоваться произведения решеток. Так, еще в 1974 г. А. де Люка и С. Термини [De Luka, Termini, 1974] ввели $[0, 1]^m$ -нечеткие множества с целью описания профилей объектов (или понятий), когда семейство нечетких множеств $\{A\}_m$ соответствует m свойствам объекта, а каждый элемент $x \in X$ характеризуется вектором значений принадлежности $(\mu_1(x), \dots, (\mu_m(x))$. Затем Л. Кочи ввел понятие векторнозначного нечеткого множества как отображения $\mu : X \rightarrow F_1 \times F_m$, где $F_i, i = 1, \dots, m$, — ограниченные линейно упорядоченные множества [Аверкин и др., 1986]. Очень интересным обобщением L -нечеткого множества является предложенное А. Кофманом гетерогенное нечеткое множество [Аверкин и др., 1986], где различные элементы множества X принимают свои значения из различных решеток.

Среди альтернативных (нестандартных и гибридных) подходов к формализации нечеткости следует упомянуть ряд моделей двухосновных нечетких множеств. Так, в середине 80-х годов К. Атанасов ввел так называемые *интуиционистские нечеткие множества*, описываемые парой функций: принадлежности μ и непринадлежности ν , соответственно:

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x))\}.$$

Свой отказ от принципа однозначности он обосновал исходя из важной идеи интуиционизма об относительной независимости утверждения и отрицания. Аналогичным образом П. Рен [Ren, 1990] предложил обобщенные нечеткие множества для работы с неполной информацией. В свою очередь Д. Дюбуа и А. Прад также ввели двухосновные нечеткие множества, где элементы пары функций принадлежности выражали соответственно степени возможности и необходимости принадлежности элемента плохо определенному четкому множеству. Отметим, что приближенное множество может трактоваться как частный случай двухосновного нечеткого множества Дюбуа и Прада.

Еще одна разновидность двухосновных нечетких множеств получается в результате обобщения процедуры экспертного оценивания на полярных шкалах [Тарасов, 2001] (см. п. 1.2.5).

На наш взгляд, перспективы разработки общей теоретической модели для построения нестандартных и гибридных нечетких логик тесно связаны с аппаратом *бирешеток* (*bilattices*).

1.2.3. Формализация противоречивости. Пусть обобщенная экспертная оценка на полярной шкале есть пара {утверждение, отрицание}, т.е. $GEE = (m(p), n(p))$, где m — некоторая операция утверждения, а n — операция отрицания. Далее для упрощения возьмем в качестве типичного оператора утверждения тождественное преобразование $m(x) = x$ и будем рассматривать пару $(x, n(x))$.

Тогда класс *показателей противоречивости* задается с помощью выражения $x \wedge n(x)$, где $\wedge$ есть стандартная операция конъюнкции, соответствующая лингвистической связке «И».

Введем отношение предпорядка, индуцируемое оператором отрицания n (т.е. рефлексивное и транзитивное отношение), $\leq_n$ на X : $x \leq_n y \Leftrightarrow x \wedge n(x) \leq y \wedge n(y)$, и будем рассматривать предупорядоченное множество X_n .

Так, в случае полярной шкалы оценка x является более противоречивой, чем оценка y , если x и $n(x)$ лежат между y и $n(y)$. Очевидно, что в случае интервала $L = [-1, +1]$ максимально противоречивой оценке отвечает условие $x = n(x) = 0$, а совершенно непротиворечивой оценкой будет оценка, соответствующая краям шкалы: $x = +1 \Rightarrow n(x) = -1$, и наоборот, $x = -1 \Rightarrow n(x) = +1$.

1.2.4. Формализация неопределенности. Пусть A — некоторое событие, а X — полное множество событий. Наиболее известным примером меры неопределенности u служит классическая вероятностная мера P . По А. Н. Колмогорову, она выражается аксиоматически в виде функции множества

$$P : 2^X \rightarrow [0, 1],$$

удовлетворяющей следующим условиям:

- а) $P(\emptyset) = 0, P(X) = 1$ (ограниченность);
- б) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \quad \forall A, B \in 2^X$ (монотонность);
- в) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B \in 2^X$ (аддитивность).

В общем случае берется σ -алгебра множеств в X , $\sigma \subseteq 2^X$, и аксиома аддитивности записывается в форме

$$\cap A_i = \emptyset \Rightarrow P(\cup A_i) = \sum P(A_i) \quad \forall A_i \in \sigma.$$

С вероятностной мерой связана статистика средних значений.