

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

на примерах

- *Классическая теория и методы проецирования*
- *Современный подход к изучению свойств геометрических объектов*
- *Ортогональный чертёж — первый шаг развития пространственного воображения*
- *Формализованные алгоритмы решения типовых задач*
- *Согласование ортогональных чертежей с наглядными изображениями*

Павел Талалай

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ на примерах

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2011

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73
Т16

Талалай П. Г.

Т16 Начертательная геометрия на примерах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. —
288 с.: ил. — (Учебное пособие)

ISBN 978-5-9775-0641-0

Книга посвящена изучению одной из базовых дисциплин технического образования — начертательной геометрии. Рассматриваются способы и методы выполнения изображений различных объектов при помощи ортогонального проецирования, решения задач начертательной геометрии как традиционным методом, так и в виде определенного алгоритма, основанного на формальной логике. Приведен теоретический и практический материал, позволяющий не только изучить теорию получения изображений, но и в пошаговом режиме решать типовые задачи. Весь теоретический материал, а также примеры решения задач проиллюстрированы. Рассматривается современная система обозначения проекций.

Для студентов и преподавателей технических вузов и техникумов

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Юрий Рожко</i>
Компьютерная верстка	<i>Натальи Смирновой</i>
Корректор	<i>Виктория Пиотровская</i>
Дизайн серии	<i>Игоря Цырульникова</i>
Оформление обложки	<i>Елены Беляевой</i>
Фото	<i>Кирилла Сергеева</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 29.10.10.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,22.

Тираж 1500 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	1
Принятые обозначения и символы	2
ГЛАВА 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ.....	5
1.1. Методы проецирования	5
1.2. Эпюр. Проецирование точки.....	8
<i>Пример 1.</i> Построить проекции точки $B (-20; -30; 10)$	11
<i>Пример 2.</i> Построить третью проекцию точки A по двум заданным.....	12
1.3. Точки общего и частного положения.....	13
1.4. Четверти и октанты	15
<i>Пример 3.</i> Определить, в каких октантах находятся точки D и E	17
ГЛАВА 2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ	19
2.1. Проекция отрезка прямой линии. Точка на прямой	19
2.2. Прямые частного положения	20
2.2.1. Прямые уровня.....	20
2.2.2. Проецирующие прямые	22
2.3. Определение натуральной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника	23
<i>Пример 4.</i> Определить натуральную величину отрезка AB и угол наклона прямой к плоскости π_1	26
2.4. Следы прямой	27
<i>Пример 5.</i> Построить проекции следов прямой AB	29
2.5. Взаимное положение двух прямых.....	31
ГЛАВА 3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ	33
3.1. Способы задания плоскости.....	33
3.1.1. Общие случаи задания плоскости	33
3.1.2. Плоские фигуры.....	35
3.1.3. Следы плоскости.....	36

3.2. Плоскости частного положения	38
3.2.1. Проецирующие плоскости	38
3.2.2. Плоскости уровня	40
3.3. Проецирование плоских углов	42
3.4. Прямая в плоскости	44
3.4.1. Общие случаи принадлежности прямой плоскости	44
<i>Пример 6.</i> Построить три следа плоскости α , заданной двумя пересекающимися прямыми AB и CD	45
3.4.2. Прямая в плоскости частного положения	48
3.4.3. Прямые частного положения в плоскости	49
<i>Пример 7.</i> Через точку B построить линию наибольшего ската плоскости, заданной треугольником ABC	53
3.5. Точка в плоскости	54
<i>Пример 8.</i> По заданной фронтальной проекции треугольника ABC , принадлежащей плоскости α , построить его горизонтальную проекцию	55

ГЛАВА 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ ИЛИ С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

4.1. Взаимное положение прямой и плоскости или двух плоскостей	57
4.2. Прямая, параллельная плоскости	58
4.3. Параллельные плоскости	60
<i>Пример 9.</i> Построить следы плоскости β , проходящей через данную точку K и параллельной плоскости α	61
4.4. Пересекающиеся плоскости	62
4.5. Прямая, пересекающая плоскость	65
4.6. Определение взаимной видимости геометрических элементов	67
4.7. Пересечение плоских фигур	69
<i>Пример 10.</i> Построить линию пересечения плоскостей: одна из плоскостей задана двумя пересекающимися прямыми AB и BC , а другая — двумя параллельными прямыми EF и GH	72
4.8. Прямая, перпендикулярная плоскости	73
<i>Пример 11.</i> Определить натуральную величину расстояния от точки K до заданной плоскости α	75
4.9. Взаимно перпендикулярные плоскости	77

ГЛАВА 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

5.1. Общие сведения о способах преобразования проекций	79
5.2. Способ вращения	79
5.2.1. Основы способа вращения	79
5.2.2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций	80
Вращение точки	80

Вращение отрезка.....	81
Вращение плоскости.....	83
<i>Пример 12.</i> Способом вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, совместить прямую AB с заданной плоскостью α	85
5.2.3. Плоскопараллельное перемещение.....	89
<i>Пример 13.</i> Методом плоскопараллельного перемещения определить натуральную величину треугольника ABC	90
5.2.4. Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций.....	91
5.2.5. Способ совмещения (вращение плоскости вокруг одного из ее следов).....	93
5.3. Метод перемены плоскостей проекций.....	96
5.3.1. Основы метода перемены плоскостей проекций.....	96
5.3.2. Примеры решения задач методом перемены плоскостей проекций.....	98
<i>Задача 1.</i> Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала параллельна плоскости проекций.....	98
<i>Задача 2.</i> Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.....	99
<i>Задача 3.</i> Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.....	100
<i>Задача 4.</i> Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала параллельна плоскости проекций.....	102
<i>Пример 14.</i> Определить расстояние от точки A до прямой BC	103
<i>Пример 15.</i> Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AB и CD	105
<i>Пример 16.</i> Определить натуральную величину расстояния от точки K до плоскости, заданной треугольником ABC	106
5.4. Определение натуральной величины углов.....	108
5.4.1. Произвольный плоский угол.....	108
5.4.2. Угол между прямой и плоскостью.....	109
5.4.3. Угол между двумя пересекающимися плоскостями.....	111
<i>Пример 17.</i> Методом перемены плоскостей проекций определить угол между двумя пересекающимися плоскостями α и β	112
ГЛАВА 6. КРИВЫЕ ЛИНИИ.....	115
6.1. Общие сведения о кривых линиях.....	115
6.2. Особые точки и кривизна плоской кривой линии.....	119
6.3. Построение лекальных кривых.....	122
6.3.1. Эволюта и эвольвента.....	122
6.3.2. Кривые линии второго порядка.....	123
Эллипс.....	124
Гипербола.....	126
Парабола.....	129

6.3.3. Кривые линии третьего порядка	130
Декартов лист	130
Циссоида Диоклеса	131
Строфоида	132
6.3.4. Кривые линии четвертого порядка	133
6.3.5. Спирали	134
6.3.6. Циклические кривые	135
Циклоида	135
Эпициклоида	136
Гипоциклоида	137
6.3.7. Графики тригонометрических функций	138
6.3.8. Составные лекальные кривые	139
6.4. Циркульные кривые линии	140
6.4.1. Окружность	140
6.4.2. Коробовая линия	141
Эвольвента многоугольника	141
Овалы и овоиды	142
6.4.3. Фигуры, ограниченные циркульными кривыми	143
6.5. Пространственные кривые	145
6.5.1. Общие сведения о пространственных кривых линиях	145
6.5.2. Винтовые линии	150
Свойства винтовых линий	150
Цилиндрическая винтовая линия	150
Коническая винтовая линия	152
Глобoidная винтовая линия	154
Глава 7. Многогранники	155
7.1. Общие сведения о геометрических телах и многогранниках	155
7.2. Пирамида и бипирамида	157
7.3. Призма и призматойд	159
7.3.1. Призма	159
7.3.2. Параллелепипед	160
7.3.3. Призматойд	161
7.3.4. Антипризма	161
7.4. Правильные и полуправильные многогранники	162
Глава 8. Кривые поверхности	165
8.1. Образование и типы кривых поверхностей	165
8.2. Поверхности второго порядка	168
8.2.1. Общие сведения о поверхностях второго порядка	168
8.2.2. Эллипсоид	169
8.2.3. Гиперболоид	170
8.2.4. Параболоид	173

8.2.5. Цилиндрическая поверхность	175
8.2.6. Коническая поверхность	177
8.3. Поверхности вращения	178
8.3.1. Общие сведения о поверхностях вращения	178
8.3.2. Тор	180
8.4. Поверхности с плоскостью параллелизма	181
8.5. Поверхности с ребром возврата	183
8.6. Циклические поверхности	184
8.7. Графические поверхности	185
8.8. Поверхности переноса	186
8.9. Винтовые поверхности	187
ГЛАВА 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.....	191
9.1. Пересечение геометрических тел плоскостью	191
9.1.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел плоскостью	191
9.1.2. Пересечение многогранников плоскостью	191
Пересечение пирамиды плоскостью	192
Пересечение призмы плоскостью	195
<i>Пример 18.</i> Построить линию пересечения прямой правильной	
треугольной призмы плоскостью α	197
9.1.3. Пересечение тел с кривыми поверхностями плоскостью	199
Пересечение конуса плоскостью	201
Пересечение цилиндра плоскостью	203
9.2. Пересечение прямой с поверхностью геометрического тела	204
9.2.1. Пересечение прямой с поверхностью многогранника	204
Пересечение прямой с поверхностью пирамиды	205
Пересечение прямой с поверхностью призмы	206
9.2.2. Пересечение прямой с кривой поверхностью	208
Пересечение прямой с поверхностью конуса	209
Пересечение прямой с поверхностью цилиндра	210
<i>Пример 19.</i> Построить точки пересечения прямой LT	
с поверхностью сферы	212
9.3. Взаимное пересечение поверхностей геометрических тел	214
9.3.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел	214
9.3.2. Взаимное пересечение поверхностей многогранников	214
9.3.3. Взаимное пересечение кривой и многогранной поверхностей	217
9.3.4. Взаимное пересечение кривых поверхностей	219
Линейчатые поверхности пересекаются по прямым	221
Линейчатые поверхности пересекаются по окружностям	221
Одна линейчатая поверхность пересекается по прямым линиям,	
а другая — по окружности	223
Способ вспомогательных секущих сфер	224
Некоторые частные случаи взаимного пересечения поверхностей	
вращения	226

ГЛАВА 10. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	229
10.1. Общие сведения о разворачивании поверхностей.....	229
10.2. Развертывание многогранных поверхностей.....	230
10.2.1. Развертывание поверхности пирамиды.....	230
10.2.2. Развертывание поверхности призмы.....	232
Развертывание поверхности прямой призмы.....	232
Развертывание наклонной призмы.....	232
Метод нормального сечения.....	233
Метод раскатки.....	235
<i>Пример 20.</i> Построить развертку поверхностей пересекающихся пирамиды и призмы и нанести на них линию пересечения.....	237
10.3. Развертывание линейчатых поверхностей.....	241
10.3.1. Развертывание конической поверхности.....	241
Развертывание поверхности прямого кругового конуса.....	241
Развертывание поверхности наклонного конуса.....	243
10.3.2. Развертывание цилиндрической поверхности.....	244
Развертывание поверхности прямого кругового цилиндра.....	244
Развертывание наклонного цилиндра.....	246
10.4. Условное разворачивание поверхностей вращения.....	248
Способ вспомогательных цилиндров.....	248
Способ вспомогательных конусов.....	250
ГЛАВА 11. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ.....	251
11.1. Общие сведения об аксонометрических проекциях.....	251
11.2. Прямоугольные проекции.....	254
11.2.1. Прямоугольная изометрическая проекция.....	254
Точка.....	255
Отрезок.....	255
Плоскость.....	256
Правильный шестиугольник.....	256
Окружность.....	256
Многогранник.....	257
11.2.2. Прямоугольная диметрическая проекция.....	258
11.3. Косоугольные проекции.....	260
11.3.1. Косоугольная фронтальная изометрическая проекция.....	260
11.3.2. Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция.....	260
11.3.3. Косоугольная фронтальная диметрическая проекция.....	261
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	263
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	265

Введение

Потребность в отображении действительности появилась у человека давно. Об этом свидетельствуют многочисленные изображения первобытного человека на стенах пещер и камнях, на предметах и орудиях труда. С развитием человечества совершенствовалась и техника передачи различных символов в виде письменности, рисунков, схем. В Древнем Китае, например, была разработана всеобъемлющая знаковая система, где каждому предмету или явлению соответствовал особый знак — иероглиф. В Древнем Египте при возведении сооружений архитекторы использовали чертежи в виде планов и фасадов.

Основные правила и методы построения изображений (планов зданий, земельных угодий, крепостных укреплений) по законам геометрии были разработаны в эпоху античности. В Древней Греции, за 300 лет до нашей эры, сделаны первые шаги к научному обоснованию метода центрального проецирования. В "Началах" Евклида содержатся 12 аксиом и 61 теорема об условиях "видения" предметов.

Расцвет классической культуры сменился застоєм, и только в эпоху Возрождения, благодаря усилиям школ живописи и архитектуры Италии, Нидерландов и Германии, в истории изображения предметов начинается новый период развития. К этому времени относится введение целого ряда основных понятий метода проецирования.

С развитием архитектуры, машинного производства, горной промышленности к изображениям предметов стали предъявлять все более высокие требования, что и привело к необходимости обобщения и систематизации знаний по "теории изображений". Работа знаменитого французского геометра и инженера периода Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818) "*Geometrie Descriptive*" (рис. В1) представляет собой первое систематическое изложение общего метода изображения пространственных фигур на плоскости, поднявшее *начертательную геометрию* на уровень самостоятельной научной дисциплины.

Преподавание начертательной геометрии в России началось уже в первые годы XIX в. в Корпусе инженеров путей сообщения и чуть позже в Горном кадетском корпусе. Первый русский профессор начертательной геометрии Я. И. Севастьянов (1796—1849) в 1821 г. составил курс "Основания начертательной геометрии", ставший классическим учебным пособием по этому предмету. В настоящее время начертательная геометрия является базовой общетехнической дисциплиной, составляющей основу высшего технического образования.



Рис. В1. Г. Монж — основоположник современной начертательной геометрии

Основное содержание книги посвящено изложению классических положений начертательной геометрии, основанных на ортогональном проецировании и являющихся базой для построения проекционных чертежей. Было бы, однако, большой ошибкой ограничивать значение начертательной геометрии лишь рамками теоретической основы черчения. Ее методы дают возможность решать самые сложные проблемы в различных областях: машиностроении, прикладных науках, химии, физике и др.

Принятые обозначения и символы

В книге используются условные обозначения и математические символы, являющиеся общепринятыми в современной учебной литературе по начертательной геометрии и инженерной графике. Объяснения используемых обозначений приведены далее в табл. В1—В3.

Таблица В1. Графические обозначения на эпюрах и чертежах

Начертание	Пояснение
	Точка
	Видимый контур
	Невидимый контур, линии проекционной связи
	Вспомогательные построения, оси проекций, размерные и выносные линии, линии штриховки и т. д.
	Знак перпендикулярности
	Знак параллельности
	Знак равных расстояний

Таблица В2. Условные обозначения на эпюрах и чертежах

Обозначение	Пояснения
A, B, C, \dots , а также $1, 2, 3, \dots$	Точки в пространстве или на плоскости
a, b, c, \dots , а также AB, CD, \dots	Линии в пространстве или на плоскости
$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$	Плоскости, поверхности, углы
π_0	Произвольная плоскость проекций
π_1, π_2, π_3	Горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости проекций
π_4, π_5, \dots	Дополнительные плоскости проекций
x, y (y_{π_1} и y_{π_3}), z	Координатные оси, оси проекций, аксонометрические оси
$\pi_2/\pi_1, \pi_1/\pi_4, \dots$	Оси проекций при введении дополнительных плоскостей проекций
A_0, B_0, C_0, \dots или $A_1^0, A_2^0, A_3^0, \dots$	Проекции точек на произвольную плоскость проекций
$A', B', C', \dots; A'', B'', C'', \dots;$ A''', B''', C''', \dots	Проекции точек на горизонтальную, фронтальную и профильную плоскости проекций
$A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, \dots; A^V, B^V, C^V, \dots$	Проекции точек на дополнительные плоскости проекций π_4, π_5, \dots
$h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha}, p'''_{0\alpha}$	Горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости α
$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	Точки схода следов плоскости α
$\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}', \dots; \bar{\bar{A}}', \bar{\bar{B}}', \bar{\bar{C}}', \dots$	Проекции точек после первого и второго преобразований
$\overline{h'_{0\alpha}}, \overline{f''_{0\alpha}}, \overline{p'''_{0\alpha}}, \dots; \overline{\bar{h}'_{0\alpha}}, \overline{\bar{f}''_{0\alpha}}, \overline{\bar{p}'''_{0\alpha}}$	Следы плоскости α после первого и второго преобразований
d, D, r, R	Диаметры и радиусы окружностей или сфер
i, i', i''	Оси (вращения, симметрии и пр.) и их проекции

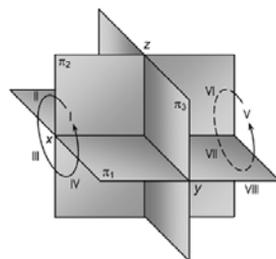
Таблица В3. Математические символы

Символ	Пояснение
(AB)	Прямая, проходящая через точки A и B
$[AB)$	Луч с началом в точке A
$ AB $	Расстояние от точки A до точки B (длина отрезка AB)

Таблица В3 (окончание)

Символ	Пояснение
$[AB]$	Отрезок прямой, ограниченный точками A и B
$\angle ABC$	Угол с вершиной в точке B
$\triangle ABC$	Треугольник с вершинами в точках A , B и C
$\cup AB$	Дуга, ограниченная точками A и B
$=$	Результат геометрического построения, знак равенства
\equiv	Знак совпадения геометрических объектов
\parallel	Знак параллельности
\perp	Знак перпендикулярности
\in	Знак принадлежности
\cap	Знак пересечения

ГЛАВА 1



Образование проекций

1.1. Методы проецирования

Начертательная геометрия — один из разделов геометрии, в котором свойства пространственных фигур изучают по их изображениям на той или иной поверхности. В качестве поверхности проецирования выбирают, как правило, плоскость.

В начертательной геометрии *чертеж* — основной инструмент решения различных пространственных задач. К выполняемому чертежу предъявляется ряд особых требований, четыре из которых являются наиболее существенными. Чертеж должен быть:

- ◆ наглядным;
- ◆ обратимым;
- ◆ достаточно простым;
- ◆ точным.

Остановимся более подробно на *обратимости* чертежа. Под этим свойством понимается возможность точного воспроизведения формы и размеров предмета по его изображению. Действительно, для всех видов технических чертежей это требование является особенно важным, т. к. по чертежу в машиностроении изготавливается та или иная деталь, в горном деле осуществляется проходка горных выработок, в электротехнике — расчет длины электрических проводников и т. д.

Основным методом получения изображений в начертательной геометрии является *проецирование*. Чтобы понять сущность проецирования, обратимся к рис. 1.1.

Пусть в пространстве имеется некоторая плоскость π_0 , которую будем называть *плоскостью проекций*. Выберем какую-либо точку S , не лежащую в плоскости проекций. Эта точка называется *центром проецирования*. Чтобы спроецировать некоторую точку A пространства на плоскость π_0 , необходимо через центр проецирования S провести *проецирующую прямую* SA до ее пересечения в точке A_0 с плоскостью π_0 .

При этом точка A_0 называется *проекцией* точки A на плоскости π_0 . *Проекцией фигуры* называется совокупность проекций всех ее точек на выбранную поверхность проецирования (например, на рис. 1.1 проекцией треугольника $B CD$ на плоскость π_0 является треугольник $B_0 C_0 D_0$).

кости π_0 является треугольник $B_0C_0D_0$). Описанный метод проецирования путем проведения проецирующих прямых через точки заданной фигуры и центр проецирования называется *центральной*.

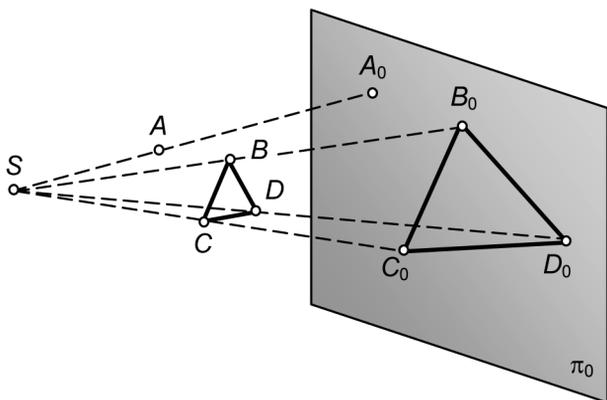


Рис. 1.1. Схема центрального проецирования

Если проецирование осуществляется из бесконечно удаленной точки пространства (рис. 1.2), то все проецирующие прямые окажутся взаимно параллельными. Этот метод проецирования называется *параллельным*, а направление m , по которому оно осуществляется, — *направлением проецирования*.

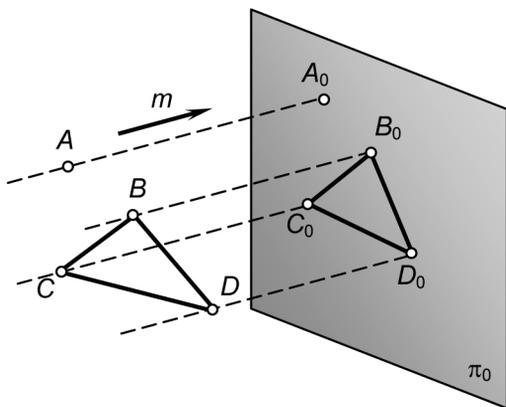


Рис. 1.2. Схема параллельного проецирования

Если направление параллельного проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называется *прямоугольным* или *ортогональным*. Во всех остальных случаях параллельное проецирование называется *косоугольным*.

Изображения, полученные при помощи центрального проецирования, отличаются хорошей наглядностью, что объясняется устройством зрительного аппарата

человеческого глаза. Однако этот метод имеет существенные недостатки. Во-первых, непросто построить само изображение предмета. Во-вторых, построенные проекции имеют низкие метрические свойства, поэтому вследствие значительных искажений, возникающих при данном методе проецирования, определить истинные размеры предмета весьма сложно. По этим причинам способ центрального проецирования имеет ограниченное применение в практике и используется, когда от чертежа требуется, прежде всего, наглядность.

Несмотря на то, что параллельное проецирование, по сравнению с центральным, имеет меньшую наглядность, параллельные проекции, особенно ортогональные, обладают лучшей измеримостью и простотой построения.

Задачи, решаемые методами начертательной геометрии, принято делить на метрические и позиционные.

Метрические задачи имеют целью определение размеров различных предметов по их изображению. К таким задачам относится определение натуральной величины геометрических фигур, расстояний и углов между ними.

Позиционные задачи позволяют определить взаимное расположение различных объектов: точек, прямых линий, плоскостей, пространственных фигур.

Для быстрого и удобного решения пространственных задач в начертательной геометрии используют несколько систем изображений, особенности которых приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Основные системы изображения, используемые при проецировании

Система изображения	Способ проецирования	Поверхность проецирования	Особенности
Эпюр (ортогональный или комплексный чертеж)	Ортогональное	Две или три взаимно перпендикулярные плоскости	Условное совмещение плоскостей проекций с плоскостью чертежа путем их вращения
Проекция с числовыми отметками	Ортогональное	Плоскость	Расстояние до плоскости проекций определяется числовой отметкой
Перспектива	Центральное	Плоскость, цилиндр, сфера	Ограничение максимального угла между проецирующими лучами
АксонOMETрические проекции	Параллельное или центральное	Плоскость	Проецирование вместе с осями координат

Область применения той или иной системы изображений зависит, прежде всего, от целей, которые ставятся при построении чертежа. Из представленных в табл. 1.1 систем наиболее широкое применение в техническом проектировании имеет эпюра (ортогональный или комплексный чертеж). На его основе выпол-

няются рабочие и сборочные чертежи, эскизы деталей, схемы и т. д. Поэтому в дальнейшем изложении курса основное внимание будет уделено именно этому методу построения.

1.2. Эпюр. Проецирование точки

Любой предмет пространства можно рассматривать как определенную совокупность отдельных точек этого пространства, поэтому для изображения различных предметов необходимо научиться строить изображения точки пространства.

Представим в пространстве три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.3):

- ◆ π_1 — горизонтальную плоскость проекций;
- ◆ π_2 — фронтальную плоскость проекций;
- ◆ π_3 — профильную плоскость проекций.

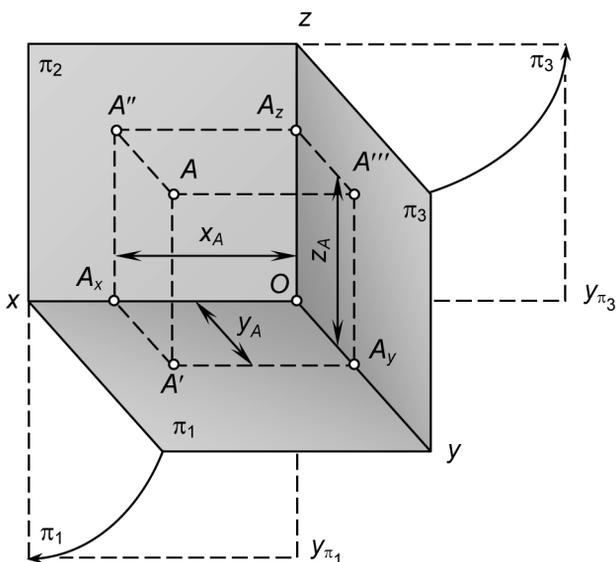


Рис. 1.3. Точка A в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей

Плоскости проекций пересекаются по прямым, которые называются *осями проекций* и обозначаются x , y и z . Точка O — точка пересечения всех трех осей проекций — называется *началом координат*.

Для наглядного изображения плоскостей проекций взята косоугольная диметрическая проекция, известная из курсов геометрии и черчения средней школы. В этой проекции ось x расположена горизонтально и направлена положительным лучом влево, ось z — вертикально и направлена положительным лучом вверх, а ось y наклонена к горизонтальной линии под углом 45° и положитель-

ным лучом направлена к наблюдателю. Коэффициент искажения по осям X и Z равен 1, а по оси Y — 0,5.

Представим себе в пространстве некоторую точку A . Чтобы получить проекцию точки A на горизонтальной плоскости проекций, необходимо провести через эту точку проецирующую прямую, перпендикулярную плоскости π_1 , и найти точку пересечения A' этой прямой с плоскостью π_1 . Точка A' называется *горизонтальной проекцией* точки A . Путем ортогонального проецирования точки A на фронтальную и профильную плоскости проекций образуются ее *фронтальная* и *профильная проекции* (соответственно точки A'' и A'''). Образованный проецирующими лучами и отрезками осей параллелепипед называют *параллелепипедом проекций*.

Длины отрезков, измеряемые некоторой установленной единицей длины и равные расстояниям от точки A до горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостей проекций, называются *прямоугольными (декартовыми) координатами*:

- ◆ по оси X — *абсцисса*, равная длине отрезка $X_A = |AA'''|$;
- ◆ по оси Y — *ордината*, равная длине отрезка $Y_A = |AA''|$;
- ◆ по оси Z — *апplikата*, равная длине отрезка $Z_A = |AA'|$.

Три координаты точки однозначно определяют ее положение в пространстве.

Взаимно перпендикулярные плоскости, изображенные на рис. 1.3, дают нам пространственный чертеж. Для получения трех проекций точки в плоскости чертежа плоскости проекций π_1 , π_2 и π_3 условно совмещают с плоскостью чертежа. Это совмещение выполняется следующим образом. Фронтальная плоскость проекций π_2 принимается за плоскость чертежа, горизонтальная плоскость проекций π_1 совмещается с плоскостью чертежа вращением вокруг оси X , а профильная плоскость проекций π_3 — вращением вокруг оси Z . Направление вращения на рис. 3 показано стрелками.

При совмещении плоскости π_1 с плоскостью чертежа положительное направление оси Y совмещается с отрицательным направлением оси Z , а отрицательное направление — с положительным направлением оси Z . На чертеже изображение оси Y принято обозначать Y_{π_1} . При совмещении плоскости π_3 с плоскостью чертежа положительное направление оси Y совмещается с отрицательным направлением оси X , а отрицательное направление — с положительным направлением оси X . На чертеже изображение оси Y принято обозначать Y_{π_3} .

В результате совмещения плоскостей проекций с плоскостью чертежа образуется плоское изображение — *эпюр* (от франц. *epure* — чертеж, проект), или *ортогональный (комплексный) чертеж* (рис. 1.4).

На эпюре изображают только проекции геометрических объектов, а не сами объекты. Любые две проекции точки, изображенные на эпюре, связаны между собой *линией проекционной связи*, перпендикулярной оси проекций (будем обозначать ее штриховой линией):

- ◆ горизонтальная и фронтальная проекции (точки A' и A'') расположены на линии проекционной связи, перпендикулярной оси X ;

- ◇ фронтальная и профильная проекции (точки A'' и A''') — на линии проекционной связи, перпендикулярной оси Z ;
- ◇ горизонтальная и профильная проекции (точки A' и A''') — на линии проекционной связи, перпендикулярной оси Y .

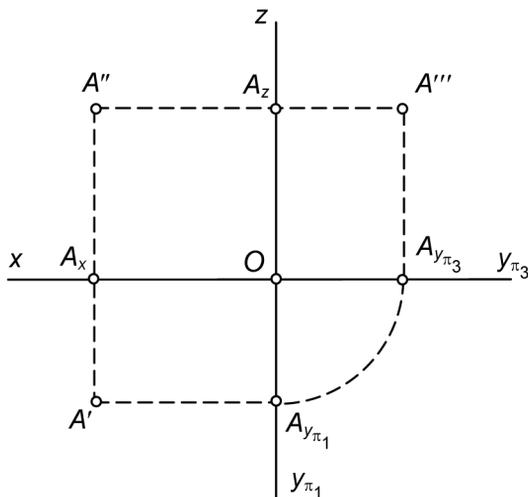


Рис. 1.4. Точка A на эпюре

Вследствие того, что отрезки $OA_{y_{\pi_1}}$ и $OA_{y_{\pi_3}}$ являются изображением одной и той же координаты Y_A , точки $A_{y_{\pi_1}}$ и $A_{y_{\pi_3}}$ связывают дугой окружности с центром в начале координат.

Каждая проекция точки A определяется двумя координатами:

- ◇ горизонтальная проекция A' — координатами X_A, Y_A ;
- ◇ фронтальная проекция A'' — координатами X_A, Z_A ;
- ◇ профильная проекция A''' — координатами Y_A, Z_A .

Две проекции точки, построенные на эпюре, однозначно определяют ее положение в пространстве. По двум проекциям заданной точки можно построить третью, и притом только одну.

Положение точки может быть задано как *графически*, так и *аналитически*. Пример графического изображения точки рассмотрен нами на рис. 1.4. Аналитическая форма задания точки представляет собой числовое выражение трех координат этой точки в выбранных единицах длины (миллиметрах, сантиметрах и других системных или внесистемных единицах).

Поскольку линейные размеры на чертежах указывают в миллиметрах и при этом саму единицу измерения (мм) не проставляют, то запись $A(30; 20; 15)$ будет означать, что $X_A = 30$ мм, $Y_A = 20$ мм, $Z_A = 15$ мм. В случае использования

других единиц измерения необходимо указывать, в каких именно, например, B (1 дм, 4 см, 5 см).

От аналитической формы задания точки легко перейти к графическому изображению этой точки на ортогональном чертеже, и наоборот.

Пример 1.

Построить проекции точки B ($-20; -30; 10$).

1. С учетом знака откладываем на осях проекций координатные отрезки (рис. 1.5):

$$x_B = |OB_x| = -20;$$

$$y_B = |OB_{y_{\pi_1}}| = |OB_{y_{\pi_3}}| = -30;$$

$$z_B = |OB_z| = 10.$$

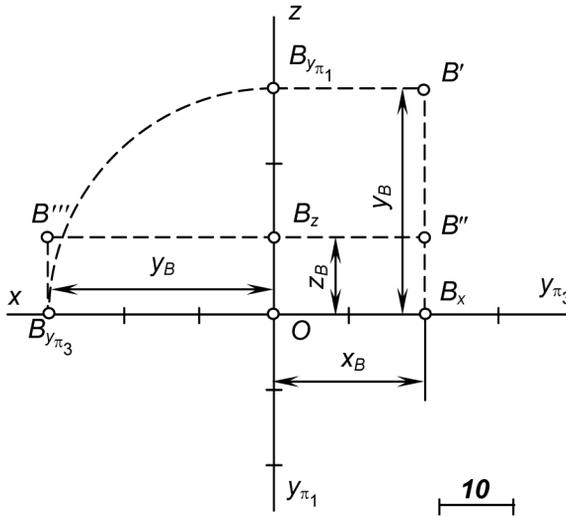


Рис. 1.5. Построение проекций точки B , заданной аналитически

2. Отмечаем точки $B_x, B_{y_{\pi_1}}, B_{y_{\pi_3}}, B_z$.
3. Из построенных точек $B_x, B_{y_{\pi_1}}, B_{y_{\pi_3}}, B_z$ проводим линии проекционной связи, перпендикулярные осям проекций, и на их пересечениях отмечаем проекции точки B :

$$B' = (B_x B' \perp x) \cap (B_{y_{\pi_1}} B' \perp y_{\pi_1});$$

$$B'' = (B_x B'' \perp x) \cap (B_z B'' \perp z);$$

$$B''' = (B_{y_{\pi_3}} B''' \perp y_{\pi_3}) \cap (B_z B''' \perp z).$$

Пример 2. Построить третью проекцию точки A по двум заданным.

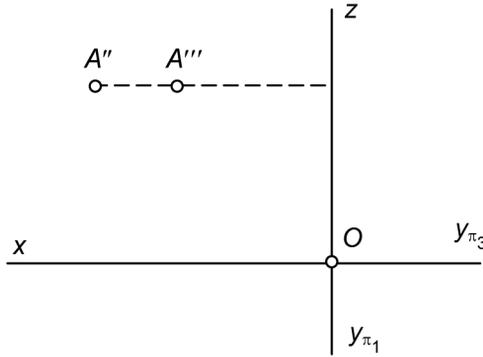


Рис. 1.6. Заданные проекции точки A

1. Даны фронтальная и профильная проекции точки A (рис. 1.6): фронтальная проекция A'' определяется координатами $x_A = |OA_x|$, $z_A = |OA_z|$,

$$A'' = (A_x A'' \perp x) \cap (A_z A'' \perp z);$$

профильная проекция A''' определяется координатами $y_A = |OA_{y_{\pi_3}}|$, $z_A = |OA_z|$,

$$A''' = (A_{y_{\pi_3}} A''' \perp y_{\pi_3}) \cap (A_z A''' \perp z).$$

2. Из имеющихся проекций проводим линии проекционной связи, перпендикулярные осям проекций, и определяем координатные отрезки OA_x , $OA_{y_{\pi_3}}$, OA_z , равные соответствующим координатам точки A (рис. 1.7):

$$|OA_x| = x_A, |OA_{y_{\pi_3}}| = y_A, |OA_z| = z_A.$$

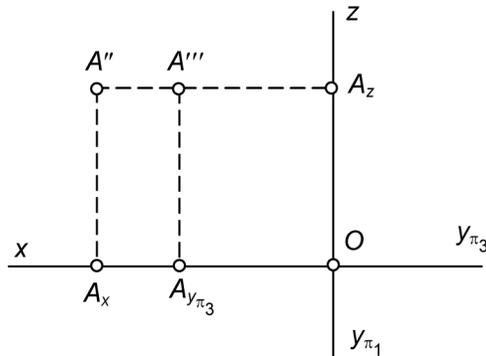


Рис. 1.7. Определение координатных отрезков точки A

3. На пересечении линий проекционной связи с осями проекций отмечаем точки $A_x, A_{y_{\pi_3}}, A_z$.
4. Строим третью, горизонтальную проекцию точки $A - A'$ (рис. 1.8). Горизонтальная проекция A' определяется координатами

$$x_A = |OA_x|, y_A = |OA_{y_{\pi_1}}|,$$

$$A' = (A_x A' \perp x) \cap (A_{y_{\pi_1}} A' \perp y_{\pi_1}).$$

При определении точки $A_{y_{\pi_1}}$ по $A_{y_{\pi_3}}$ перенос осуществляется с оси y_{π_3} на соответствующее по знаку направление оси y_{π_1} .

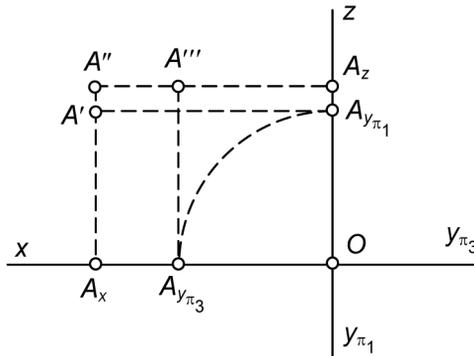


Рис. 1.8. Построение третьей проекции точки A

1.3. Точки общего и частного положения

В зависимости от расположения точки относительно плоскостей проекций различают:

- ◆ *точки общего положения*, не принадлежащие плоскостям проекций (к ним относятся все рассмотренные точки предыдущего раздела);
- ◆ *точки частного положения*, лежащие в плоскостях проекций π_1, π_2, π_3 , на осях проекций x, y, z или в начале координат.

У точки общего положения все три координаты отличны от нуля. Одна или несколько координат точки частного положения равны нулю:

- ◆ если точка лежит в плоскости проекций, то ее координата по оси, перпендикулярной этой плоскости проекций, равна нулю;
- ◆ если точка лежит на оси проекций, то две другие ее координаты равны нулю;
- ◆ если точка лежит в начале координат, то естественно, что все три координаты точки равны нулю.

Рассмотрим некоторые частные случаи положения точки: когда точка лежит в какой-нибудь плоскости проекций или на какой-нибудь оси проекций.

Точка B на рис. 1.9 принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция B' этой точки совпадает с самой точкой, фронтальная проекция B'' лежит на оси x , а профильная проекция B''' — на оси y . Координата точки B по оси z равна нулю, и, следовательно, точка B_z лежит в начале координат.

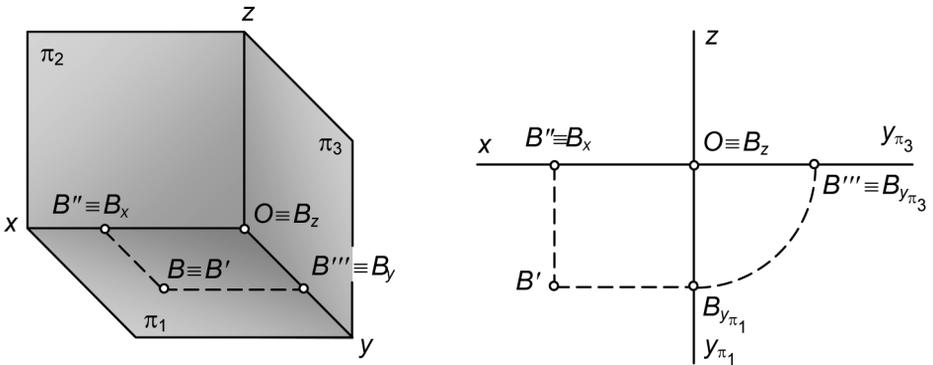


Рис. 1.9. Точка B , лежащая в плоскости π_1 , — в аксонометрии (слева) и на эпюре (справа)

Точка C на рис. 1.10 лежит на оси y . С самой точкой совпадают ее горизонтальная C' и профильная C''' проекции, причем на ортогональном чертеже горизонтальная проекция лежит на оси y_{π_1} , а профильная — на оси y_{π_3} . Фронтальная проекция C'' лежит в начале координат.

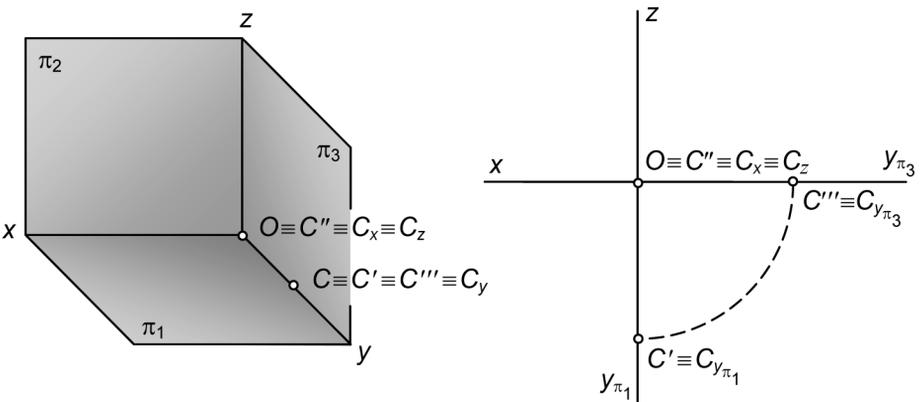


Рис. 1.10. Точка C , лежащая на оси y , — в аксонометрии (слева) и на эпюре (справа)

1.4. Четверти и октанты

Большую часть задач начертательной геометрии можно решить, имея не три, а две проекции геометрических объектов — горизонтальную и фронтальную. Такие чертежи, с двумя проекциями, называют *двухпозиционными*. Плоскости проекций π_1 и π_2 являются неограниченными поверхностями и при взаимном пересечении образуют четыре двугранных угла, которые называют *четвертями* или *квadrантами*. Четверти принято обозначать римскими цифрами и отсчитывать так, как показано на рис. 1.11.

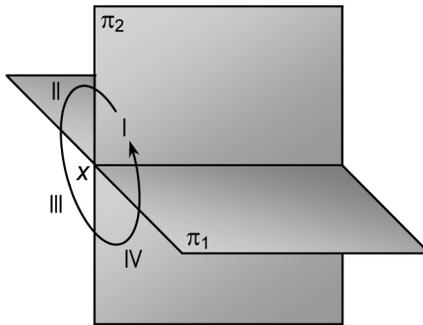


Рис. 1.11. Обозначение четвертей

На рис. 1.12 точка A находится в I-й четверти, точка B — во II-й, точка C — в III-й, а точка D — в IV-й четверти. Точка D одинаково удалена от плоскостей проекций π_1 и π_2 , поэтому проекции D' и D'' совпали между собой. Знаки координат в различных четвертях приведены в табл. 1.2 (эта часть таблицы тонирована).

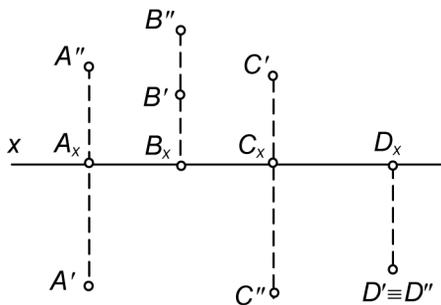


Рис. 1.12. Точки A , B , C и D , заданные в двух проекциях

Таблица 1.2. Знаки прямоугольных координат в различных четвертях и октантах

Номер четверти или октанта	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Чаще всего на практике имеет место применение первой четверти пространства, поэтому геометрические объекты при решении задач чаще всего располагают именно здесь.

Тем не менее, ряд задач целесообразно решать, имея три проекции объекта, а некоторые задачи вообще невозможно решить без третьей проекции (как, например, в случаях с осевой плоскостью, о чем будет рассказано в дальнейшем изложении). Чертеж, в котором заданы три проекции точек и имеется возможность определить все три координаты этих точек, называют *трехпозиционным*.

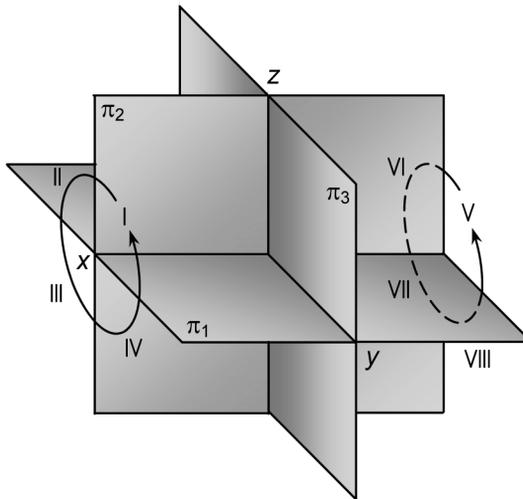


Рис. 1.13. Обозначение октантов

Плоскости проекций π_1 , π_2 и π_3 при взаимном пересечении делят пространство на восемь трехгранных углов, или *октантов* (от лат. *octans* — восьмая часть). Нумерация октантов в полупространствах приведена на рис. 1.13. Как видно, четверти нумеруются как I—IV-й октанты.

Знаки координат в каждом из октантов указаны в табл. 1.2. Геометрические элементы, расположенные в I-й четверти или в I-м октанте, считаются "видимыми".

Пример 3. Определить, в каких октантах находятся точки D и E (рис. 1.14).

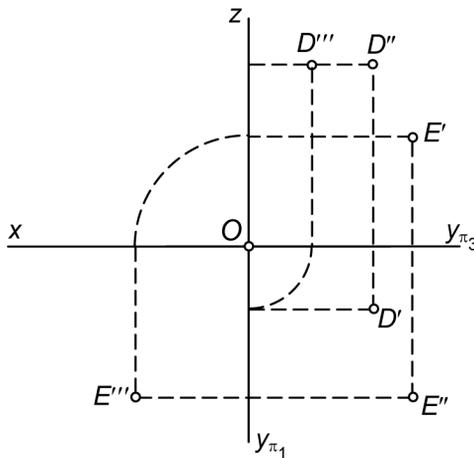
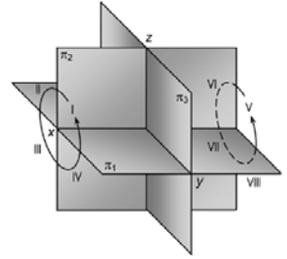


Рис. 1.14. Проекции точек D и E

1. Начнем с определения положения точки D . Проанализируем расположение ее фронтальной проекции D'' (логично начинать рассуждения именно с фронтальной проекции, поскольку плоскость π_2 , в которой лежит эта проекция, не вращается, а принимается за плоскость чертежа). Проекция D'' лежит выше оси x и правее оси z , следовательно сама точка D лежит выше плоскости π_1 и справа от плоскости π_3 . Это возможно, если эта точка будет находиться в одном из двух октантов — V-м или VI-м.
2. Теперь обратимся к горизонтальной проекции D' : она лежит в плоскости проекций π_1 , совмещенной с плоскостью чертежа. Мысленно повернем на 90° эту плоскость вместе с D' , вращая ее вокруг оси x так, чтобы нижняя полуплоскость перемещалась на нас, а верхняя — в противоположном от нас направлении. Горизонтальная проекция D' окажется в ближней к нам полуплоскости, и следовательно, сама точка D тоже будет находиться в ближнем к нам угле пространства, т. е. в V-м октанте.

3. Положение точки D можно определить и другим способом, механически определяя знаки координат. Горизонтальная проекция D' имеет координаты x ("минус") и y ("плюс"), фронтальная проекция D'' — координаты x ("минус") и z ("плюс"). По трем знакам — "минус", "плюс", "плюс" — и с помощью табл. 1.2 определяем, что точка D находится в V-м октанте.
4. Перейдем к точке E . Ее фронтальная проекция E'' лежит ниже оси x и правее оси z , следовательно, сама точка может лежать или в VII-м, или в VIII-м октантах. Мысленно поворачиваем на 90° горизонтальную проекцию E' вместе с плоскостью π_1 вокруг оси x , и эта проекция окажется в дальней от нас полуплоскости. Следовательно, сама точка E будет находиться в дальнем от нас, VII-м октанте. Эти рассуждения подтверждаются знаками координат x , y и z — "минус", "минус", "минус".

ГЛАВА 2



Проецирование прямой линии

2.1. Проекция отрезка прямой линии. Точка на прямой

Прямую линию можно рассматривать как совокупность точек. Из школьного курса геометрии известно, что через две точки можно провести прямую и притом только одну. Пусть нам даны на эюре точки A и B . Две проекции каждой из этих точек однозначно определяют их положение в пространстве (рис. 2.1). Если мы соединим одноименные проекции точек, то получим *проекции прямой*. Точки A и B ограничивают отрезок прямой и определяют положение этой прямой как бесконечной линии.

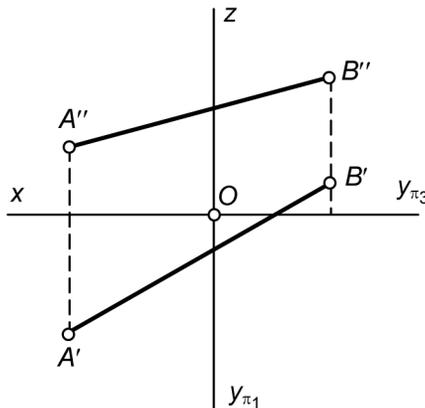


Рис. 2.1. Проекция прямой AB на эюре

Таким образом, прямая линия на эюре может быть задана двумя проекциями отрезка, принадлежащего этой прямой. По двум проекциям отрезка всегда можно построить его третью проекцию и притом только одну.

Если прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то она пересекает все плоскости проекций и не проецируется ни на одну из них в натуральную величину. Такую прямую называют *прямой общего положения*. Ни одна из ее проекций не параллельна осям. Прямая AB на рис. 2.1 — это прямая общего положения.

Точка принадлежит прямой линии, если ее проекции лежат на одноименных проекциях этой линии. Если на прямой AB мы выберем какую-либо точку C , то проекции этой точки будут лежать на одноименных проекциях прямой (рис. 2.2).

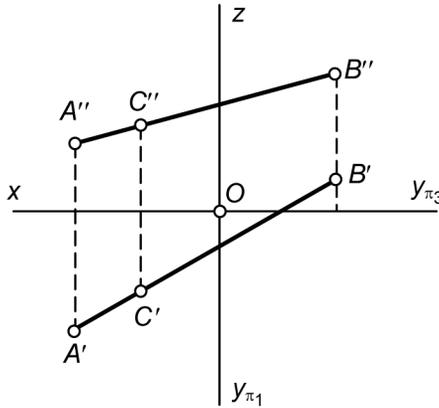


Рис. 2.2. Точка C , принадлежащая прямой AB

Таким образом, если точка принадлежит заданной прямой, то для построения проекций этой точки на эпюре необходимо и достаточно знать положение хотя бы одной проекции точки. Недостающие проекции легко найти в пересечении линий проекционной связи с соответствующими проекциями прямой.

Одним из свойств параллельного проецирования является то, что отношение отрезков прямой равно отношению их проекций. На рис. 2.2 деление проекций $A''B''$ и $A'B'$ точками C'' и C' соответствует делению в пространстве отрезка AB точкой C в том же отношении:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} = \frac{|A''C''|}{|C''B''|}.$$

2.2. Прямые частного положения

Прямая, параллельная одной или двум плоскостям проекций, называется *прямой частного положения*.

2.2.1. Прямые уровня

Если прямая параллельна одной плоскости проекций, то она называется *прямой уровня*. В этом случае прямая проецируется на эту плоскость в натуральную вели-

чину, а на двух других плоскостях проекции такой прямой — параллельны осям проекций.

В зависимости от расположения прямой уровня различают:

- ◆ *Горизонтальную прямую* — прямую, параллельную плоскости π_1 (рис. 2.3):
 - ◆ горизонтальная проекция отрезка горизонтальной прямой равна его натуральной величине;
 - ◆ фронтальная проекция горизонтальной прямой всегда параллельна оси x ;
 - ◆ угол φ_2 между горизонтальной проекцией горизонтальной прямой и осью x является углом между этой прямой и фронтальной плоскостью проекций.

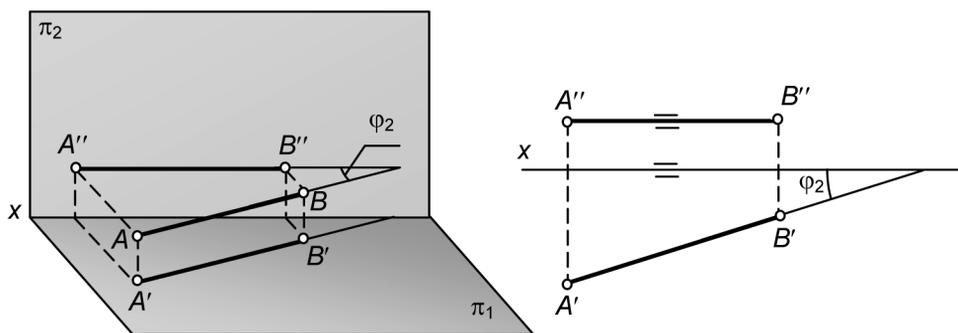


Рис. 2.3. Горизонтальная прямая

- ◆ *Фронтальную прямую* — прямую, параллельную плоскости π_2 (рис. 2.4):
 - ◆ фронтальная проекция отрезка фронтальной прямой равна его натуральной величине;
 - ◆ горизонтальная проекция фронтальной прямой всегда параллельна оси x ;
 - ◆ угол φ_1 между фронтальной проекцией фронтальной прямой и осью x является углом между фронтальной прямой и горизонтальной плоскостью проекций.
- ◆ *Профильную прямую* — прямую, параллельную плоскости π_3 (рис. 2.5):
 - ◆ профильная проекция отрезка профильной прямой равна его натуральной величине;
 - ◆ горизонтальная проекция профильной прямой всегда параллельна оси u_{π_1} , а фронтальная — оси Z ;
 - ◆ угол φ_1 между профильной проекцией профильной прямой и осью u_{π_3} является углом между прямой и горизонтальной плоскостью проекций, а угол φ_2 между профильной проекцией прямой и осью Z — углом между прямой и фронтальной плоскостью проекций.