В. В. ПРАСОЛОВ

Наглядная топология

УДК 515.1
ББК 22.15
П70

Прасолов В. В.
Наглядная топология
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
112 с.
ISBN 978-5-4439-2055-9

Книга представляет собой вводный курс топологии. Основные понятия сначала описываются на интуитивно понятном уровне, а затем постепенно уточняются и становятся вполне строгими. Это позволяет сразу же заняться содержательными топологическими задачами.

Книга снабжена многочисленными иллюстрациями, которые нередко более важны для ее понимания, чем текст. Каждая глава содержит задачи, обдумывание которых поможет лучше усвоить излагаемый материал.

Книга будет интересна всем, кто способен воспринимать изящество и элегантность геометрических конструкций и теорем.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей кружков, студентов младших курсов математических специальностей.

Подготовлено на основе книги: *В. В. Прасолов*. Наглядная топология. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел.
(499) 241-74-83
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-2055-9

1

Деформации эластичных тел

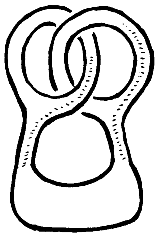
Знакомство с топологией мы начнем с нескольких задач о деформациях эластичных тел и поверхностей. Мы будем считать, что рассматриваемые фигуры можно деформировать, т.е. сминать, сжимать и растягивать, не допуская при этом разрывов и склеек.

Деформации, о которых идет речь в предлагаемых задачах, кажутся на первый взгляд невозможными. Но выполнить их не очень сложно. Прежде чем прочитать описание этих деформаций, попытайтесь придумать их сами.

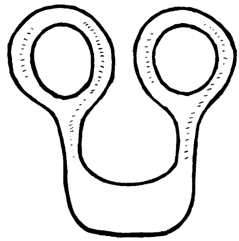
▷ **Задача 1.1.** Докажите, что эластичное тело, изображенное на рис. 1.1 (а), можно продеформировать в тело, изображенное на рис. 1.1 (б). Иными словами, если бы человек был достаточно эластичен, то он смог бы разъединить сцепленные пальцы обеих рук, не расцепляя их.

▷ **Задача 1.2.** Эластичный *крендель* надет двумя ручками на бублик (рис. 1.2 (а)). Докажите, что, деформируя крендель, одну его ручку можно снять с бублика (рис. 1.2 (б)).

▷ **Задача 1.3.** На кренделе нарисована окружность (см. рис. 1.3 (а)). Докажите, что, деформируя крендель, ее можно перевести в окружность, изображенную на рис. 1.3 (б).

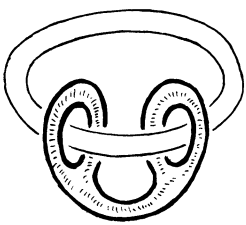


(а)

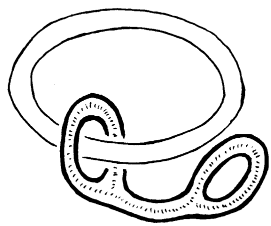


(б)

Рисунок 1.1

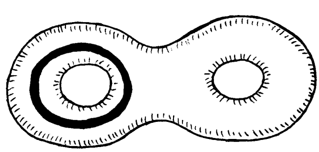


(а)

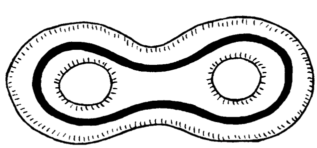


(б)

Рисунок 1.2



(б)

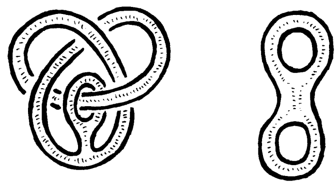


(б)

Рисунок 1.3

▷ **Задача 1.4.** Докажите, что проколотую велосипедную камеру можно вывернуть наизнанку. (Точнее говоря, это можно было бы сделать, если бы резина, из которой изготовлена камера, была достаточно эластична. Вывернуть наизнанку обычную велосипедную камеру с проколом небольшого размера нельзя.)

▷ **Задача 1.5.** Докажите, что тело, изображенное на рис. 1.4 (а), можно продеформировать в тело, изображенное на рис. 1.4 (б).



(а) (б)

Рисунок 1.4

Решения

Объяснить решения большинства задач из этой книги проще всего с помощью рисунков, причем, как правило, эти рисунки не требуют особых комментариев. Для большей ясности в некоторых случаях стрелками указаны направления движения.

▶ **1.1.** См. рис. 1.5. К обсуждению этой деформации мы еще вернемся в § 4.

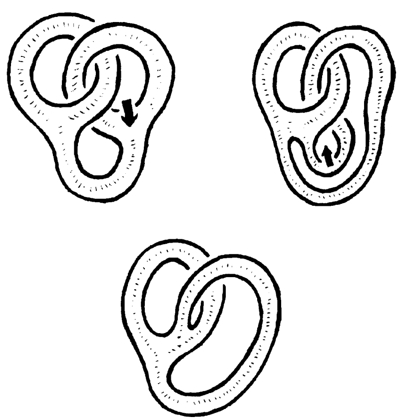


Рисунок 1.5

▸ **1.2.** См. рис. 1.6.

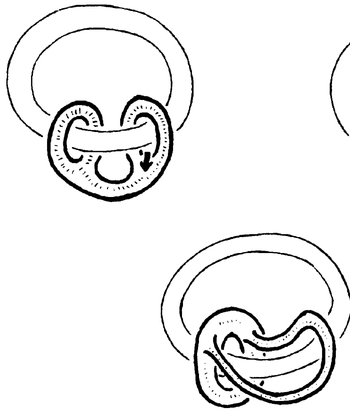


Рисунок 1.6

▸ **1.3.** См. рис. 1.7.

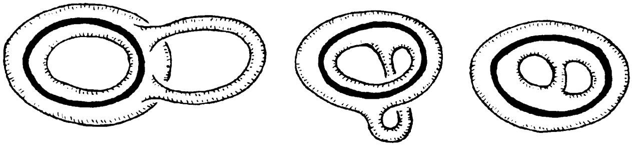


Рисунок 1.7

▸ **1.4.** Выполним сначала деформации, изображенные на рис. 1.8. В результате получим фигуру, которую можно совместить саму с собой движением так, что ее «вну-

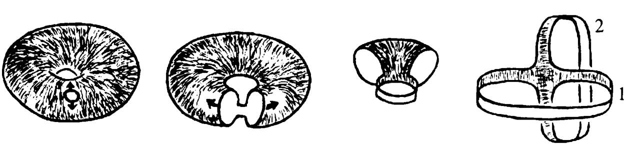


Рисунок 1.8

тренняя» и «внешняя» стороны поменяются местами. Для этого нужно совместить кольцо 1 с кольцом 2. Затем проделаем те же самые деформации в обратном порядке. В результате внешняя и внутренняя стороны велосипедной камеры поменяются местами.

Обратите внимание, что при таком выворачивании «*параллель*» переходит в «*меридиан*» (рис. 1.9.)

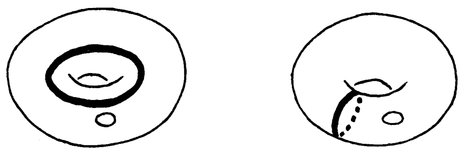


Рисунок 1.9

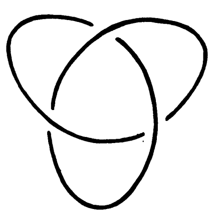
▶ **1.5.** Выполним сначала деформации, изображенные на рис. 1.10. Полученную в результате фигуру легко продеформировать в фигуру, изображенную на рис. 1.1 (а). После этого остается воспользоваться решением задачи 1.1.

Рисунок 1.10

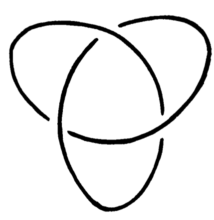
2

Узлы и зацепления

Важным объектом изучения в топологии являются узлы. *Узел* можно представить себе как веревку, концы которой соединены. Один из наиболее простых узлов изображен на рис. 2.1 (а). Он называется *трилистник*, а точнее, *правый трилистник*. Есть еще *левый трилистник*; он изображен на рис. 2.1 (б). Можно доказать, что левый трилистник и правый трилистник — разные узлы, т.е. их нельзя продеформировать друг в друга. Под деформацией узла мы подразумеваем деформацию его как эластичного тела.



(а)



(б)

Рисунок 2.1

Проекции одного и того же узла на разные плоскости имеют разный вид.

▹ **Задача 2.1.** Нарисуйте проекции на плоскости Oxy и Oxz трилистника, изображенного на рис. 2.2.

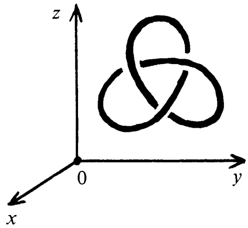


Рисунок 2.2

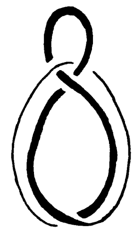


Рисунок 2.3

▹ **Задача 2.2.** Докажите, что кривая, заданная в координатах $Oxyz$ параметрическими уравнениями

$$x = \cos t(3\cos t + 2),\ \ y = 5\cos t\sin t,\ \ z = \sin t(25\cos^2 t - 1),$$

является трилистником.

Вслед за трилистником по сложности идет узел *восьмерка*, своей формой напоминающий цифру 8 (рис. 2.3).

Деформируя узел, его можно сильно запутать. А если даже такой простой узел, как трилистник или восьмерка, запутан не очень сильно, то распознать его бывает нелегко. Например, не сразу заметно, что на рис. 2.4 в верхнем ряду изображен один и тот же узел (трилистник) и в нижнем ряду тоже (восьмерка). Более того, некоторые изображения трилистника весьма похожи на изображения восьмерки. Мы разместили такие диаграммы близ друг друга.

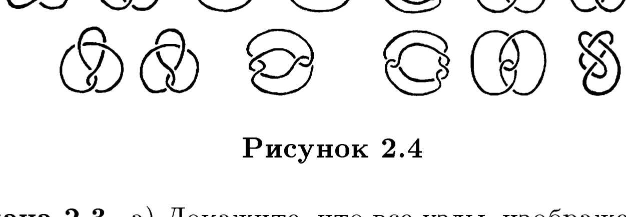


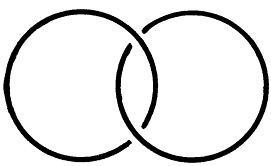
Рисунок 2.4

▹ **Задача 2.3.** а) Докажите, что все узлы, изображенные в верхнем ряду рис. 2.4, можно продеформировать друг в друга.

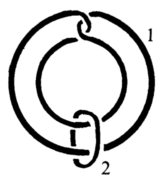
б) Докажите аналогичное утверждение для узлов нижнего ряда.

Левый трилистник получается из правого трилистника зеркальной симметрией (т.е. симметрией относительно плоскости). Как мы уже говорили, эти узлы нельзя продеформировать друг в друга. Узел восьмерка при зеркальной симметрии ведет себя иначе. Он переходит в узел, который можно продеформировать в исходный узел. В самом деле, на рис. 2.4 в нижнем ряду первые два узла слева зеркально симметричны.

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление*. Два примера зацеплений изображены на рис. 2.5. Первое из них (рис. 2.5 (а)) называют *зацеплением Хопфа*, а второе (рис. 2.5 (б)) — *зацеплением Уайтхеда.*



(а)



(б)

Рисунок 2.5

Для зацепления Хопфа существует симметрия относительно прямой, меняющая местами веревки (или, как сказал бы тополог, меняющая местами *компоненты* зацепления). Симметрия относительно прямой в пространстве является поворотом на 180° относительно этой прямой. Поэтому существует деформация, меняющая местами компоненты зацепления Хопфа. Может показаться, что для зацепления Уайтхеда такой деформации не существует. В самом деле, веревку 1 можно перерезать (в верхней части на нашем рисунке), затем провести через этот разрез ту же самую веревку ровно один раз и вновь соединить концы перерезанной веревки. После этого веревки, из которых состоит зацепление, можно будет расцепить. Как проделать эту операцию для веревки 1, очевидно. Но разве можно сделать то же самое для веревки 2? Оказывается, что да.

▷ **Задача 2.4.** а) Расположите зацепление Уайтхеда так, чтобы его компоненты были симметричны относительно некоторой прямой.

б) Проделайте для компоненты 2 зацепления Уайтхеда описанную выше операцию перерезания и соединения концов перерезанной веревки.

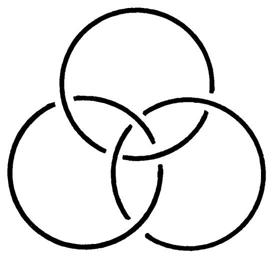
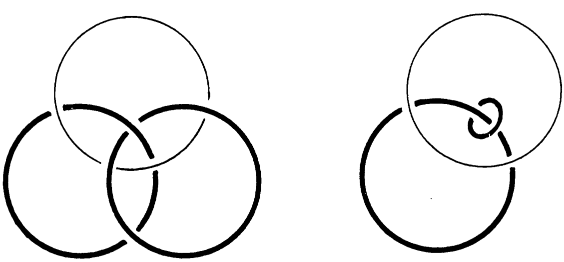


Рисунок 2.6

Сразу несколькими интересными свойствами обладает зацепление, изображенное на рис. 2.6. Его называют *кольца Борромео*, потому что такие кольца нарисованы на гербе знатного итальянского рода Борромео. Одно из свойств колец Борромео заключается в том, что эти кольца попарно не зацеплены, т.е. после удаления любого кольца остается пара незацепленных колец. Другое свойство колец Борромео еще более удивительно. Если любые два из колец Борромео зацепить простейшим образом (т.е. так, чтобы они образовали зацепление Хопфа), то после этого третье кольцо можно будет снять с этого зацепления (рис. 2.7).



(а) (б)

Рисунок 2.7