

В.Н. Скопинский

Напряжения в пересекающихся оболочках



Скопинский В.Н.

Напряжения в пересекающихся оболочках



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.3
ББК 22.251
С 44



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 08-01-07085*

Скопинский В. Н. **Напряжения в пересекающихся оболочках.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 400 с. — ISBN 978-5-9221-0981-9.

Книга посвящена проблеме исследования напряженного состояния в пересекающихся оболочках, которые представляют специальный класс оболочечных конструкций. Представлена единая классификация соединений пересекающихся оболочек. Приведен краткий исторический обзор публикаций по данной проблеме, дан анализ методов исследования пересекающихся оболочек.

Рассмотрена геометрия пересекающихся оболочек вращения при использовании систем криволинейных координат на срединной поверхности оболочек. Приведены геометрические соотношения для линии пересечения оболочек и матрица преобразования координат для различных соединений, в которых основной являются цилиндрическая, коническая, сферическая или эллипсоидальная оболочки, а патрубком — цилиндрическая оболочка.

Рассмотрено применение метода конечных элементов в модифицированной смешанной вариационной формулировке, на основе которой разработаны различные смешанные модели конечных элементов.

Дается описание разработанной специализированной проблемно-ориентированной вычислительной программы SAIS для расчетного анализа соединений пересекающихся оболочек. Приведены многочисленные примеры сопоставления расчетных и экспериментальных результатов для моделей различных соединений, а также результаты сравнительного анализа трехмерного и двухмерного конечно-элементных решений для соединений цилиндрических оболочек.

Приведены результаты анализа напряженного состояния и концентрации напряжений в типовых соединениях пересекающихся цилиндрических оболочек, соединениях конической, сферической и эллипсоидальной оболочек с цилиндрическим патрубком при различных видах нагружения. Представлены результаты параметрического анализа.

Рассмотрены соединения пересекающихся оболочек с локальным укреплением: монолитным, кольцевой накладкой, пропущенным патрубком, а также соединения с переходной секцией в виде торовой отбортовки или вставки.

Для научных и инженерно-технических сотрудников проектно-конструкторских организаций, научно-исследовательских институтов, машиностроительных предприятий, а также для аспирантов и магистров, занимающихся вопросами применения метода конечных элементов и расчета оболочек.

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

ISBN 978-5-9221-0981-9

© В. Н. Скопинский, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список основных обозначений	7
Введение	9
Глава 1. Методы исследования пересекающихся оболочек	11
1.1. Классификация типовых соединений пересекающихся оболочек	11
1.2. Состояние проблемы	13
1.3. Анализ методов исследования пересекающихся оболочек	29
Глава 2. Моделирование геометрии пересекающихся оболочек	32
2.1. Геометрические соотношения для линии пересечения поверхностей оболочек вращения	32
2.2. Расчетные соотношения для пересекающихся оболочек различной геометрической формы	35
2.2.1. Пересечение конической и цилиндрической оболочек	35
2.2.2. Пересечение цилиндрических оболочек	38
2.2.3. Пересечение эллипсоидальной и цилиндрической оболочек	41
2.2.4. Пересечение сферической и цилиндрической оболочек	47
2.3. Расчетные соотношения для соединений оболочек с переходной секцией	48
Глава 3. Применение метода конечных элементов в модифицированной смешанной вариационной формулировке для расчета оболочек	54
3.1. Применение вариационных принципов в МКЭ	54
3.2. Модифицированная смешанная вариационная формулировка	57
3.3. Особенности аппроксимации переменных для смешанных моделей элементов	62
3.4. Смешанные модели элементов	64

3.4.1. Трехмерный элемент	65
3.4.2. Четырехугольные конечные элементы оболочки . . .	67
3.4.3. Стержневой конечный элемент	77
3.5. Численный анализ применимости моделей элементов к рас- чету оболочек	80
3.5.1. Оболочки нулевой кривизны	83
3.5.2. Оболочки положительной кривизны	90
3.5.3. Торидальная оболочка	92
3.5.4. Тестовые расчеты для трехмерного и стержневого элементов	94
Глава 4. Проблемно-ориентированная методика расчетного анализа напряженного состояния пересекающихся обо- лочек	97
4.1. Основные положения прикладной методики. Расчетный ал- горитм	97
4.2. Специализированная вычислительная программа расчетного анализа пересекающихся оболочек.	101
4.2.1. Назначение и возможности вычислительной про- граммы	101
4.2.2. Структура вычислительной программы	103
4.3. Результаты верификации вычислительной программы	107
4.4. Обоснование применимости двухмерного моделирования для расчета пересекающихся оболочек	139
Глава 5. Напряжения в радиальных соединениях цилин- дрических оболочек	157
5.1. Особенности напряженного состояния оболочек при дей- ствии внутреннего давления	158
5.2. Влияние основных геометрических параметров	168
5.3. Влияние сварного шва	184
5.4. Действие контурных нагрузок	187
5.4.1. Напряженное состояние оболочек	189
5.4.2. Влияние геометрических параметров	201
5.5. Температурные напряжения в оболочках	211
5.6. Напряжения в радиальных соединениях при комбинирован- ном нагружении	220
5.6.1. Термосиловое нагружение	220
5.6.2. Совместное действие внутреннего давления и кон- турных нагрузок	227
5.7. Крестообразные соединения. Взаимное влияние патрубков. .	230

Глава 6. Напряжения в нерадиальных и тангенциальных соединениях пересекающихся цилиндрических оболочек	236
6.1. Нерадиальные соединения при действии внутреннего давления	236
6.1.1. Особенности напряженного состояния оболочек	236
6.1.2. Влияние геометрических параметров	242
6.2. Тангенциальные соединения при действии внутреннего давления	249
6.2.1. Анализ напряженного состояния оболочек	249
6.2.2. Влияние геометрических параметров	254
6.3. Нерадиальные и тангенциальные соединения при действии внешних сил и моментов	259
6.4. Коленные соединения	268
6.4.1. Действие внутреннего давления	269
6.4.2. Действие изгибающего момента	272
Глава 7. Напряжения в соединениях конической, сферической и эллипсоидальной оболочек, пересекающихся с цилиндрической оболочкой	275
7.1. Соединения пересекающихся конической и цилиндрической оболочек	275
7.1.1. Напряженное состояние оболочек при действии внутреннего давления	276
7.1.2. Влияние геометрических параметров	282
7.2. Соединения пересекающихся сферической и цилиндрической оболочек	287
7.2.1. Анализ напряженного состояния оболочек при нагружении внутренним давлением	288
7.2.2. Влияние геометрических параметров на напряжения в оболочках при нагружении внутренним давлением	294
7.2.3. Действие контурных нагрузок	304
7.3. Соединения пересекающихся эллипсоидальной и цилиндрической оболочек	310
7.3.1. Особенности напряженного состояния оболочек при действии внутреннего давления	310
7.3.2. Влияние геометрических параметров	316
Глава 8. Напряжения в соединениях пересекающихся оболочек с локальным укреплением	327
8.1. Конструктивные способы локального укрепления	327
8.2. Соединения пересекающихся оболочек с монолитным укреплением	330

8.2.1. Радиальные соединения цилиндрических оболочек	331
8.2.2. Сферическая и эллипсоидальная оболочки с радиальным патрубком	339
8.3. Соединения пересекающихся оболочек, укрепленные кольцевой накладкой	347
8.3.1. Радиальные соединения цилиндрических оболочек	348
8.3.2. Сферическая и эллипсоидальная оболочки с радиальным патрубком	356
8.4. Соединения пересекающихся оболочек с пропущенным патрубком	360
8.5. Соединения пересекающихся оболочек с торовой переходной секцией	367
8.5.1. Соединения цилиндрических оболочек	368
8.5.2. Соединения сферической и эллипсоидальной оболочек	374
Список литературы	382

Список основных обозначений

1. Параметры оболочки

r	— радиус цилиндрической оболочки (патрубка);
α_k, R	— угол конусности и радиус параллельного сечения (в поперечной плоскости) конической оболочки;
R	— радиус цилиндрической или сферической оболочки;
a, b	— полуоси эллипсоида;
r_T	— радиус меридионального сечения круговой тороидальной оболочки;
u, v, w	— меридиональное, окружное и нормальное линейные перемещения точки срединной поверхности оболочки;
θ_1, θ_2	— углы поворота сечения (нормали) к поверхности отсчета соответственно в плоскостях $s = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$;
$\varepsilon_s, \varepsilon_\varphi$	— линейные деформации;
$\gamma_{s\varphi}$	— тангенциальный сдвиг;
$\varkappa_s, \varkappa_\varphi, \chi$	— параметры изменения кривизны и кручения;
σ_s, σ_φ	— меридиональные и окружные нормальные напряжения;
$\tau_{s\varphi}$	— касательные напряжения в тангенциальной плоскости;
$\sigma_{\text{экв}}$	— эквивалентные напряжения;
E, μ, α_T	— модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала оболочки;
T^+, T^-	— изменение температуры наружной и внутренней поверхностей оболочки

2. Параметры соединения пересекающихся оболочек

\mathbf{n}_0	— нормаль к срединной поверхности основной оболочки в точке ее пересечения осью патрубка;
α	— угол отклонения оси патрубка от нормали \mathbf{n}_0 в главной плоскости соединения;
β	— угол отклонения оси патрубка от нормали \mathbf{n}_0 в поперечной плоскости соединения;
r/R	— отношение характерных поперечных размеров срединных поверхностей патрубка и основной оболочки;
$(r/R_0, r/a)$	— параметр тонкостенности цилиндрической или сферической оболочек;
R/H	— параметр тонкостенности цилиндрической или сферической оболочек;
r/h	— параметр тонкостенности патрубка;
h/H	— отношение толщин патрубка и основной оболочки;
b/a	— параметр эллипсоидальности основной оболочки;
x_0, z_0	— координаты точки O' на эллипсоиде в основной системе координат;
$\bar{x}_0 = x_0/a$	— относительное смещение патрубка от центрального положения;
h_m, l_m	— толщина и длина монолитного укрепления патрубка;
H_m, L_m	— толщина и длина монолитного укрепления основной оболочки;
H_n, L_n	— толщина и ширина кольцевой накладки;

h_i, l_i	— толщина и длина пропущенной части патрубка;
r_T, H_T	— средний радиус и толщина торовой секции;
$s(\theta), \varphi, z$	— линейная (угловая) меридиональная, окружная и нормальная криволинейные координаты на срединной поверхности основной оболочки;
$s'(\xi'), \varphi', z'$	— линейная (относительная) меридиональная, окружная и нормальная криволинейные координаты на срединной поверхности патрубка;
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	— базисные векторы, связанные с координатами s, φ, z ;
$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$	— базисные векторы, связанные с координатами s', φ', z' ;
λ	— матрица преобразования базисов систем криволинейных координат на линии пересечения срединных поверхностей оболочек;
σ_e	— максимальные эквивалентные напряжения в оболочке (на основе критерия наибольших касательных напряжений);
σ_m	— максимальные местные мембранные напряжения;
σ_0	— номинальное напряжение соединения;
$\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_0$	— относительное напряжение;
$K_\sigma = \sigma_e / \sigma_0$	— коэффициент концентрации (интенсификации) напряжений в основной оболочке;
$K'_\sigma = \sigma'_e / \sigma'_0$	— коэффициент концентрации (интенсификации) напряжений в патрубке;
σ_0, σ'_0	— номинальные напряжения в основной оболочке и патрубке;
p	— внутреннее давление;
$P_{xn}, M_{xn},$ M_{yn}, M_{zn}	— осевая сила, крутящий и изгибающие моменты, приложенные в торцевом сечении патрубка;
$P_x, M_x,$ M_y, M_z	— осевая сила, крутящий и изгибающие моменты, приложенные в торцевых сечениях основной (цилиндрической) оболочки.

3. Параметры конечно-элементной модели

\mathbf{f}	— вектор перемещений;
$\boldsymbol{\sigma}$	— вектор напряжений;
$\boldsymbol{\epsilon}$	— вектор деформаций, выраженных через перемещения;
$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$	— вектор независимой аппроксимации деформаций;
$\boldsymbol{\epsilon}_1$	— часть вектора деформаций, выраженных через аппроксимацию перемещений;
$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_2$	— часть вектора деформаций с независимой аппроксимацией;
$\boldsymbol{\epsilon}_0$	— вектор температурных деформаций;
\mathbf{D}	— матрица упругости;
\mathbf{B}	— матрица дифференциальных операторов в соотношениях, связывающих деформации и перемещения;
Φ	— матрица функций перемещений элемента;
\mathbf{a}	— вектор независимых параметров в аппроксимации деформаций;
\mathbf{P}	— матрица аппроксимации деформаций;
\mathbf{K}	— матрица жесткости;
\mathbf{F}	— вектор узловой нагрузки;
δ	— вектор узловых перемещений;
(ξ, η)	— локальная (нормализованная) система координат элемента оболочки;

Введение

Анализ пересекающихся оболочек является актуальной, но малоизученной проблемой механики оболочек, для решения которой необходимы системные исследования. Эта проблема имеет и важное прикладное значение, так как конструктивные объекты в виде пересекающихся оболочек широко распространены в различных технических областях (конструктивные соединения трубопроводов, сосуды давления и аппараты с патрубками и штуцерами и др.).

Исследование пересекающихся оболочек наиболее интенсивно проводится лишь в последние 35–40 лет, причем основные результаты получены в области линейного анализа (известны лишь единичные работы в области нелинейного анализа). Как правило, исследования ограничены решением частных прикладных задач, проведением параметрического анализа для соединений оболочек определенной геометрической формы, но отсутствует системный подход к данной проблеме. Полученные результаты при решении различного рода прикладных задач отражены в статьях, научно-технических отчетах, диссертациях. Опубликовано свыше 400 научных работ различного плана, но нет монографии, посвященной данной проблеме.

Развитие исследований пересекающихся оболочек, в первую очередь, стимулируется практической необходимостью, широким использованием таких конструктивных объектов в технике, особенно, в машиностроении. В тоже время, возможности широкого исследования обусловлены научным подходом к этой проблеме механики, степенью разработки и применения современных расчетных методов с использованием адекватных математических моделей, совершенствованием экспериментальной техники.

Конструктивные объекты при эксплуатации могут находиться в разнообразных условиях: при действии постоянного или переменного давления, повышенных температурах (например, в нефтеперерабатывающих комплексах) или низких температурах (в криогенной технике), испытывать дополнительные воздействия от смежных конструктивных узлов. Поэтому они, как правило, наиболее напряженные в оборудовании и относятся к наиболее ответственным в прочностном отношении конструктивным элементам. При различных видах нагружения в зоне соединения (пересечения) оболочек возникает сложное напряженное состояние, характеризующееся значительным уровнем концентрации напряжений, что может быть источником появления и развития пластических деформаций, усталостных трещин. Концентрация напряжений на границе области пересечения оболочек нередко бывает высокой, особенно для тонкостенных оболочек. Такие факторы как сложность геометрии и значительная концентрация напряжений

делают проведение широких исследований (как теоретических, так и экспериментальных) конструктивных объектов типа пересекающихся оболочек весьма сложными, трудоемкими и дорогостоящими.

Вследствие этого проблеме пересекающихся оболочек в научно-технической сфере уделяют самое серьезное внимание, проводя специальные экспериментальные и теоретические исследования. В ряде стран есть ведущие технические фирмы, имеющие специальные отделы по этой проблеме. В России до середины 90-х годов прошлого века головной организацией являлся отраслевой институт ЛЕННИИХИММАШ. Наиболее известные в мире — Американское общество инженеров-механиков (ASME) и Британский институт стандартов (BSI). В частности, в ASME есть специальный комитет «Shell Intersections» («Пересечения оболочек»), координирующий и выполняющий различные научные разработки по данной проблеме. В рамках этого комитета создаются научные рабочие группы, в том числе и международные, для выполнения определенных научно-технических проектов в этой области. Технические задачи стимулируют научные исследования таких конструктивных объектов.

Существуют специальные нормы и стандарты, регламентирующие проектирование конструктивных узлов типа пересекающихся оболочек в различных технических отраслях. Наиболее разработанными являются американские нормы ASME Code [158, 159] и английские стандарты BS 5500 [164] и BS 806 [165]. Среди российских нормативных материалов следует отметить отраслевой стандарт [27] для химического машиностроения и смежных отраслей и нормы [70] для оборудования атомного энергомашиностроения. На их основе разрабатываются и другие отраслевые нормативные материалы, например [74], некоторые положения используются в справочной литературе [84, 121]. В этих документах содержатся правила и рекомендации выбора основных геометрических параметров и другие нормативные сведения. Однако нормативная документация не может отразить все практические аспекты, касающиеся конструкций рассматриваемого типа, особенно с учетом широкого диапазона изменения геометрических параметров, применения оболочек различной геометрической формы и т. д.

Поэтому системное и комплексное исследование в области механики пересекающихся оболочек является актуальной научно-исследовательской проблемой, имеющей важное как теоретическое, так и практическое значение.

В настоящей монографии отражено современное состояние проблемы, представлена наиболее общая классификация соединений пересекающихся оболочек, приведены результаты исследования напряженно-состояния и концентрации напряжений в соединениях пересекающихся оболочек различной геометрической формы.

Глава 1

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

1.1. Классификация типовых соединений пересекающихся оболочек

Пересекающиеся оболочки представляют специальный класс оболочечных конструкций. Такие конструкции характеризуются сложной геометрией в области пересечения (сопряжение двух оболочек может включать и переходную пространственную область), резким изменением геометрии поверхности по линии пересечения оболочек. На основе теоретического обобщения проблемы исследования пересекающихся оболочек, рассмотрения ее с позиций создания единой прикладной расчетной методики и проведения системного прочностного анализа типовых конструктивных соединений были сформулированы некоторые общие положения, создающие методологическую базу проводимых исследований.

Конструктивный объект в виде пересекающихся оболочек вращения определяется как соединение двух оболочек (рис. 1.1):

- оболочка 1 — *основная оболочка* (пересекаемая);
- оболочка 2 — *оболочка-патрубок* (пересекающая).

(В дальнейшем для краткости вторую оболочку будем называть просто «*патрубком*».)

С практической точки зрения в дальнейшем рассматриваются такие соединения: основная оболочка — цилиндрическая, коническая, сферическая и эллипсоидальная оболочки (оболочки вращения); патрубок — цилиндрическая оболочка кругового сечения. Патрубок имеет характерный поперечный размер не больший, чем соответствующий размер основной оболочки, и в поперечном направлении не выходит за пределы основной оболочки.

Для соединения пересекающихся оболочек можно выделить две характерные плоскости — главную и поперечную, связанные с нормалью \mathbf{n}_0 к срединной поверхности основной оболочки в точке ее пересечения осью патрубка (см. рис. 1.1). *Главная плоскость соединения* проходит через ось вращения основной

оболочки и нормаль \mathbf{n}_0 . Поперечная плоскость проходит через нормаль \mathbf{n}_0 перпендикулярно главной плоскости. Положение патрубка относительно основной оболочки характеризуется двумя угловыми параметрами (α и β), которые определяют отклонение оси патрубка от нормали \mathbf{n}_0 в главной и поперечной плоскостях соответственно.

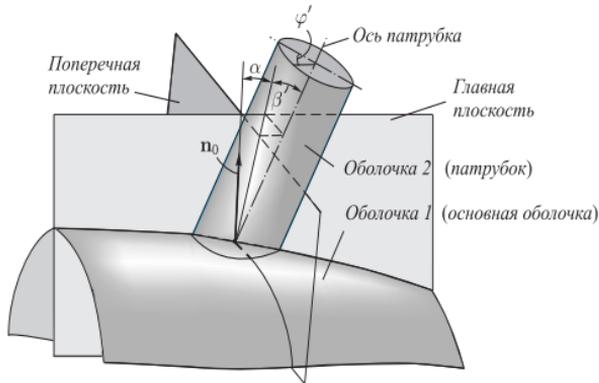


Рис. 1.1. Соединение пересекающихся оболочек

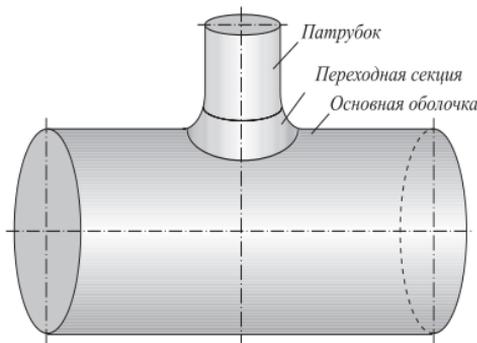


Рис. 1.2. Соединение пересекающихся цилиндрических оболочек с переходной секцией

На основе взаимного положения оболочек введена следующая классификация типовых соединений пересекающихся оболочек:

- *радиальное соединение*, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (ось патрубка совпадает с нормалью);
- *нерадиальное соединение*, $\beta = 0$ (ось патрубка расположена в главной плоскости под углом α к нормали);

- *тангенциальное соединение*, $\alpha = 0$ (ось патрубка расположена в поперечной плоскости под углом β к нормали);
- *произвольное соединение* (ось патрубка и нормаль занимают произвольное взаимное положение).

Пересекающиеся оболочки структурно могут включать и некоторую переходную секцию (рис. 1.2). Такая оболочечная структура характеризует определенную форму конструктивного и технологического решения для снижения эффектов концентрации напряжений в области сопряжения оболочек.

Представленная классификация типовых соединений отражает и различную степень сложности проведения расчетного анализа. Определенное положение оболочек допускает упрощение в моделировании соединения при наличии одной, двух или более плоскостей симметрии.

1.2. Состояние проблемы

Развитие исследований пересекающихся оболочек стимулируется широким использованием таких конструкций в промышленности. Возможности широкого исследования обусловлены развитием механики деформируемого тела, степенью разработки и внедрения современных расчетных методов на базе использования математических моделей и вычислительной техники, совершенствованием экспериментальных методов исследования. Сложная геометрическая структура пересекающихся оболочек, существенная неоднородность напряженного состояния, характеризующегося высоким уровнем концентрации напряжений и значительными градиентами напряжений, требуют тщательной постановки исследований при применении традиционных методов как экспериментального, так и теоретического направлений.

В настоящее время, когда численные методы достигли высокого уровня развития в сочетании с наличием развитых программных комплексов и возможностями высокопроизводительной вычислительной техники, казалось бы практические вопросы качества результатов и вычислительные затраты на проведение исследований пересекающихся оболочек остались в прошлом. Однако, отдавая должное исследователям в этой области механики оболочек, следует дать небольшой обзор опубликованных работ по этой проблеме. Тем более что практическое значение этой проблемы для инженеров, занятых проектированием, производством, эксплуатацией соответствующего оборудования, имеющего рассматриваемые конструктивные узлы, и техническим надзором за ним, осталось достаточно большим.

В приводимом ниже обзоре основных работ в области исследования пересекающихся оболочек используется терминология введенной классификации типовых соединений.

Соединения пересекающихся цилиндрических оболочек. Наибольшее количество работ относится к пересекающимся цилиндрическим оболочкам, что объясняется, в первую очередь, широким применением таких соединений в различных технических областях. Причем в большинстве этих работ рассматриваются радиальные соединения.

Чисто экспериментальный подход явился начальным этапом исследований пересекающихся оболочек и был связан, как правило, с рассмотрением частных промышленных конструкций. Методы тензометрии и фотоупругости начали применяться практически параллельно, но первоначально из-за несовершенства измерительной аппаратуры постановка и объем испытаний были ограниченными.

По-видимому, первое экспериментальное исследование радиального соединения цилиндрических оболочек проведено Е.О. Патоном с соавторами [71] с использованием метода тензометрии. Результаты тензометрических испытаний также приведены в работах [209, 180, 183, 234, 72, 130, 149, 239] и др. В большинстве случаев испытывались толстостенные оболочки, для которых коэффициенты концентрации напряжений получались относительно небольшими. Ввиду высокой трудоемкости работ результаты исследований носили частный характер. Некоторое обобщение результатов исследований [47, 154] также носит ограниченный характер.

Результаты тензометрических исследований для радиальных соединений представлены Л.И. Ельцовым и Э.А. Молдавским с соавторами [42, 38, 36, 66, 37, 151]. Основное внимание уделялось испытанию моделей из различных материалов при действии контурных нагрузок, приложенных в торцовых сечениях оболочек. Серия испытаний с использованием метода тензометрии была проведена английским исследователем Д. Моффатом, в ряде работ которого представлены экспериментальные результаты для тройниковых трубчатых соединений равного диаметра, главным образом, при действии внешних сил и моментов [212, 213].

Метод тензометрии используется для исследования напряженного состояния радиальных соединений оболочек из неметаллических материалов [66, 38] (оргстекла), [123] (стеклопластика). Рассматривается действие внутреннего давления, осевой нагрузки на основную оболочку, отмечаются некоторые эффекты анизотропии материала.

Метод фотоупругости применяется в основном для исследования соединений весьма толстостенных оболочек. Обычно

используется метод «замораживания» деформаций, позволяющий наиболее эффективно исследовать трехмерное напряженное состояние в моделях. В одной из первых работ [184] на основе полученных экспериментальных данных вводится эмпирическая формула для оценки максимального коэффициента концентрации напряжений. Результаты исследования отдельных узлов энергетического оборудования в виде соединений толстостенных цилиндрических оболочек приведены в работах [234, 253, 236, 34, 35, 148] при действии внутреннего давления, [257, 42, 66] — контурных нагрузок. Однако исследования имеют частный характер, что не позволяет обобщить результаты для подобных соединений. Большое внимание применению метода фотоупругости к анализу распределения напряжений в опасных зонах оболочек тройниковых соединений уделяется С.Е. Бугаенко с соавторами [76, 16, 17].

Начальные теоретические исследования пересекающихся оболочек являлись практическим направлением применения теории оболочек в решении трудных и конкретных задач, связанных с разработкой методов расчета оболочек с вырезами и анализом влияния отверстий на напряженно-деформированное состояние оболочек, рассмотрением вопросов передачи на оболочки локальных нагрузок, обусловленных взаимодействием с жесткими и упругими элементами, совершенствованием численных методов исследования в расчетах оболочек. Поэтому в развитии расчетных методов важную роль сыграли труды А.И. Лурье, в частности работа [57], в которой впервые рассмотрено решение задачи о концентрации напряжений в цилиндрической оболочке с отверстием и положено начало большому кругу исследований других авторов. Здесь следует упомянуть работы Г.Н. Савина [79] и его учеников, А.Н. Гузя с сотрудниками [29, 63], исследования В.М. Даревского [30, 79], интересные решения Э.И. Григолюка и В.М. Толкачева, обобщенные позднее в книге [28], работы К. Маргерра, П. Бижяра и других авторов.

Впервые, по-видимому, приближенное аналитическое решение для радиального соединения цилиндрических оболочек было рассмотрено В. Рейдельбахом [230]. Для расчета соединений с отношением диаметров патрубка и основной оболочки $d/D \leq 0,5$ автором вводится ряд допущений, линия пересечения оболочек считается плоской кривой — окружностью. В решении применяются уравнения теории пологих оболочек в полярной (для основной оболочки) и цилиндрической (для патрубка) системах координат с использованием разложения функций перемещений и усилий в ряды. Разрешающая система уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов получается из кинематических и силовых условий сопряжения оболочек на

линии пересечения. Автором рассмотрено решение задачи при действии внутреннего давления, в расчете используется три члена ряда ($n = 0, 2, 4$).

В дальнейшем многие зарубежные и отечественные авторы использовали подход В. Рейдельбаха для расчета радиальных соединений цилиндрических оболочек ($d/D \leq 0,5$) при действии различных нагрузок [256, 141, 137, 153, 142 и др.] В некоторых решениях вводятся отдельные поправки и уточнения: используются более строгие условия сопряжения по линии пересечения оболочек [181, 208, 137, 260], применяются более точные уравнения для патрубка [252, 80], учитывается деформация поперечного сдвига [204]. В ряде работ [80, 48, 49, 192, 55, 173 и др.] для удовлетворения условий сопряжения оболочек используется метод коллокаций. При этом многими авторами, а также в обзорной статье [209], отмечаются существенные трудности в численной реализации метода коллокаций, наличие сильной зависимости устойчивости решения от выбора точек коллокаций.

В работах [144, 63] аналитическое решение построено для соединений $d/D \leq 0,35$, причем патрубок считается пропущенным внутрь основной оболочки. В отличие от решения [230] уравнения краевого эффекта для патрубка записываются в ортогональных криволинейных координатах, связанных с опорным контуром, которым является линия пересечения оболочек. Приводятся результаты исследования напряженного состояния оболочек при действии внутреннего давления и осевых сил, приложенных к основной оболочке.

Результаты параметрического исследования для коэффициента концентрации напряжений радиальных соединений при $d/D \leq 0,5$ от действия внутреннего давления приведены в работе [83]. Решение строится в постановке Рейдельбаха, а условия сопряжения удовлетворяются коллокационно. Рассмотрены случаи пропущенного и присоединенного патрубка, сварного и с торовым переходником (отбортовкой). Расчетные результаты этой работы используются и в справочной литературе [90].

Приближенный метод определения напряжений в радиальных соединениях оболочек с малым отношением диаметров ($d/D \leq 0,25$) при нагружении патрубка изгибающим моментом рассматривается в работах [138, 126]. В этом случае подкрепляющее действие основной оболочки эквивалентно действию пластины, и полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На использовании опытных данных и допущения об осесимметричности напряженного состояния в оболочках построена приближенная методика Г.И. Феденко [131, 132, 133] для расчета радиальных соединений, нагруженных внутренним давлением.

Условия сопряжения оболочек удовлетворяются коллокационно. Выводятся простые расчетные формулы для максимального коэффициента концентрации напряжений, которые рекомендуются для широкого диапазона геометрических параметров, что, по-видимому, является неоправданным в силу принятых допущений.

В работах [146, 78] развивается приближенная методика расчета напряженного состояния укрепленной зоны пересечения цилиндрических оболочек применительно к трубопроводным узлам гидротехнических сооружений. Напряженное состояние представляется в виде суммы безмоментного и краевого эффекта, определенного как для оболочки с жестко заземленным кососрезанным сечением. Такое решение дает приемлемые результаты для тройников с жестким усилением по линии пересечения, практически предотвращающим деформацию оболочек в этой зоне.

На основе решений [29, 230] проводится расчетное исследование радиальных соединений ортотропных оболочек в работах [26, 140, 139, 65] при нагружении внутренним давлением и осевыми силами, приложенными к основной оболочке. Приведенные результаты расчетов, главным образом, показывают влияние характеристик материалов на коэффициент концентрации напряжений.

Рассмотрению аналитического решения задачи о пересечении цилиндрических оболочек с большим отношением диаметров ($d/D > 0,5$) посвящено очень мало работ, в большинстве своем содержащих лишь подход к решению данной проблемы.

В работе [161] данная задача сформулирована для оболочек равного диаметра. Используются уравнения Флюгге для обеих оболочек, условия сопряжения оболочек удовлетворяются коллокационно. Авторы не приводят какого-либо численного примера, обсуждаются трудности численной реализации предлагаемого решения. Для решения этой задачи применялись и уравнения Морли [266] с использованием рядов Фурье. Числовой пример приведен только для температурной нагрузки. Приближенное решение [264] для соединения оболочек равного диаметра построено с использованием допущения об осесимметричности напряженного состояния оболочек. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает лишь качественное совпадение. Ю.Ф. Бариновым [3] рассмотрена общая постановка решения задачи пересекающихся цилиндрических оболочек с использованием теории тонких оболочек Сандерса. Решение строится в комплексной форме для симметричного и кососимметричного нагружений. Условия сопряжения оболочек формулируются на основе принципа виртуальной работы, а для их реализации

применяется метод коллокаций. В работе [4] приводятся некоторые расчетные результаты и сравнение с экспериментальными данными, которые показывают лишь качественное совпадение в распределении напряжений.

Трудности получения и ограниченность аналитического решения задачи о пересекающихся цилиндрических оболочках заставили исследователей обратиться к численным методам. Для решения этой задачи преимущественно применяется метод конечных элементов (МКЭ), причем чаще всего в двухмерной постановке.

Первое упоминание о применении МКЭ к расчету радиально-го соединения сделано Л. Германном и Д. Кэмпбеллом [23]. Оболочки аппроксимировались плоскими треугольными элементами смешанного типа с 12 степенями свободы. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными показало их хорошее соответствие. Такого же типа элементы, но несколько усовершенствованные, применялись японскими исследователями [156] для анализа тройниковых соединений при действии внутреннего давления и поперечной силы, приложенной к патрубку. В работе [226] используются плоские элементы повышенной точности в расчете радиальных соединений. Однако такой подход приводит к системам уравнений большого порядка, что существенно снижает эффективность вычислительной программы.

Совместные теоретические и экспериментальные исследования проводились в Окриджской национальной лаборатории (ORNL), результаты которых приводятся в работах [179, 182, 160]. Была создана серия специальных программ CORTES, CORTES-SA для расчета тройниковых радиальных соединений цилиндрических оболочек при действии внутреннего давления, контурных и температурной нагрузок. В расчете использовались неплоские четырехугольные элементы, собираемые из четырех плоских треугольных элементов. Для отладки программы проводились экспериментальные исследования на моделях методом тензометрии. Опубликованы достаточно подробные экспериментальные и расчетные данные, которые могут служить основой апробации вычислительных программ различного назначения.

В. Виссер [20] использует криволинейные треугольные элементы смешанного типа с 24 степенями свободы для расчета крестообразных соединений цилиндрических оболочек. Отмечается как более точное описание геометрии оболочек в области пересечения, так и существенное усложнение вычислительной программы. В работе [254] рассматривается применение плоских треугольных элементов в сочетании с техникой подконструкций для расчета тройниковых соединений различной конфигурации. Приводится сопоставление максимальных коэффициентов кон-

центрации напряжений, определенных расчетным путем, с экспериментальными данными ORNL. МКЭ с использованием плоских треугольных элементов применяется для анализа напряженного состояния радиальных соединений и в работах [1, 232, 228, 53], где рассмотрено действие различных нагрузок, чаще всего внутреннего давления.

В работах [51-53] приведены результаты расчетных исследований радиальных соединений при действии внутреннего давления по МКЭ с использованием криволинейных элементов цилиндрической оболочки — прямоугольной и треугольной формы. Показано влияние геометрических параметров соединения на напряжения и перемещения в оболочках.

Использование цилиндрических элементов прямоугольной и треугольной формы в МКЭ к расчету радиальных соединений рассмотрено в работе [235]. Для треугольных элементов надежные результаты получаются только в центре элемента, что требует применения довольно большого числа их для аппроксимации зоны пересечения.

Применение четырехугольных элементов произвольной оболочки вращения к расчету радиальных соединений рассмотрено Н.Г. Бандуриным и А.П. Николаевым [2]. Использование большого числа степеней свободы в узлах элемента, часть из которых не имеет векторной формы, приводит к трудностям в формировании условий сопряжения оболочек в рамках МКЭ и решения разрешающей системы уравнений высокого порядка. Разработанная программа используется для расчета тройникового соединения при действии внутреннего давления, температурной нагрузки, результаты которого приведены в работе [82]. Применение аналогичного типа элементов к расчету радиальных соединений обсуждается и в работе [182], но результаты не приводятся.

Расчетные исследования применительно к сварным и штампованным тройниковым радиальным соединениям цилиндрических оболочек при различных видах статического нагружения выполнены А.М. Белостоцким [6–9, 151]. В разработанной программе применяются восьмиузловые оболочечные элементы суперпараметрического типа. Приводятся результаты анализа влияния конструктивных параметров соединения на коэффициент концентрации напряжений. Отмечается, что для расчета тонкостенных оболочек требуется использовать большее количество элементов, чем для толстостенных оболочек. Применение элементов оболочки типа Тимошенко к расчету пересекающихся цилиндрических оболочек обсуждается и в работе [145]. Определенные трудности возникают при расчете тонкостенных оболочек за счет учета деформации поперечного сдвига. Конечно-элементное решение

используется для анализа соединений цилиндрических оболочек в работах [221, 217, 198, 200, 218, 212, 213].

Применение МКЭ на основе теории тонких оболочек с использованием четырехугольных оболочечных элементов к расчету различных соединений цилиндрических оболочек приведено в работах В.Н. Скопинского с соавторами [108, 119, 113, 100, 105, 242, 243, 102]. Рассмотрены различные виды нагружения соединений, приведены результаты сравнительного анализа расчетных и экспериментальных результатов.

Гораздо в меньшей степени рассмотрено применение МКЭ с использованием трехмерных элементов к расчету пересекающихся цилиндрических оболочек. В этом случае существенно повышается трудоемкость расчета. Большинство работ в такой постановке относится к расчету соединений толстостенных оболочек или частных конструкций сложной конфигурации в зоне пересечения оболочек, характеризующихся изменением толщины. В ряде работ американских исследователей [77, 194, 195, 202, 227, 155, 163] приводятся результаты расчетов для радиальных соединений с использованием различного типа трехмерных элементов. Отмечается существенное повышение порядка системы уравнений и временных вычислительных затрат для выполнения расчетов. Причем резко усложняется процедура разбиения конструкции на элементы и подготовка исходных данных. В работе [259] указывается, что для такого расчета необходимо вычислительную программу дополнить эффективным генератором данных. Здесь же приводятся некоторые сведения о применении трехмерного подхода по МКЭ к анализу трубопроводных узлов при действии статических нагрузок в торцовых сечениях труб.

Результаты применения МКЭ в трехмерной постановке к расчету радиальных соединений цилиндрических оболочек приводятся в ряде работ Б.В. Фрадкина и В.В. Головина [135, 136, 8]. Разработанная программа использует барицентрические шестигранные элементы с полилинейными функциями перемещений. Сведения о характеристиках программы показывают высокий порядок системы алгебраических уравнений и, как следствие, большие затраты машинного времени. Приводятся результаты практического исследования штампованных тройников, сравнения с экспериментальными данными и сопоставления с расчетными результатами по программе А.М. Белостоцкого.

Анализ применимости различного типа трехмерных элементов к расчету пересекающихся цилиндрических оболочек сделан в работе [187]. Показано, что использование простейших восьмиузловых шестигранных трехмерных элементов, построенных с добавлением несовместных функций (рассматривается метод перемещений), приводит к повышению экономичности вычисле-

ний по сравнению с использованием высокоточных трехмерных элементов.

Комбинированное решение по МКЭ с использованием трехмерных, двухмерных и транзитных (переходных) элементов рассмотрено в работах [172, 221]. В этом случае расчетный алгоритм отличается сложностью, но преимущества такого решения относительно чисто трехмерного подхода за счет различной аппроксимации характерных областей соединения оболочек не обсуждаются. Оригинальная методика для расчета штуцерных соединений на цилиндрическом корпусе или сферическом днище рассмотрена в работе [203]. Используется специальный переходный конечный элемент, приближенно моделирующий напряженно-деформированное состояние (на основе плоской теории упругости) в области пересечения оболочек сложной геометрической формы. Числовой пример приведен для осесимметричной задачи сфера-цилиндр, но точность результатов не лучше, чем у обычного конечно-элементного анализа.

Сравнительный анализ трехмерного и двухмерного численных решений для пересекающихся цилиндрических оболочек рассмотрен в работах [93, 118, 248].

Необычное решение [265, 267] приведено для соединений с малым отношением диаметров оболочек $d/D \leq 0,25$. Для расчета используется комбинирование аналитического метода и МКЭ в трехмерной постановке.

В работе [175] проводится сравнительный анализ применения МКЭ с использованием двухмерных (неплоских четырехугольных) и трехмерных (восьмиузловых шестигранных) элементов, имеющих одинаковое число степеней свободы, к расчету подкрепленных и неподкрепленных тройниковых радиальных соединений. Приведено сопоставление результатов только для наружной поверхности оболочки. Отмечается, что в случае нагружения патрубка моментами расчетные данные на основе двух подходов очень хорошо согласуются, а при действии внутреннего давления результаты находятся в худшем соответствии.

Метод конечных разностей (МКР) не получил распространения в расчете пересекающихся оболочек, так как значительно уступает МКЭ в эффективности применения к решению сложных задач теории оболочек. Уравнения теории пологих оболочек использовались для конечно-разностного расчета радиального соединения при действии на патрубок изгибающего момента [54]. Некоторые допущения и сравнительно грубая сетка не позволили получить достаточно хорошего соответствия расчетных результатов с экспериментальными данными. В работе [125] обсуждается применение МКР к расчету радиальных соединений. Предла-

гается использовать ряд упрощающих допущений; результаты расчетов не приводятся.

Для расчета соединений толстостенных цилиндрических оболочек применимы и другие численные методы. Радиальное крестообразное соединение существенно толстостенных цилиндров равных диаметров рассматривается в статье [147]. Задача решается в трехмерной постановке методом обобщенных упругих потенциалов. Отмечаются трудности реализации численной процедуры даже при отношении диаметров внутренней и наружной поверхностей трубы $d_{\text{вн}}/d_{\text{нар}} = 0,75$. Данные о временных затратах расчета на ЭВМ являются относительно большими. Такая же задача рассмотрена и в работе [15] для иллюстрации применения метода граничных элементов (МГЭ).

Гораздо меньшее внимание уделяется исследованию соединений цилиндрических оболочек, отличных от радиальных.

Метод фотоупругости с «замораживанием» деформаций применяется для экспериментального исследования нерадиальных соединений толстостенных цилиндрических оболочек [219]. Рассмотрено влияние угла между осями оболочек на коэффициенты концентрации напряжений в характерных точках соединения при нагружении внутренним давлением. В работе [36] применяется метод тензометрии для исследования напряжений в нерадиальных соединениях цилиндрических оболочек равного диаметра. Максимальный коэффициент концентрации напряжений получается экстраполяцией опытных данных в области пересечения.

Решение по МКЭ [156] используется для анализа напряжений в нерадиальных соединениях при действии поперечной силы в торцовом сечении патрубка в главной плоскости. Проводится сравнение с экспериментальными результатами, полученными методом тензометрии. В работах [106, 107, 116, 11] приведены результаты исследований нерадиальных соединений при действии внутреннего давления. В расчетах применяется МКЭ с использованием криволинейных оболочечных элементов. Показано влияние геометрических параметров соединения на напряжения в оболочках.

МКЭ в трехмерной постановке применяется для расчета тройниковых нерадиальных соединений [268]. Оболочки являются весьма толстостенными, рассмотрено действие внутреннего давления и отдельных видов нагрузки, приложенных к патрубку. Приближенное аналитическое решение [4] используется для анализа влияния угла между осями оболочек на максимальный коэффициент концентрации напряжений при нагружении внутренним давлением. Результаты приведены для соединения оболочек равного диаметра и одинаковой толщины.

В работах [12, 107, 117, 11] рассмотрены тангенциальные соединения цилиндрических оболочек при нагружении внутренним давлением. Расчетный анализ проводится по МКЭ, показано влияние геометрических параметров соединения на коэффициент концентрации напряжений. В работе [242] приведены результаты параметрического анализа нерадиальных и тангенциальных соединений, в частности показано влияние угловых параметров на максимальные напряжения в соединении.

В ряде работ рассмотрены радиальные соединения цилиндрических оболочек с локальным укреплением в области пересечения. Метод фотоупругости [184] используется для исследования эффекта укрепления при действии внутреннего давления. В работе [109] проводится расчетный анализ по МКЭ радиальных соединений с кольцевыми элементами жесткости. Отмечен эффект значительного снижения напряжений в опасных точках соединения. Задача выбора оптимальных параметров подкрепления оболочек радиального соединения [96] решается в постановке нелинейного программирования. Компоненты напряженного состояния определяются по МКЭ с использованием двумерных элементов. В работах [160, 175] приведены расчетные и экспериментальные результаты для подкрепленных тройников высокого давления. Рассмотрено нагружение внутренним давлением, силами и моментами, приложенными к патрубку. В работе [198] приведены некоторые результаты сравнительного анализа укрепленных и неукрепленных радиальных соединений.

Практические аспекты влияния параметров локального укрепления на эффект снижения максимальных напряжений в пересекающихся оболочках рассмотрены в работах [113, 112, 92, 245, 110]. Особый теоретический и практический интерес представляет исследование напряжений в соединениях цилиндрических оболочек с торовой отбортовкой, некоторые результаты которого приведены в работах [111, 115, 244, 166].

Определенное значение имеет исследование коленных соединений цилиндрических оболочек как распространенного элемента трубопроводных систем. Для анализа напряженного состояния применяются как экспериментальные, так и расчетные методы.

В большинстве работ теоретическое исследование проводится на основе приближенного аналитического решения, которое строится аналогично решению для оболочки с косым срезом. Напряженное состояние представляется в виде суммы основного (безмоментного) состояния и краевого эффекта, уравнения которых записываются в цилиндрической системе координат. Условия сопряжения оболочек в плоскости пересечения удовлетворяются различными способами, чаще всего коллокационно. В такой постановке используется решение для двухсекционных коленных

соединений [197, 215, 200 и др.] при действии внутреннего давления, моментных нагрузок. Некоторые отличительные особенности приближенного расчета рассмотрены в статьях [59, 46], где решение строится в параллельной системе координат, связанной с контуром косоугольного сечения оболочек. Собещанским [120] аналитический метод расчета применяется в уточненной постановке на основе интегрирования дифференциальных уравнений моментной теории цилиндрических оболочек, а граничные условия удовлетворяются приближенно с использованием метода коллокаций. Обзор и анализ различных подходов для построения аналитического решения проводится в работе [261], где обсуждается также применимость некоторых приближенных формул для определения максимального коэффициента концентрации напряжений.

Ф.М. Свойским [89, 78] проводится расчетное исследование коленных соединений, в том числе и многосекционных. Особенности деформации составного колена с эллиптической вставкой рассмотрены в работе [268].

Вследствие использования приближенного аналитического решения во всех отмеченных работах проводится сопоставление расчетных результатов с экспериментальными данными. Последние, как правило, получены методом фотоупругости при испытании толстостенных моделей. Поэтому в ряде работ отмечается значительное расхождение расчетных и экспериментальных результатов в зоне пересечения, что связано, отчасти, и с учетом трехмерных эффектов в приближенном решении на основе теории оболочек.

Самостоятельный интерес имеют результаты экспериментальных исследований [220, 237, 238] коленных соединений при действии внутреннего давления, изгибающего момента в главной плоскости. Проведен анализ влияния геометрических параметров на максимальные напряжения. Применяется метод фотоупругости с «замораживанием» деформаций.

Абрамовым Н.А. [1] выполнен расчетный анализ коленных соединений по МКЭ с использованием плоских элементов. Работу отличает анализ влияния основных геометрических параметров в довольно широком диапазоне, приводятся графические зависимости максимальных напряжений в оболочках от геометрических параметров. Численный анализ коленных соединений с применением МКЭ рассмотрен в работе [114], в том числе для трехсекционного колена с эллиптической вставкой.

Соединения сферической и цилиндрической пересекающихся оболочек. Относительно в меньшей степени, чем для пересекающихся цилиндрических оболочек, опубликовано работ по изучению напряженного состояния пересекающихся сферической

и цилиндрической оболочек. Для сферы с радиальным патрубком возможно построение аналитического решения на основе теории тонких оболочек, особенно простое для осесимметричного нагружения (внутреннее давление, осевая сила). Поэтому такие соединения рассмотрены наиболее подробно. Частичный обзор расчетных методов анализа сферической оболочки с цилиндрическим патрубком на основе теории тонких оболочек приведен в работах [261, 205].

В работе [222] такое решение рассмотрено для радиального соединения, причем сферическая оболочка подкреплена в области пересечения. Расчетная методика на основе теории оболочек строится с учетом сопряжения трех оболочек. Такой же подход использован и в работе [261] для анализа концентрации напряжений в сферической оболочке (гладкой и подкрепленной) с присоединенным и пропущенным патрубком. Приводятся расчетные данные для коэффициента концентрации напряжений в зависимости от геометрических параметров при действии внутреннего давления, осевой силы, изгибающего момента. Достаточно подробные результаты сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных приведены в статьях [176, 180, 269]. Используется метод тензометрии, рассмотрено действие внутреннего давления, осевой силы и изгибающего момента. В основном исследованы соединения с малым отношением d/D диаметров патрубка и сферы.

Д. Джонсоном [31] рассмотрено приближенное аналитическое решение для сферической оболочки с нерадиальным патрубком при действии сил и моментов. Применяется теория тонких оболочек, для удовлетворения граничных условий используется метод Галёркина. Отмечается ограничение величины угла наклона оси патрубка на применимость данного решения. Практически в такой же постановке проведено расчетное исследование напряженного состояния сферы с патрубком и в работе [63], где представлены результаты для различных геометрических параметров оболочек и угла наклона оси патрубка, не превышающего 12° . Б.А. Кудрявцевым [50] рассмотрен приближенный способ решения такой же задачи, но при действии внутреннего давления. Используются уравнения оболочек в комплексной форме. Приведены результаты численного анализа влияния угла наклона оси патрубка на коэффициент концентрации напряжений в соединении. Результаты теоретического анализа сферической оболочки с нерадиальным патрубком приведены и в работе [261] при различных видах нагружения.

Метод сил используется Ю.Л. Тарасовым [127, 128] для приближенного расчета подкрепленного радиального соединения при осесимметричном нагружении. Рассмотрено влияние упругого

кольца и пропущенного патрубка на эффект снижения максимальных напряжений. Вопросы выбора рационального подкрепления в зоне пересечения радиального патрубка и полусферической оболочки обсуждаются в работе [258] — за счет линейного изменения толщин оболочек в зоне пересечения, в работе [58] — за счет наличия пропущенного патрубка. Анализ проводится для осесимметричной задачи. В работе [167] рассматривается общая процедура выбора конструктивных параметров типового радиального патрубка в сферических сосудах давления для обеспечения минимального уровня напряжений при наименьших затратах материала.

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов для специальных конструкций сферического сосуда с радиальным и нерадиальным пропущенными патрубками приведено в статьях [191, 272]. В аналитическом решении используются уравнения Власова для патрубка и уравнения Рейснера для сферы, при этом условия сопряжения оболочек удовлетворяются в отдельных точках. Экспериментальные данные получены методом тензометрии для различных видов нагрузки. Рассмотрены патрубки малого диаметра относительно размеров сферы.

Реже, чем аналитическое решение, для расчета пересекающихся сферической и цилиндрической оболочек используются численные методы. В работах [207, 136, 240] рассмотрено применение МКЭ, а в работе [216] решение получено с помощью МКР. Ряд результатов теоретических и экспериментальных исследований в двумерной и трехмерной постановках приведен в работах [41, 86], где рассмотрено действие внутреннего давления. Сложность и трудоемкость численных процедур ограничивают анализ, поэтому расчеты носят прикладной характер и относятся, в основном, к частным конструкциям.

Результаты экспериментальных исследований для подкрепленного сферического сосуда с радиальным патрубком и сравнение с теорией приведено в работе [152]. Некоторые результаты параметрического анализа для сферической оболочки с нерадиальным патрубком, полученные с применением МКЭ, представлены в работе [99].

В работах [157, 231] приводятся результаты анализа напряжений в полусферической оболочке с нерадиальным пропущенным штуцером с применением МКЭ, в том числе рассмотрена приближенная методика оптимизации таких конструктивных соединений за счет изменения толщин трех сопрягаемых оболочек для снижения концентрации напряжений. В работе [162] рассмотрено оболочечное решение для укрепленного соединения сферы с патрубком.

Соединения конической и цилиндрической пересекающихся оболочек. Исследования соединений, основная оболочка которых отличается от цилиндрической или сферической формы, практически отсутствуют в литературе. Приближенная методика определения напряжений в конической оболочке с радиальным цилиндрическим патрубком рассмотрена в работе [61]. Как и для цилиндрических оболочек, решение построено на допущении об осесимметричности напряженного состояния в оболочках, поэтому такая методика имеет весьма приближенный характер и ограниченную область применения, в основном, для оценки коэффициента концентрации напряжений в соединениях с малым отношением диаметра патрубка к характерному размеру основной оболочки. В работах [13, 247] представлены результаты сравнительного анализа численного решения и экспериментальных исследований для конической оболочки с радиальным цилиндрическим патрубком. Численное решение получено с применением МКЭ, экспериментальные данные — с использованием метода фотоупругости с «замораживанием» деформаций. Для конической оболочки с нерадиальным патрубком некоторые результаты параметрического анализа приведены в работах [99, 247], используя численное решение с применением МКЭ.

Соединения эллипсоидальной и цилиндрической пересекающихся оболочек. Для анализа напряженного состояния в осесимметричной оболочечной конструкции эллипсоид–цилиндр приближенное аналитическое решение с использованием коэффициентов влияния приведено в работах [188, 189, 166]. Рассмотрены тонкостенные оболочки при действии внутреннего давления. Приближенная методика определения напряжений в эллипсоидальной оболочке с радиальным цилиндрическим патрубком при действии внутреннего давления рассмотрена в работах [39, 60]. Как и в других работах этих авторов, решение построено на допущении об осесимметричности напряженного состояния в оболочках, поэтому имеет весьма ограниченную область применения, в основном, для оценки коэффициента концентрации напряжений в эллиптических днищах с центральным патрубком при малом отношении диаметра патрубка к диаметру днища. Решение с использованием осесимметричной теории оболочек для соединения эллипсоид–цилиндр, в том числе, и с кольцевой накладкой на эллиптической оболочке, рассмотрено в работах [168–171].

Результаты исследования напряженного состояния и параметрического анализа эллипсоидальной оболочки с цилиндрическим патрубком приведены в работах [91, 96, 101, 103, 104, 246, 249, 250, 251]. Рассмотрены соединения с радиальным и нерадиальным патрубком, с центральным и нецентральным положением

патрубка, при различных видах нагружения, с различными видами локального укрепления.

В работе [241] приведена расчетная методика для анализа напряжений в эллиптических днищах с радиальным центральным штуцером, усиленных приварной кольцевой накладкой в зоне выреза.

Эмпирические зависимости. Для оценки максимальных коэффициентов концентрации напряжений в соединениях при действии различных нагрузок нередко используются эмпирические зависимости, имеющие простую форму и полученные на основе применения различных подходов.

На ранней стадии исследования пересекающихся оболочек для установления эмпирических зависимостей применялись некоторые условные измерители, основанные на различных понятиях: компенсации вырезанного в оболочках материала, коэффициента ослабления оболочки вырезом, условной оценки концентрации напряжений, коэффициента кривизны. Основой введения таких измерителей служили уже известные решения для пластин и оболочек с отверстиями и опытные данные. Рекомендации к использованию предложенных эмпирических формул приводятся в специальной литературе [70, 21, 67, 88, 81 и др.]. Как правило, наилучшую оценку для коэффициента концентрации напряжений они дают для относительно толстостенных патрубков с малым отношением их диаметра к характерному размеру основной оболочки.

Другой подход базируется на использовании чисто экспериментальных данных. Построенные таким образом эмпирические формулы приводятся в работах [184, 47, 206, 271 и др.]. Такой подход является весьма дорогостоящим и ограниченным, так как невозможно провести полные испытания моделей для широкого диапазона изменения геометрических параметров.

Чаще в построении эмпирических зависимостей применяется подход на основе использования аналитических или численных методов решения. При этом априорно выбираются некоторые эмпирические уравнения, для решения которых и используются расчетные методы. Аналитическое решение применялось для получения эмпирических формул в работах [132, 133, 61, 39, 258, 261, 232, 190], применение МКЭ рассмотрено в работах [254, 255] с использованием двумерных и трехмерных элементов.

Несколько подобного рода статей американских авторов по исследованию пересекающихся оболочек опубликованы в серии бюллетеней WRC [211, 270, 210, 233, 214], в которых предлагаются приближенные и практические зависимости для вычисления максимальных напряжений или коэффициентов концентрации напряжений.

1.3. Анализ методов исследования пересекающихся оболочек

На основе анализа опубликованных работ и применяющихся методов исследования пересекающихся оболочек можно отметить следующее.

1. Наибольшее внимание в исследованиях пересекающихся оболочек уделяется соединениям цилиндрических оболочек. Причем подавляющее большинство работ относится к радиальным соединениям, что объясняется в первую очередь их наиболее широким практическим применением. Другие соединения изучены в меньшей степени. Так, немного публикаций для соединений эллипсоидальной оболочки с цилиндрическим патрубком, хотя такие конструктивные объекты имеют практическое применение не меньшее, чем сферическая оболочка с патрубком. Особо следует отметить, что мало внимания уделяется изучению соединений пересекающихся оболочек с локальным укреплением, для которых требуется более широкий параметрический анализ, а также изучение эффективности различных типов укрепления.

2. Экспериментальные методы по-прежнему имеют большое значение для общего исследования напряженного состояния пересекающихся оболочек. В практике экспериментальных исследований пересекающихся оболочек примерно в равной степени применяются метод электротензометрирования и метод фотоупругости с «замораживанием» деформаций.

Вследствие особенностей напряженного состояния пересекающихся оболочек применение метода электротензометрирования целесообразно с использованием малогабазных тензодатчиков, с высокой степенью автоматизации процесса измерения и обработки информации. Существенным достоинством этого метода является возможность испытания натуральных изделий и моделей практически любых размеров, что позволяет исследовать как толстостенные, так и тонкостенные оболочки. Недостаток метода применительно к пересекающимся оболочкам проявляется в невозможности непосредственного измерения максимальных деформаций и последующего определения наибольших напряжений, так как они возникают на границе области пересечения оболочек. Поэтому нередко максимальные напряжения определяют способом экстраполяции экспериментальных данных вблизи области пересечения.

Метод фотоупругости позволяет получить достаточно полную информацию о распределении деформаций и напряжений по всему объему пересекающихся оболочек, особенно в области пересечения, где возникает трехмерное напряженное состояние. Однако имеются трудности получения экспериментальных данных

в области резкого изменения геометрии (области внешнего угла соединения оболочек), а именно здесь чаще всего и возникают наибольшие напряжения. Кроме того, в методе фотоупругости существуют практические ограничения на размеры используемых моделей (толщина оболочки, габаритные параметры), что не позволяет испытывать достаточно тонкостенные модели оболочек.

Кроме указанных частных особенностей использования экспериментальных методов, можно отметить и трудности общего порядка: вследствие многообразия типовых соединений пересекающихся оболочек, наличия комплекса геометрических параметров соединений и широкого диапазона их изменения, практически невозможно провести полный анализ с использованием только экспериментального подхода. Поэтому наиболее эффективное направление экспериментальных исследований заключается в целевой постановке и проведении специальных испытаний для обоснования применимости расчетных методов и верификации вычислительных программ. Именно при таком подходе получены наиболее качественные и достаточно масштабные опытные данные, как правило, для тщательно изготовленных моделей.

3. В наибольшей степени для исследования напряженного состояния в пересекающихся оболочках используются расчетные методы.

Для расчетного анализа применяются аналитические методы с использованием классической теории оболочек на основе гипотез Кирхгофа–Лява и численные методы. Однако аналитические методы для такой сложной задачи не всегда применимы. Лишь в случае такой осесимметричной конструкции, как радиальное соединение сферической и цилиндрической оболочек, решение задачи получить относительно несложно, без введения каких-либо дополнительных допущений. В остальных случаях известные аналитические решения получены в приближенной постановке, с рядом дополнительных допущений, которые ограничивают область их применения. Кроме того, в силу особенностей решения задачи чаще всего применение аналитических методов не имеет заметного преимущества по сравнению с использованием численных методов.

В настоящее время применение численных методов является наиболее общим, а во многих случаях и единственно возможным подходом в теоретическом анализе данной проблемы. Только на их основе возможно расчетное исследование различных соединений пересекающихся оболочек в широком диапазоне изменения геометрических параметров и типовых случаев нагружения. Среди численных методов в наибольшей степени используется метод конечных элементов. При расчете толстостенных пересе-

кающихся оболочек конкуренцию МКЭ может составить метод граничных элементов (МГЭ). Однако сравнение возможностей и вычислительной эффективности МГЭ и МКЭ показывает, что расчет оболочек относится к тому классу задач, решение которых по МГЭ не столь эффективно из-за большого отношения поверхности тела к его объему и, как следствие, относительно больших вычислительных затрат на интегрирование.

Применение МКЭ к расчету пересекающихся оболочек характеризуется большим разнообразием: используются различные постановки задачи (двухмерная, трехмерная, комбинированная) и вариационные формулировки, различного типа элементы (например, для двухмерного решения — плоские и криволинейные, треугольные и четырехугольные). В целом, можно отметить три основных направления применения МКЭ при расчетном исследовании пересекающихся оболочек. Первое — с использованием классической теории оболочек на основе гипотез Кирхгофа-Лява. В большинстве работ численные результаты получены с использованием плоских элементов. Применение криволинейных двухмерных элементов более эффективно за счет адекватного геометрического и деформационного представления оболочек, а также и в вычислительном плане. Второе — с использованием теории оболочек в уточненной постановке. Чаще всего применяются двухмерные элементы с учетом деформации поперечного сдвига. Третье — с использованием трехмерных элементов. Казалось бы, что наиболее общая постановка предпочтительна, особенно для получения расчетных напряжений в области пересечения оболочек. Но при расчете в трехмерной постановке значительно возрастают вычислительные затраты, усложняется процедура конечно-элементного моделирования, что вызывает естественные трудности при экспресс-анализе таких объектов.

Следует заметить, что в расчетной практике до сих пор применяются и эмпирические формулы, предложенные для оценки максимальных напряжений в зоне пересечения оболочек. Учетываемая простота и удобство использования, их применение оправдано лишь для относительно ненапряженных конструктивных узлов, в обоснованном диапазоне геометрических параметров. Однако для полномасштабных исследований такой подход мало пригоден, а кроме того упрощенные расчеты с использованием эмпирических зависимостей не могут обеспечить требуемую надежность и безопасность конструкции, не применимы для обоснования выбора параметров локального укрепления.

Таким образом, анализ опубликованных работ показывает научный и практический интерес к рассматриваемой проблеме, а также направления исследования пересекающихся оболочек и недостаточность системных исследований по данной проблеме.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

Для теоретического исследования пересекающихся оболочек целесообразно использование систем криволинейных координат, связанных с поверхностями отсчета оболочек. Во-первых, такой подход позволяет наиболее адекватно представлять геометрию оболочечной конструкции; во-вторых, обеспечивает возможность правильного учета взаимосвязанной мембранной и изгибной деформаций оболочки, обусловленной кривизной поверхности. В этом случае необходимо получение некоторых геометрических зависимостей, которые определяют координатные соотношения для точек линии пересечения поверхностей оболочек и матрицу преобразований систем криволинейных координат на линии пересечения.

2.1. Геометрические соотношения для линии пересечения поверхностей оболочек вращения

Геометрические соотношения для линии пересечения определяют взаимно однозначное соответствие между криволинейными координатами оболочек и устанавливают матричные преобразования системы координат, необходимые при использовании оболочечных элементов в МКЭ. Общая процедура определения геометрических соотношений для пересекающихся оболочек различной геометрической формы является единой, в то же время существуют и некоторые особенности их получения применительно к используемой системе криволинейных координат основной оболочки. В качестве оболочки-патрубка рассматривается цилиндрическая оболочка.

Рассмотрим произвольное пересечение оболочки вращения и цилиндрической оболочки кругового сечения (рис. 2.1 а). Введем основную систему координат $OXYZ$ с базисом $I(i, j, k)$ и вспомогательную систему координат $O'X'Y'Z'$ с базисом $I'(i', j', k')$. Начало координат вспомогательной системы (точка O') определяется как точка пересечения осью патрубка срединной поверхности основной оболочки, а начало координат основной системы (точка O) — как проекция точка O' на ось вращения основной

оболочки (положение точка O выбирается из удобства получения геометрических соотношений и может быть иным).

Плоскость XOZ совпадает с меридиональным сечением основной оболочки, проходящим через точка O' , т. е. XOZ — главная плоскость. Положение системы координат $O'X'Y'Z'$ выбирается так, что ось Z' лежит в главной плоскости XOZ , а ось X' направлена по оси патрубка и внутрь основной оболочки. Соотношения, связывающие координаты точек в системах $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$, имеют вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{X}' + \mathbf{X}_0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{X} = \{x, y, z\}^T$; $\mathbf{X}' = \{x', y', z'\}^T$; $\mathbf{X}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}^T$; \mathbf{L} — матрица перехода от базиса \mathbf{I}' к базису \mathbf{I} ; x_0, y_0, z_0 — координаты точка O' в основной системе координат.

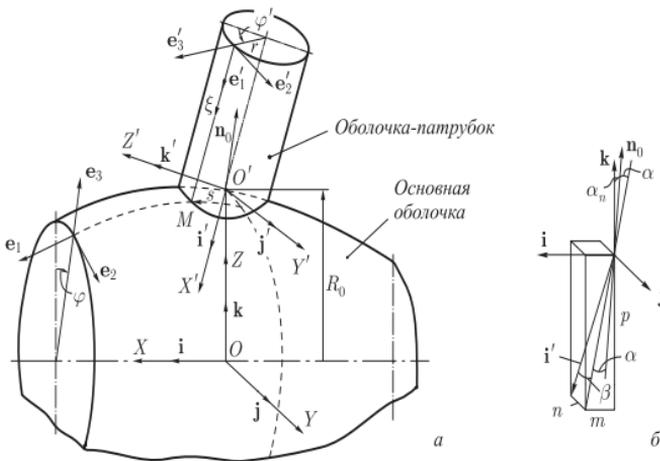


Рис. 2.1. Пересечение оболочек. Системы координат

Геометрические соотношения для пересекающихся оболочек зависят не только от геометрических параметров оболочек, но и положения единичного вектора $\mathbf{i}'(m, n, p)$ в основной системе координат. Положение патрубка относительно основной оболочки в $OXYZ$ определяется так же, как и вращение твердого тела с одной неподвижной точкой — тремя углами Эйлера. Поскольку оболочка-патрубок является осесимметричной фигурой с прямолинейной осью, угол собственного вращения вокруг ее оси не изменяет геометрии соединения. Таким образом, положение патрубка относительно основной оболочки определяется двумя

углами — прецессии и нутации. Вместо них введем угловые параметры α , β (рис. 2.1 б), где угол α определяет отклонение проекции оси патрубка на плоскость XOZ от нормали \mathbf{n}_0 в главной плоскости соединения, а угол β — отклонение оси патрубка от главной плоскости. Тогда орт \mathbf{i}' в основной системе координат определяется следующим образом:

$$m = \sin(\alpha + \alpha_n) \cos \beta; \quad n = -\sin \beta; \quad p = -\cos(\alpha + \alpha_n) \cos \beta, \quad (2.2)$$

где α_n — угол между нормалью \mathbf{n}_0 и осью Z .

Учитывая положение оси Z' и ортонормированность базисных векторов $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, определяем их положение в системе координат $OXYZ$:

$$\mathbf{j}' = -\frac{mn}{l} \mathbf{i} + l \cdot \mathbf{j} - \frac{np}{l} \mathbf{k}; \quad \mathbf{k}' = -\frac{p}{l} \mathbf{i} + \frac{m}{l} \mathbf{k}; \quad l = \sqrt{m^2 + n^2}. \quad (2.3)$$

Таким образом, матрица \mathbf{L} имеет вид

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} m & -mn/l & -p/l \\ n & l & 0 \\ p & -np/l & m/l \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Для получения уравнений линии пересечения поверхностей оболочек используются системы криволинейных координат основной оболочки (s, φ) и патрубка (ξ', φ') (см. рис. 2.1 а). При этом уравнения поверхностей оболочек в системах координат $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ записываются в параметрической форме:

$$x = g_1(s, \varphi), \quad y = g_2(s, \varphi), \quad z = g_3(s, \varphi); \quad (2.5)$$

$$x' = r \xi', \quad y' = r \sin \varphi', \quad z' = r \cos \varphi', \quad (2.6)$$

где r — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки (патрубка).

Подстановка (2.5) и (2.6) в (2.1) с учетом (2.4) и (2.2) позволяет установить взаимно однозначное соответствие между криволинейными координатами оболочек для точек линии пересечения. В результате получим зависимости

$$\xi' = f_1(\varphi'), \quad s' = f_2(\varphi'), \quad \varphi' = f_3(\varphi'), \quad (2.7)$$

с использованием которых по заданной координате φ' можно вычислять последовательным образом координаты ξ', s, φ .

Вид зависимостей $f_i(\varphi')$ определяется геометрической формой основной оболочки. В частных случаях, соответствующих типовым соединениям пересекающихся оболочек, согласно (2.2) имеем:

- радиальное соединение ($\alpha = 0, \beta = 0$)

$$m = \sin \alpha_n, \quad n = 0, \quad p = -\cos \alpha_n, \quad l = 1; \quad (2.8)$$

- нерадиальное соединение ($\beta = 0$)

$$m = \sin(\alpha + \alpha_n), \quad n = 0, \quad p = -\cos(\alpha + \alpha_n), \quad l = 1; \quad (2.9)$$

- тангенциальное соединение ($\alpha = 0$)

$$m = \sin \alpha_n, \quad n = -\sin \beta, \quad p = -\cos \alpha_n \cos \beta. \quad (2.10)$$

Наиболее просто зависимости $f_i(\varphi')$ получаются при $\alpha_n = 0$.

Для радиального и нерадиального соединений XOZ является плоскостью симметрии соединения. Рассмотрение тангенциального соединения упрощается, если $\alpha_n = 0$ и YOZ является плоскостью симметрии соединения. При $\alpha_n = 0$ для радиального соединения обе плоскости XOZ и YOZ могут являться плоскостями симметрии.

Для рассмотрения преобразований системы координат на линии пересечения оболочек введем локальные базисы $\mathbf{E}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $\mathbf{E}'(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, связанные с системами криволинейных координат основной оболочки и патрубка (см. рис. 2.1а). Тогда векторные преобразования на линии пересечения определяются следующим образом:

$$\mathbf{E}' = \lambda \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

где λ — матрица преобразования.

Используя преобразования

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}_1 \mathbf{I}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{T}_2 \mathbf{I}', \quad (2.13)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ 0 & \sin \varphi' & \cos \varphi' \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

и соотношения (2.1) вида $\mathbf{I} = \mathbf{L} \mathbf{I}'$, из (2.11) получаем

$$\lambda = \mathbf{T}_2 \mathbf{L}^T \mathbf{T}_1^{-1}. \quad (2.15)$$

Матрицу \mathbf{T}_1 нетрудно установить для основной оболочки определенной геометрической формы в выбранной системе координат $OXYZ$.

2.2. Расчетные соотношения для пересекающихся оболочек различной геометрической формы

2.2.1. Пересечение конической и цилиндрической оболочек. Для соединений конической и цилиндрической оболочек (рис. 2.2а) положение нормали \mathbf{n}_0 определяется через угол

конусности оболочки $\alpha_k = \alpha_n$, а вектор \mathbf{X}_0 принимает вид

$$\mathbf{X}_0 = \{0, 0, R_0\}^T, \quad (2.16)$$

где R_0 — радиус параллельного сечения оболочки, расположенного в плоскости YOZ (выбирается как начальное сечение).

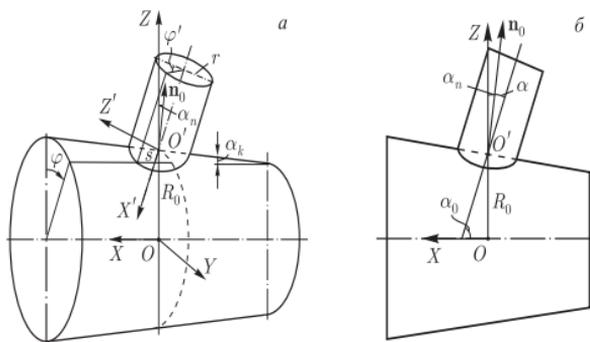


Рис. 2.2. Соединения конической и цилиндрической оболочек

Уравнения (2.5) для конической поверхности имеют вид

$$x = s \cos \alpha_k; \quad y = R \sin \varphi; \quad z = R \cos \varphi, \quad (2.17)$$

где $R = R_0 + s \cdot \sin \alpha_k$, а координата s отсчитывается от начального сечения.

Подстановка (2.6) и (2.17) в (2.1) с учетом (2.16) приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} s \cos \alpha_k = mr\xi' - \frac{r}{l}(mn \sin \varphi' + p \cos \varphi'), \\ R \sin \varphi = nr\xi' + lr \sin \varphi', \\ R \cos \varphi = pr\xi' + \frac{r}{l}(m \cos \varphi' - np \sin \varphi') + R_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Решая систему (2.18) с учетом области изменения координаты φ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$), получаем зависимости (2.7) в таком виде:

$$\begin{aligned} \xi' &= -\frac{1}{q} \left(A + \sqrt{A^2 - B} \right), \quad q = \frac{r}{R_0}; \\ s &= \frac{r(m\xi' - C_1)}{\cos \alpha_k}; \quad R = R_0 + s \cdot \sin \alpha_k; \\ \varphi &= \arcsin \left[\frac{r}{R} (n\xi' + l \sin \varphi') \right]; \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned}
A(\varphi') &= \frac{\cos^2 \alpha_k}{\cos^2 \alpha_k - m^2} \times \\
&\quad \times [qnl \sin \varphi' + p(qC_2 + 1) + m \operatorname{tg} \alpha_k (qC_1 \operatorname{tg} \alpha_k - 1)]; \\
B(\varphi') &= \frac{\cos^2 \alpha_k}{\cos^2 \alpha_k - m^2} [q^2 l^2 \sin^2 \varphi' + (qC_2 + 1)^2 + (qC_1 \operatorname{tg} \alpha_k - 1)^2]; \\
C_1(\varphi') &= \frac{1}{l} (mn \sin \varphi' + p \cos \varphi'), \\
C_2(\varphi') &= \frac{1}{l} (m \cos \varphi' - np \sin \varphi').
\end{aligned} \tag{2.19б}$$

Особый случай получается при $m = \cos \alpha_k$, тогда соотношение для ξ' в выражении (2.19) при этом определяется следующим образом:

$$\xi' = -\frac{1}{2q} \frac{q^2 l^2 \sin^2 \varphi' + (qC_2 + 1)^2 - (qC_1 \operatorname{tg} \alpha_k - 1)^2}{qnl \sin \varphi' + p(qC_2 + 1) + m \operatorname{tg} \alpha_k (qC_1 \operatorname{tg} \alpha_k - 1)}. \tag{2.20}$$

Матрица \mathbf{T}_1 в соотношении (2.12) для конической оболочки имеет вид

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \sin \varphi & \sin \alpha_k \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k \sin \varphi & \cos \alpha_k \cos \varphi \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

В результате выполнения матричных операций согласно выражению (2.15) получаем матрицу λ , компоненты которой определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= m \cos \alpha_k + \sin \alpha_k (n \sin \varphi + p \cos \varphi), \\
\lambda_{12} &= n \cos \varphi - p \sin \varphi, \\
\lambda_{13} &= -m \sin \alpha_k + \cos \alpha_k (n \sin \varphi + p \cos \varphi), \\
\lambda_{21} &= \cos \alpha_k \frac{p \sin \varphi' - mn \cos \varphi'}{l} + \\
&\quad + \sin \alpha_k \left(l \cos \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \frac{m \sin \varphi' + np \cos \varphi'}{l} \right), \\
\lambda_{22} &= l \cos \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi \frac{m \sin \varphi' + np \cos \varphi'}{l}, \\
\lambda_{23} &= \sin \alpha_k \frac{-p \sin \varphi' + mn \cos \varphi'}{l} + \\
&\quad + \cos \alpha_k \left(l \cos \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \frac{m \sin \varphi' + np \cos \varphi'}{l} \right), \\
\lambda_{31} &= -\cos \alpha_k \frac{mn \sin \varphi' + p \cos \varphi'}{l} + \\
&\quad + \sin \alpha_k \left(l \sin \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \frac{np \sin \varphi' - m \cos \varphi'}{l} \right), \\
\lambda_{32} &= l \sin \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi \frac{np \sin \varphi' - m \cos \varphi'}{l},
\end{aligned} \tag{2.22a}$$

$$\lambda_{33} = \cos \alpha_k \left(l \sin \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \frac{np \sin \varphi' - m \cos \varphi'}{l} \right) + \sin \alpha_k \frac{mn \sin \varphi' + p \cos \varphi'}{l}. \quad (2.226)$$

Соотношения (2.19) и компоненты λ_{ij} (2.22) для типовых соединений получаются с учетом выражений (2.8)–(2.10). Для нерадиальных соединений (рис. 2.2б) можно ввести угол между осями оболочек

$$\alpha_0 = 90^\circ - (\alpha + \alpha_k), \quad (2.23)$$

и тогда соотношения (2.9) примут вид

$$m = \cos \alpha_0, \quad n = 0, \quad p = -\sin \alpha_0. \quad (2.24)$$

Очевидно, наибольшие упрощения в выражениях (2.19) и (2.22) будут иметь место при $\alpha_0 = 90^\circ$ ($\alpha_n = -\alpha_k$), когда оси оболочек пересекаются и ортогональны. Выражение (2.20) используется при $\alpha_0 = \alpha_k$.

2.2.2. Пересечение цилиндрических оболочек. Необходимые соотношения для пересекающихся цилиндрических оболочек можно получить из выражений (2.19) и (2.22), положив $\alpha_k = 0$, $\alpha_n = 0$. В результате, координаты орта i' (см. (2.2)) определяются выражениями

$$m = \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad n = -\sin \beta, \quad p = -\cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad (2.25)$$

а зависимости для вычисления координат точек линии пересечения примут вид

$$\begin{aligned} \xi' &= -\frac{1}{q} \left(A + \sqrt{A^2 - B} \right), \quad q = \frac{r}{R}; \\ \xi &= \frac{s}{r} = q(m\xi' - C_1); \\ \varphi &= \arcsin [q(n\xi' + l \sin \varphi')]; \\ A(\varphi') &= \frac{1}{n^2 + p^2} [nlq \sin \varphi' + p(qC_2 + 1)]; \\ B(\varphi') &= \frac{1}{n^2 + p^2} [l^2 q^2 \sin^2 \varphi' + (qC_2 + 1)^2 - 1]; \\ C_1(\varphi') &= \frac{1}{l} (mn \sin \varphi' + p \cos \varphi'), \\ C_2(\varphi') &= \frac{1}{l} (m \cos \varphi' - np \sin \varphi'), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где R — радиус срединной поверхности цилиндрической основной оболочки.

Компоненты λ_{ij} матрицы преобразований определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= m, & \lambda_{12} &= n \cos \varphi - p \sin \varphi, \\
 \lambda_{13} &= n \sin \varphi + p \cos \varphi, & \lambda_{21} &= \frac{p \sin \varphi' - mn \cos \varphi'}{l}, \\
 \lambda_{22} &= l \cos \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi \frac{m \sin \varphi' + np \cos \varphi'}{l}, \\
 \lambda_{23} &= l \cos \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \frac{m \sin \varphi' + np \cos \varphi'}{l}, \\
 \lambda_{31} &= -\frac{mn \sin \varphi' + p \cos \varphi'}{l}, \\
 \lambda_{32} &= l \sin \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi \frac{np \sin \varphi' - m \cos \varphi'}{l}, \\
 \lambda_{33} &= l \sin \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \frac{np \sin \varphi' - m \cos \varphi'}{l}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Соединения пересекающихся цилиндрических оболочек (рис. 2.3), особенно радиальные, наиболее часто применяются на практике, поэтому целесообразно привести расчетные зависимости для типовых соединений.

Радиальное соединение (рис. 2.3а), $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Из выражений (2.25) следует $m = 0$, $n = 0$, $p = -1$. Зависимости (2.26) имеют наиболее простой вид

$$\begin{aligned}
 \xi' &= \frac{1}{q} \left(1 - \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi'} \right), & q &= \frac{r}{R}; \\
 \xi &= q \cos \varphi'; \\
 \varphi &= \arcsin (q \sin \varphi').
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Компоненты матрицы преобразований имеют вид

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= 0, & \lambda_{12} &= \sin \varphi, & \lambda_{13} &= -\cos \varphi, \\
 \lambda_{21} &= -\sin \varphi', & \lambda_{22} &= \cos \varphi' \cos \varphi, & \lambda_{23} &= \cos \varphi' \sin \varphi, \\
 \lambda_{31} &= \cos \varphi', & \lambda_{32} &= \sin \varphi' \cos \varphi, & \lambda_{33} &= \sin \varphi' \sin \varphi.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Нерадиальное соединение (рис. 2.3б), $\beta = 0$. Из выражений (2.25) получаем $m = \sin \alpha$, $n = 0$, $p = -\cos \alpha$.

Зависимости (2.26) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \xi' &= \frac{1}{q \cos \alpha} \left(1 + q \sin \alpha \cos \varphi' - \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi'} \right), \\
 \xi &= \frac{q \cos \varphi'}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi'} \right), \\
 \varphi &= \arcsin (q \sin \varphi'), & q &= \frac{r}{R}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$