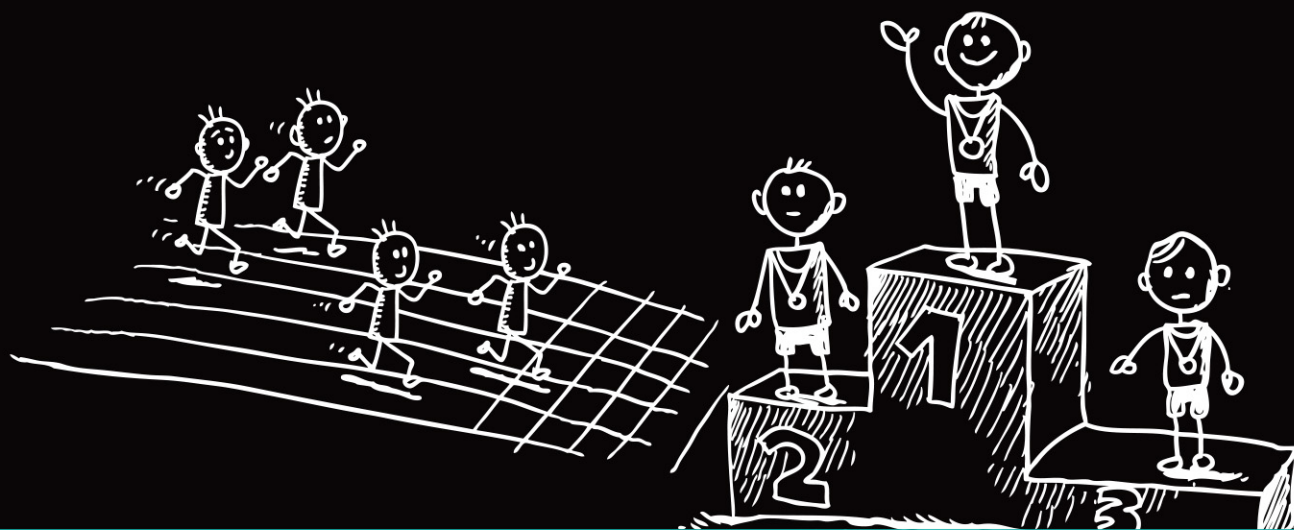


НАГЛЯДНАЯ МАТЕМАТИКА



Новый СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА

- ВСЕ ТЕМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА
- НАГЛЯДНЫЕ СХЕМЫ И ТАБЛИЦЫ
- ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ



УДК 373:51
ББК 22.1я721
У28

Макет подготовлен при содействии ООО «Айдиономикс»

Удалова, Наталья Николаевна.
У28 Наглядная математика / Н. Н. Удалова, Т. А. Колесникова. — Москва : Эксмо, 2020. — 144 с. — (Новый справочник школьника с дудлами).

ISBN 978-5-04-109476-8

Справочник содержит сведения по всем темам школьного курса математики. Весь теоретический материал систематизирован, сопровождается примерами, наглядными схемами и таблицами, а также дудлами, которые помогают лучше запомнить полученную информацию.

Пособие предназначено для школьников и учителей, а также для всех, кто интересуется вопросами математики.

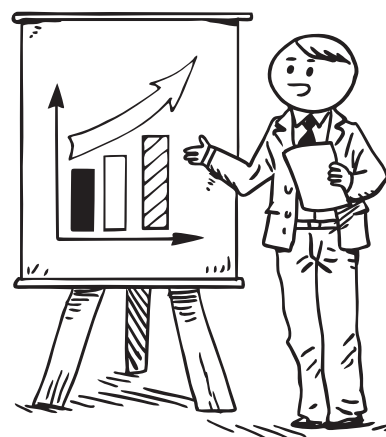
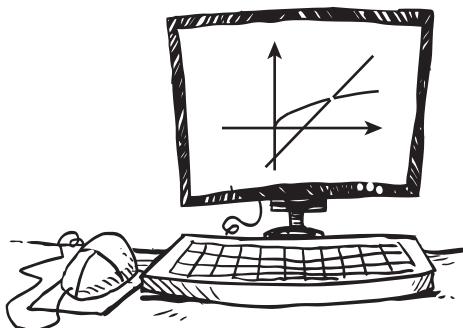
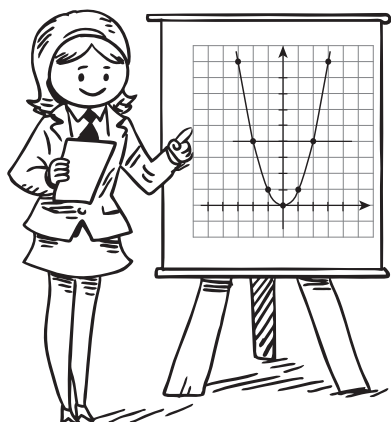
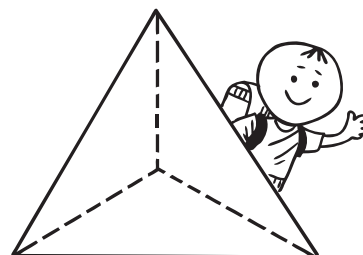
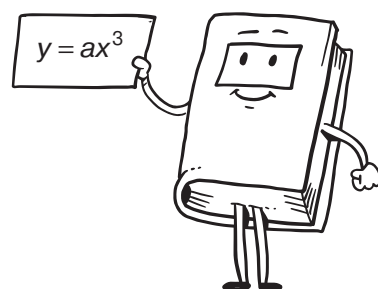
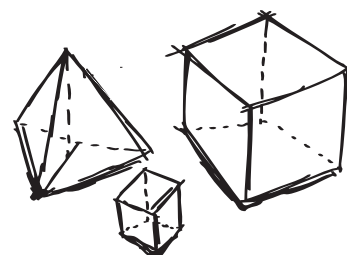
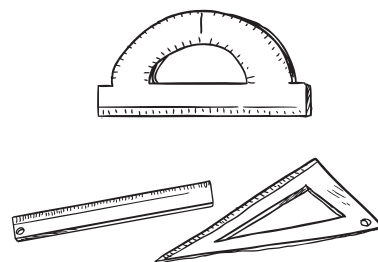
УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-109476-8

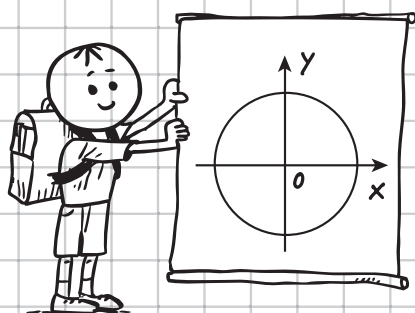
© Удалова Н.Н., Колесникова Т.А., 2020
© ООО «Айдиономикс», 2020
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
АЛГЕБРА.....	5
Числа, корни и степени	5
Основы тригонометрии.....	11
Логарифмы	15
Преобразование выражений.....	17
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.....	24
Уравнения	24
Неравенства.....	43
ФУНКЦИИ	57
Определение и график функции.....	57
Элементарное исследование функций	61
Основные элементарные функции.....	64
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	75
Производная	75
Исследование функций.....	79
Первообразная и интеграл	88
ГЕОМЕТРИЯ	94
Планиметрия.....	94
Прямые и плоскости в пространстве	102
Многогранники.....	107
Тела и поверхности вращения.....	115
Измерения геометрических фигур.....	119
Координаты и векторы.....	127
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	137
Элементы комбинаторики.....	137
Элементы статистики.....	140
Элементы теории вероятностей	141



ВВЕДЕНИЕ



Перед вами необычный справочник, который поможет систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Главное отличие данного пособия от множества других — наличие дудлов. В переводе с английского языка *doodle* — каракули, рисунки на полях тетради, оставленные школьниками. Подобные зарисовки развивают ассоциативное мышление, помогают лучше запомнить полученную информацию, вносят в процесс обучения элемент игры, что делает его увлекательным и, следовательно, более эффективным.

В книге рассмотрены традиционные разделы математики: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», которые соответствуют объёму учебного материала, включённого в единый государственный экзамен по математике.

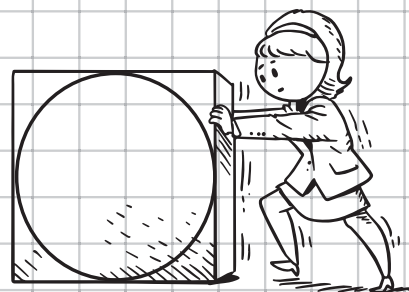
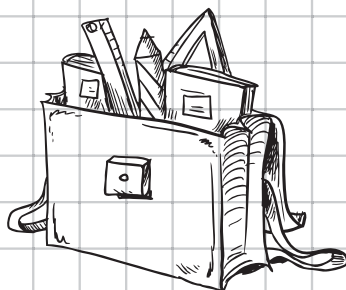
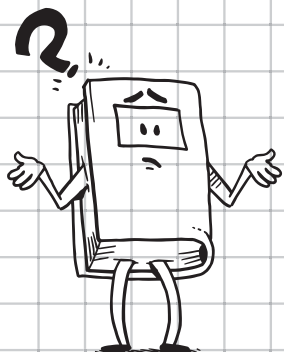
Весь теоретический материал систематизирован, он сопровождается примерами, наглядными схемами и таблицами. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и качественную подготовку по предмету. Приведённые решения с развёрнутыми разъяснениями позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий.

На страницах книги предусмотрены специальные места («Мои заметки», «Мои примеры»), на которых можно делать пометки, приводить свои примеры, дополнять прочитанную информацию собственными рисунками и схемами.

Пособие предназначено для школьников, студентов, учителей школ и преподавателей вузов, а также для всех, кто интересуется математикой.

Надеемся, книга поможет учащимся при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, выпускникам — к сдаче единого государственного экзамена.

Желаем успехов!



АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ



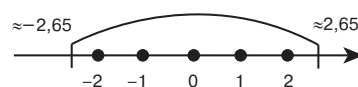
Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

Множество натуральных (лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N ; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — Z .

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степень числа a с натуральным показателем n , большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a .

Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in Z$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$$n^2 - 5 \leq 2, \quad n^2 \leq 7, \quad -\sqrt{7} \leq n \leq \sqrt{7}.$$

Ответ: 5.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

a — основание степени;
 n — показатель степени.

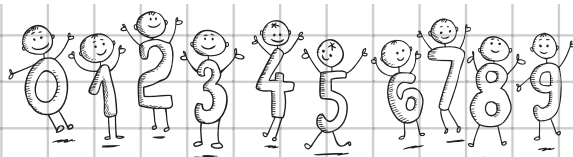


ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801



ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	Значения n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656				
7^n	7	49	343	2401	16 807					
8^n	8	64	512	4096	32 768					
9^n	9	81	729	6561	59 049					



Свойства степеней

$$a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ где } a \neq 0$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ где } b \neq 0$$

n — чётное число

$$a, b > 0$$

$$(-a)^n = b$$

$$-a^n = -b$$

$$\checkmark (-3)^4 = 81$$

$$\checkmark -3^4 = -81$$



Основание — отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...).

$$\checkmark (-3)^4 = 81.$$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...).

$$\checkmark (-2)^5 = -32.$$

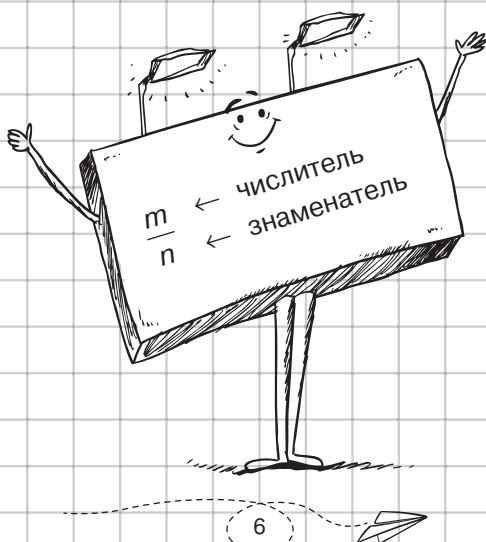
ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, называют обыкновенной дробью.

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде десятичной дроби.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, где $c \neq 0$.



ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$$

$$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8} = 2,125;$$

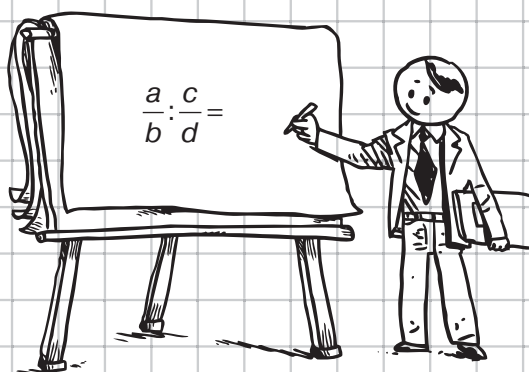
$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12;$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375.$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 8} \\ \underline{16} 2,125 \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{32}{9}.$$



СЛОЖЕНИЕ (ВЫЧИТАНИЕ) СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю.

Отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных частей.

- Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
- Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

УМНОЖЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Записать смешанные числа в виде неправильных дробей.

Найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей.

Первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

ДЕЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Делимое умножить на число, обратное делителю.

Записать смешанные числа в виде неправильных дробей.

Числа, корни и степени

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

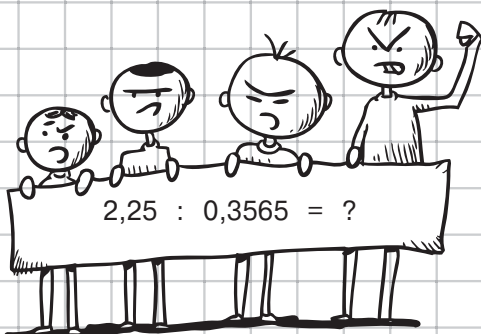
СЛОЖЕНИЕ (ВЫЧИТАНИЕ) ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Уравнять в этих дробях количество знаков после запятой.

Записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой.

Выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую.

Поставить в ответе запятую под запятой.



УМНОЖЕНИЕ ДВУХ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

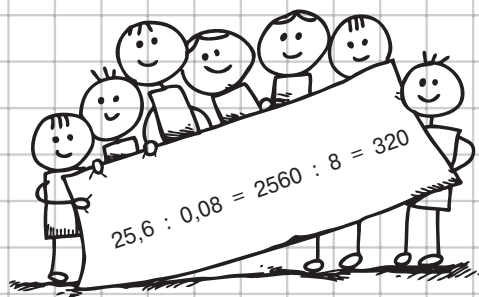
Выполнить умножение, не обращая внимания на запятые.

Отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую.

Поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.



ДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НА ДЕСЯТИЧНУЮ ДРОБЬ

В делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе.

Выполнить деление на натуральное число.

Мои заметки

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.

Множество рациональных (лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q .

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби либо бесконечной периодической десятичной дроби.

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$100\% = 1$$

$$3\% = 0,03$$

$$(3:100)$$

$$0,2 = 20\%$$

$$(0,2 \cdot 100)$$



Числа, корни и степени

ДЕЙСТВИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Сложить их модули.

$$-2 + (-7) = -(2+7) = -9.$$

Поставить перед полученным числом знак «-».

ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

К уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

$$\begin{aligned} -2 - (-5) &= -2 + 5 = 3; \\ 8 - 9 &= 8 + (-9) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,25 \cdot 4 &= -1; \\ -7:2 &= -3,5. \end{aligned}$$

$$-(-a) = a$$

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ЧИСЕЛ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ

Из большего модуля слагаемых вычесть меньший.

Поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

$$-17 + 11 = -(17 - 11) = -6.$$

УМНОЖЕНИЕ (ДЕЛЕНИЕ) ДВУХ ЧИСЕЛ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ

Перемножить (разделить) модули чисел.

Поставить перед полученным числом знак «-».

**УМНОЖЕНИЕ (ДЕЛЕНИЕ) ДВУХ
ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

$$-7 \cdot (-10) = +70 = 70;$$

$$-42 : (-7) = +6 = 6.$$

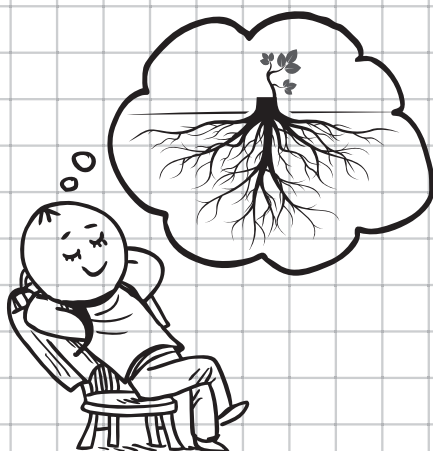
Перемножить (разделить) модули чисел.

$$\frac{9^{-2} \cdot 36}{16^{-2} \cdot 27} = \frac{(3^2)^{-2} \cdot (3^2 \cdot 2^2)}{(2^4)^{-2} \cdot 3^3} = \frac{3^{-4} \cdot 3^2 \cdot 2^2}{2^{-8} \cdot 3^3} =$$

$$= \frac{3^{-2} \cdot 2^2}{3^3 \cdot 2^{-8}} = \frac{2^8 \cdot 2^2}{3^3 \cdot 3^2} = \frac{2^{10}}{3^5} = \frac{1024}{243}.$$

**СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ
ПОКАЗАТЕЛЕМ**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0 \quad a^0 = 1, a \neq 0 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$$

**КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n > 1$ И ЕГО
СВОЙСТВА**

Корнем n -й степени ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) из действительного числа a называется такое действительное число b , n -я степень которого равна a .

$$a) \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3},$$

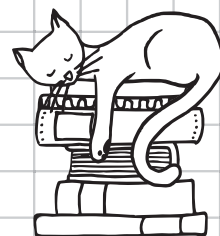
т. к. $\sqrt{5} > \sqrt{3}$;

$$б) \sqrt{7\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{66} = \sqrt{\frac{22}{3} \cdot 66} = \sqrt{22 \cdot 22} = 22;$$

$$в) \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34 - 16)(34 + 16)} =$$

$$= \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$$

Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.



$\sqrt[n]{a}$ не существует, если $a < 0$ и n — чётное число.

Мои примеры

Свойства корней n -й степени

Для любых $a \geq 0, b \geq 0, n \geq 2, m \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$$

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a > 0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число ($n \geq 2, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$),

тогда $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$a > 1$, r — рациональное число.

Если $r > 0$, то $a^r > 1$.

Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$.

Основа тригонометрии

$a > 1$, r, t — рациональные числа.

Если $r > t$, то $a^r > a^t$.

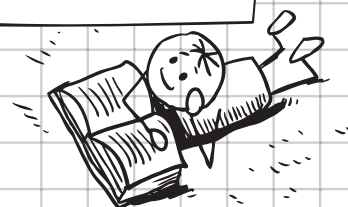
$0 < a < 1$, r, t — рациональные числа.

Если $r > t$, то $a^r < a^t$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

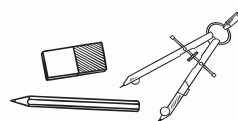
При любом $x \in \mathbb{R}$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}, a > 0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.



$$\begin{aligned} \frac{2^{2\sqrt{3}}}{0,25^{2-\sqrt{3}}} &= \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{(2^{-2})^{2-\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2(2-\sqrt{3})}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}} = 2^{2\sqrt{3}-(-4+2\sqrt{3})} = \\ &= 2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = 2^4 = 16. \end{aligned}$$

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

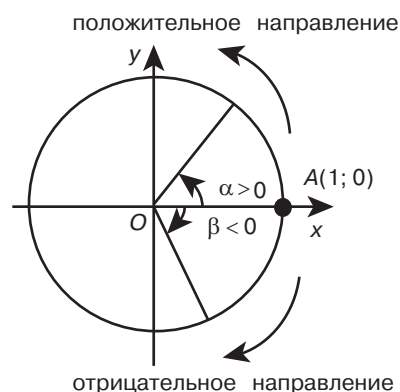
Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy .

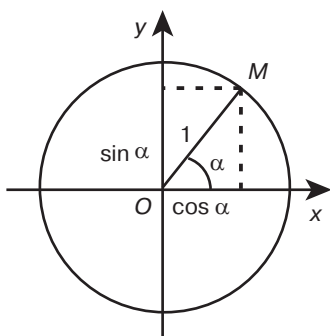
Синусом угла α ($\sin \alpha$) называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

Косинусом угла α ($\cos \alpha$) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

Тангенсом угла α ($\operatorname{tg} \alpha$) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α ($\operatorname{ctg} \alpha$) называется отношение косинуса угла к его синусу.





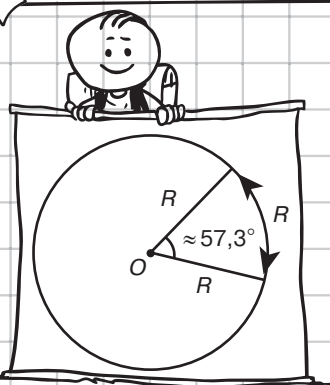
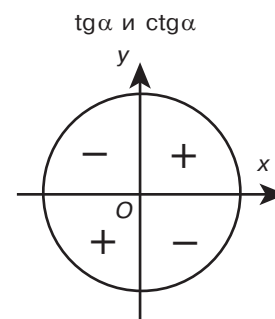
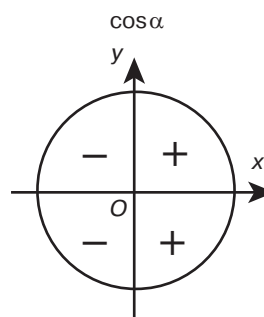
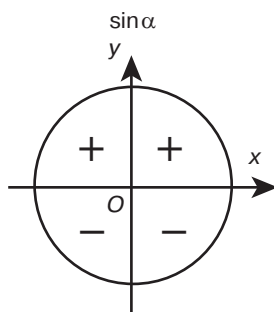
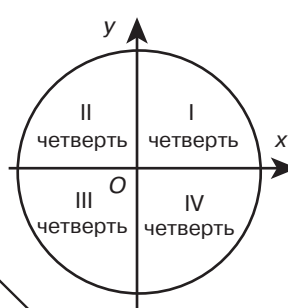
$$\sin \alpha = y$$

$$\cos \alpha = x$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА



РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

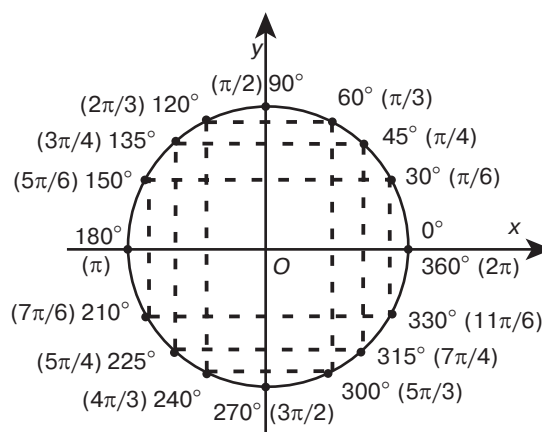
Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад}$$



Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Рadiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ЧИСЛА

Основы тригонометрии

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

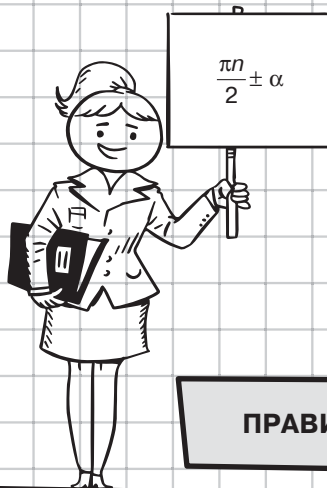
$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Знак выражения определяется по четверти (см. с. 12).

а) $2 - \sin^2 x - \cos^2 x = 2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 - 1 = 1;$

б) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{ctg}^2 t = (\sin^2 t + \cos^2 t) + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t};$

в) $\operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg} x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = -1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = -(1 + \operatorname{tg}^2 x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.$



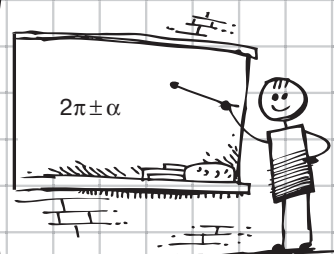
ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, где $n \in \mathbb{Z}$, то такое тригонометрическое выражение можно привести к более простому виду, используя формулы приведения.

ПРАВИЛА ЗАПИСИ ФОРМУЛ ПРИВЕДЕНИЯ

1

В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть, при условии, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

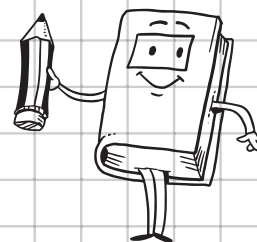


2

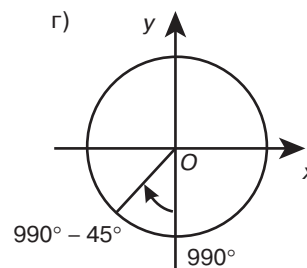
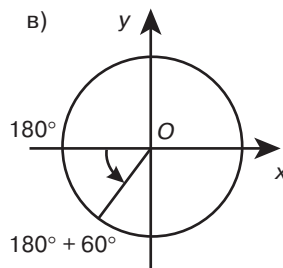
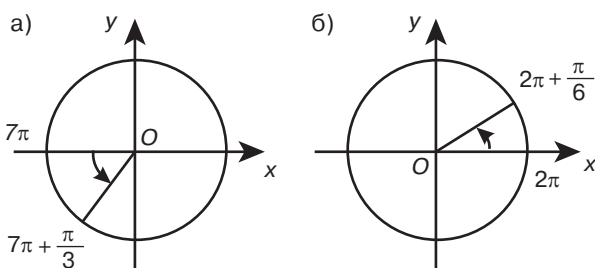
Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.

3

Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).



Найдите значение выражения.



$$\text{а) } \sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \sin\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{в) } \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} = -0,5;$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} 945^\circ = \operatorname{ctg}(990^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

а) $6 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 3 \cdot (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) =$
 $= 3 \cdot \sin(2 \cdot 15^\circ) = 3 \sin 30^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5;$

б) $\frac{6 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = 3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = 3 \cdot \operatorname{tg}(2 \cdot 15^\circ) =$
 $= 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$

ЛОГАРИФМЫ

$$\log_a b$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют число c , такое, что $b = a^c$.

$$c = \log_a b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^c = c$$

$$a^{\log_a b} = b$$

а) $81^{\log_3 5} = (3^4)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4 = 5^4 = 625;$

б) $7^{\frac{1}{2} \log_7 16} = \left(7^{\log_7 16}\right)^{\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{2}} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = 4;$

в) $\log_3 \log_5 125 = \log_3 3 = 1$, т. к. $\log_5 125 = 3;$

г) $7^{\log_7 3 + 1} = 7^{\log_7 3} \cdot 7^1 = 3 \cdot 7 = 21.$

ЛОГАРИФМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО, СТЕПЕНИ

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число.

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$$

а) $\log_4 3^{\frac{1}{2}} + \log_4 4^{\frac{4}{7}} = \log_4 \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{4}{7}}\right) =$
 $= \log_4 \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{32}{7}\right) = \log_4 16 = 2;$

б) $\log_{12} \sqrt[4]{144} = \log_{12} (144)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_{12} 144 =$
 $= \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} = 0,5;$

в) $\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{(3)^{\frac{1}{2}}} 27 = 2 \log_3 27 =$
 $= 2 \log_3 3^3 = 2 \cdot 3 \cdot \log_3 3 = 6 \cdot 1 = 6;$

г) $\log_3 3\sqrt{3} = \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3} = 1 + \log_3 3^{\frac{1}{2}} =$
 $= 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 1,5;$

д) $\log_2 81 - 2 \log_2 3 + \log_2 \frac{2}{9} = \log_2 81 -$
 $-\log_2 3^2 + \log_2 \frac{2}{9} = \log_2 \left(81 \cdot 9 \cdot \frac{2}{9}\right) = \log_2 2 = 1.$

ДЕСЯТИЧНЫЙ И НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМЫ, ЧИСЛО e

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. Обозначают $\lg a$ вместо $\log_{10} a$.