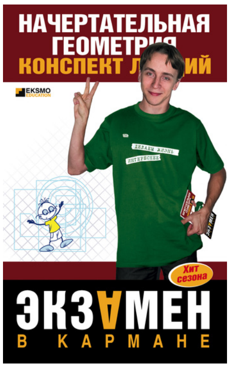

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
КОНСПЕКТ Л ИЙ
EKSMO
EDUCATION
ДЕЛАЕМ ЖИЗНЬ
ИНТЕРЕСНЕЕ
Хит
сезона
ЭКЗАМЕН
В КАРМАНЕ

Ирина Козлова

Начертательная геометрия: конспект лекций

«Научная книга»

Козлова И. С.

Начертательная геометрия: конспект лекций / И. С. Козлова — «Научная книга»,

ISBN 978-5-425-08764-5

Данное учебное пособие представляет собой курс лекций и предназначено для студентов, сдающих экзамен по специальности «Начертательная геометрия». Подготовлено с учетом требований Министерства образования РФ.

ISBN 978-5-425-08764-5

Содержание

И. С. Козлова, Ю. В. Щербакова Начертательная геометрия. Конспект лекций

Лекция № 1. Сведения о проекциях

1. Понятие проекций

Начертательной геометрией называют науку, которая является теоретическим фундаментом черчения. В данной науке изучаются способы изображения на плоскости различных тел и их элементов. Эти изображения позволяют однозначно определить форму и размеры изделия и изготовить его. При работе с чертежами выполняются два вида работ: подготовка чертежей и их чтение.

Чтение чертежа заключается в воспроизведении в уме реальной формы объекта и некоторых его частей с использованием при этом чертежа.

Начертательная геометрия основывается на методе проекций.

Проекцией точки М на некоторой плоскости называют изображение, которое строится в нижеследующей последовательности (рис. 1).

Через данную точку М необходимо провести прямую, которая не параллельна данной плоскости. Точку пересечения данной прямой и плоскости назовем точкой m. Полученная точка m будет являться проекцией точки М на данную плоскость. Прямую *Mm* называют **проектирующей прямой**, а данная плоскость называется **плоскостью изображения**.

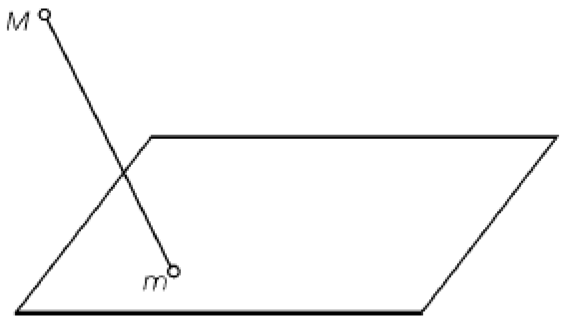


Рис. 1. Проекция точки М на некоторой плоскости

Подобным образом можно получить проекции различных фигур как проекции каждой из его точек. Способ построения определяет вид проекции: центральную или параллельную.

2. Центральная проекция

Представление о центральной проекции можно получить, если изучить изображение, которое дает человеческий глаз.

Для построения центральной проекции объекта нужно между глазом и изучаемым предметом поместить прозрачный экран и отметить на нем точки пересечения лучей, которые идут от глаза человека к отдельным точкам предмета. При соединении всех точек на экране получаем изображение (проекцию) фигуры (рис. 2). Эта проекция называется центральной.

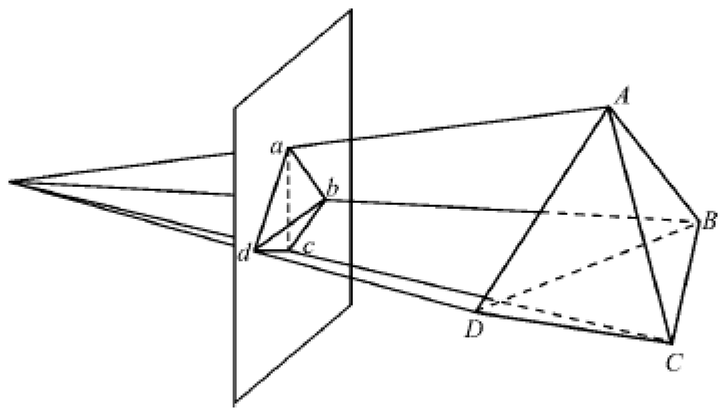


Рис. 2. Проекция фигуры

Центральная проекция – это проекция, которая образуется с помощью проецирующихся лучей, проходящих через одну точку.

Изображение предметов при помощи центральной проекции встречается очень часто, особенно для предметов, обладающих большими размерами.

3. Параллельная проекция

Параллельная проекция – это такой вид проекции, при построении которого используются параллельные проецирующиеся лучи.

При построении параллельных проекций нужно задать направление проецирующих лучей (рис. 3). На данном примере в качестве направляющего луча выбран луч l. При построении изображений через все точки проводятся прямые, параллельные установленному направлению проецирования, до точки пересечения с плоскостью проекции. Соединяя полученные точки, получаем параллельную проекцию предмета.

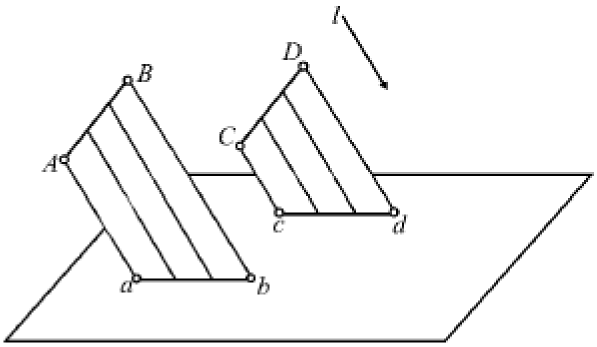


Рис. 3. Параллельная проекция предмета

Параллельные проекции могут быть ортогональными или косоугольными в зависимости от направления проецирующих лучей.

Проекция называется **ортогональной**, если проецирующий луч перпендикулярен плоскости.

Проекция называется **косоугольной**, если угол наклона проецирующих лучей направлен относительно плоскости под углом, отличным от прямого.

Изображение, полученное при помощи параллельной проекции, намного меньше искажено, чем изображение, полученное с помощью центральной проекции.

Лекция № 2. Точка

1. Проекции точки на две плоскости проекций

Рассмотрим проекции точек на две плоскости, для чего возьмем две перпендикулярные плоскости (рис. 4), которые будем называть горизонтальной фронтальной и плоскостями. Линию пересечения данных плоскостей называют осью проекций. На рассмотренные плоскости спроецируем одну точку А с помощью плоской проекции. Для этого необходимо опустить из данной точки перпендикуляры Аа и А на рассмотренные плоскости.

Проекцию на горизонтальную плоскость называют **горизонтальной проекцией** точки *A*, а проекцию a' на фронтальную плоскость называют **фронтальной проекцией**.

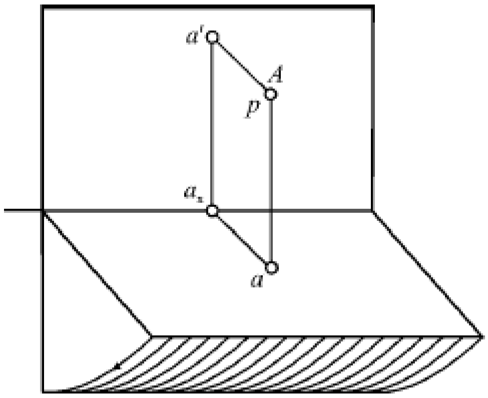


Рис. 4. Проекция точек на две плоскости

Точки, которые подлежат проецированию, в начертательной геометрии принято обозначать с помощью больших латинских букв *A, B, C*. Для обозначения горизонтальных проекций точек применяют малые буквы *a, b, c*… Фронтальные проекции обозначают малыми буквами со штрихом вверху a', b', c'…

Применяется также и обозначение точек римскими цифрами I, II,… а для их проекций – арабскими цифрами 1, 2… и $1', 2'$…

При повороте горизонтальной плоскости на 90° можно получить чертеж, в котором обе плоскости находятся в одной плоскости (рис. 5). Данная картина называется **эпюром точки**.

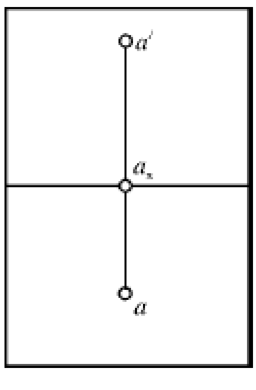


Рис. 5. Эпюр точки

Через перпендикулярные прямые Aa и Aa' проведем плоскость (рис. 4). Полученная плоскость является перпендикулярной фронтальной и горизонтальной плоскостям, потому что содержит перпендикуляры к этим плоскостям. Следовательно, данная плоскость перпендикулярна линии пересечения плоскостей. Полученная прямая пересекает горизонтальную плоскость по прямой aa_x, а фронтальную плоскость – по прямой $a'a_x$. Прямые аах и $a'a_x$ являются перпендикулярными оси пересечения плоскостей. То есть $Aaaxa'$ является прямоугольником.

При совмещении горизонтальной и фронтальной плоскостей проекции a и a' будут лежать на одном перпендикуляре к оси пересечения плоскостей, так как при вращении горизонтальной плоскости перпендикулярность отрезков aa_x и $a'a_x$ не нарушится.

Получаем, что на эпюре проекции a и a' некоторой точки A всегда лежат на одном перпендикуляре к оси пересечения плоскостей.

Две проекции а и a' некоторой точки А могут однозначно определить ее положение в пространстве (рис. 4). Это подтверждается тем, что при построении перпендикуляра из проекции а к горизонтальной плоскости он пройдет через точку А. Точно так же перпендикуляр из проекции a' к фронтальной плоскости пройдет через точку A, т. е. точка A находится одновременно на двух определенных прямых. Точка А является их точкой пересечения, т. е. является определенной.

Рассмотрим прямоугольник Aaa_xa' (рис. 5), для которого справедливы следующие утверждения:

1) Расстояние точки A от фронтальной плоскости равно расстоянию ее горизонтальной проекции а от оси пересечения плоскостей, т. е.

$Aa' = aa_x$;

2) расстояние точки A от горизонтальной плоскости проекций равно расстоянию ее фронтальной проекции a' от оси пересечения плоскостей, т. е.

$Aa = a'a_x$.

Иначе говоря, даже без самой точки на эпюре, используя только две ее проекции, можно узнать, на каком расстоянии от каждой из плоскостей проекций находится данная точка.

Пересечение двух плоскостей проекций разделяет пространство на четыре части, которые называют **четвертями** (рис. 6).

Ось пересечения плоскостей делит горизонтальную плоскость на две четверти – переднюю и заднюю, а фронтальную плоскость – на верхнюю и нижнюю четверти. Верхнюю часть фронтальной плоскости и переднюю часть горизонтальной плоскости рассматривают как границы первой четверти.

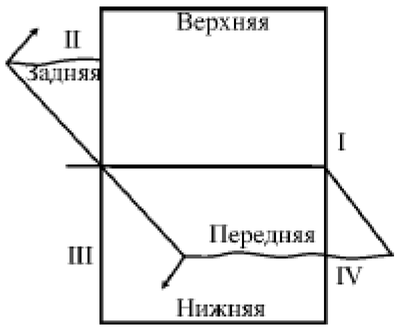


Рис. 6. Четверти

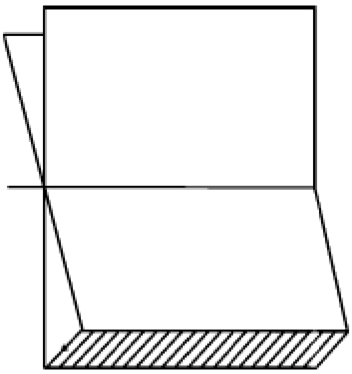


Рис. 7. Совмещение горизонтальной и фронтальной поскостей при получении эпюра

При получении эпюра вращается горизонтальная плоскость и совмещается с фронтальной плоскостью (рис. 7). В этом случае передняя часть горизонтальной плоскости совпадет с нижней частью фронтальной плоскости, а задняя часть горизонтальной плоскости – с верхней частью фронтальной плоскости.

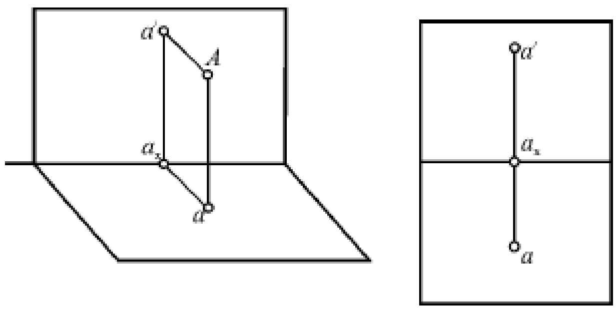


Рис. 8

На рисунках 8-11 показаны точки A, B, C, D, располагающиеся в различных четвертях пространства. Точка A расположена в первой четверти, точка B – во второй, точка C – в третьей и точка D – в четвертой.

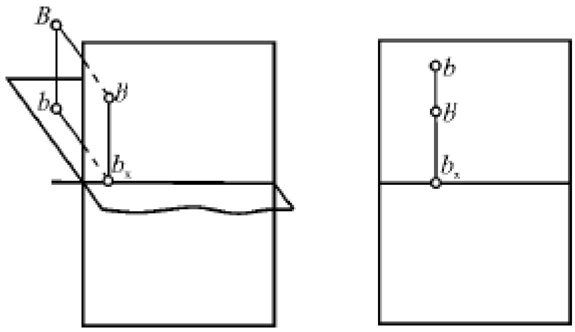


Рис. 9

При расположении точек в первой или четвертой четвертях их **горизонтальные проекции** находятся на передней части горизонтальной плоскости, а на эпюре они лягут ниже оси пересечения плоскостей. Когда точка расположена во второй или третьей четверти, ее горизонтальная проекция будет лежать на задней части горизонтальной плоскости, а на эпюре будет находиться выше оси пересечения плоскостей.

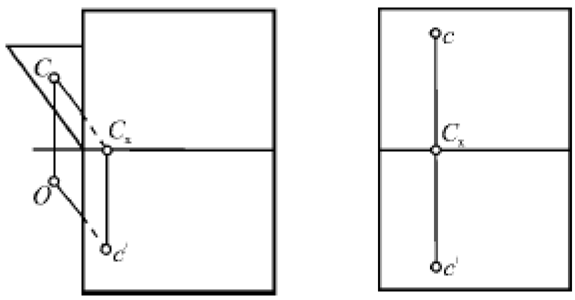


Рис. 10

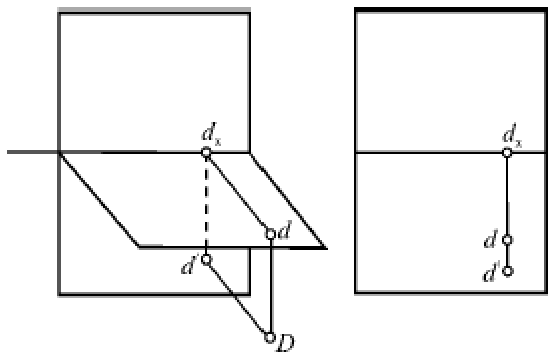


Рис. 11

Фронтальные проекции точек, которые расположены в первой или второй четвертях, будут лежать на верхней части фронтальной плоскости, а на эпюре будут находиться выше оси пересечения плоскостей. Когда точка расположена в третьей или четвертой четверти, ее фронтальная проекция – ниже оси пересечения плоскостей.

Чаще всего при реальных построениях фигуру располагают в первой четверти пространства.

В некоторых частных случаях точка (*E*) может лежать на горизонтальной плоскости (рис. 12). В этом случае ее горизонтальная проекция е и сама точка будут совпадать. Фронтальная проекция такой точки будет находиться на оси пересечения плоскостей.

В случае, когда точка *K* лежит на фронтальной плоскости (рис. 13), ее горизонтальная проекция *k* лежит на оси пересечения плоскостей, а фронтальная k' показывает фактическое местонахождение этой точки.

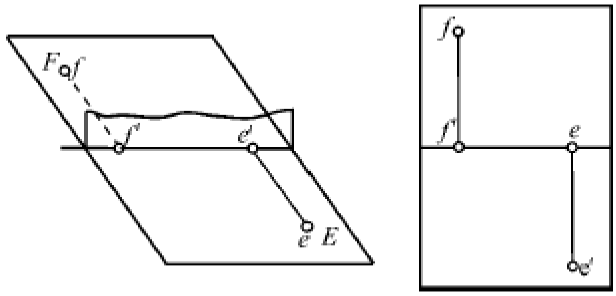


Рис. 12

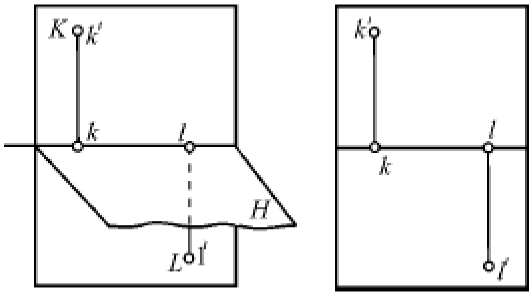


Рис. 13

Для подобных точек признаком того, что она лежит на одной из плоскостей проекций, служит то, что одна ее проекция находится на оси пересечения плоскостей.

Если точка лежит на оси пересечения плоскостей проекций, она и обе ее проекции совпадают.

Когда точка не лежит на плоскостях проекций, она называется **точкой общего положения**. В дальнейшем, если нет особых отметок, рассматриваемая точка является точкой общего положения.

2. Отсутствие оси проекций

Для пояснения получения на модели проекций точки на перпендикулярные плоскости проекций (рис. 4) необходимо взять кусок плотной бумаги в форме удлиненного прямоугольника. Его нужно согнуть между проекциями. Линия сгиба будет изображать ось пересечения плоскостей. Если после этого согнутый кусок бумаги вновь расправить, получим эпюр, похожий на тот, что изображен на рисунке.

Совмещая две плоскости проекций с плоскостью чертежа, можно не показывать линию сгиба, т. е. не проводить на эпюре ось пересечения плоскостей.

При построениях на эпюре всегда следует располагать проекции *a* и *a*′ точки А на одной вертикальной прямой (рис. 14), которая перпендикулярна оси пересечения плоскостей. Поэтому, даже если положение оси пересечения плоскостей остается неопределенным, но ее направление определено, ось пересечения плоскостей может находиться на эпюре только перпендикулярно прямой *aa*′.

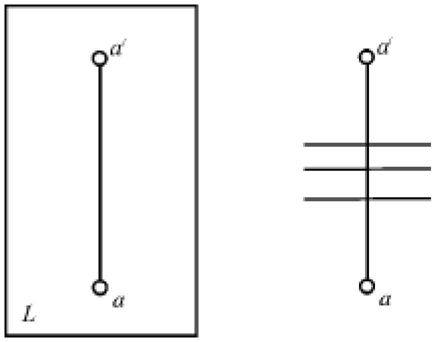


Рис. 14. Построение на эпюре

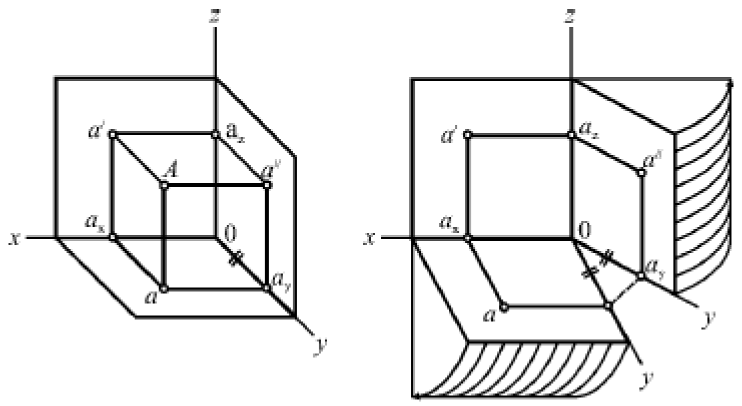
Если на эпюре точки нет оси проекций, как на первом рисунке 14 а, можно представить положение этой точки в пространстве. Для этого проведем в любом месте перпендикулярно прямой *aa*′ ось проекции, как на втором рисунке (рис. 14) и согнем чертеж по этой оси. Если восстановить перпендикуляры в точках *a* и *a*′ до их пересечения, можно получить точку *A*. При изменении положения оси проекций получаются различные положения точки относительно плоскостей проекций, но неопределенность положения оси проекций не влияет на взаимное расположение нескольких точек или фигур в пространстве.

3. Проекции точки на три плоскости проекций

Рассмотрим профильную плоскость проекций. Проекции на две перпендикулярные плоскости обычно определяют положение фигуры и дают возможность узнать ее настоящие размеры и форму. Но бывают случаи, когда двух проекций оказывается недостаточно. Тогда применяют построение третьей проекции.

Третью плоскость проекции проводят так, чтобы она была перпендикулярна одновременно обеим плоскостям проекций (рис. 15). Третью плоскость принято называть **профильной**.

В таких построениях общую прямую горизонтальной и фронтальной плоскостей называют **осью *x***, общую прямую горизонтальной и профильной плоскостей – **осью *y***, а общую прямую фронтальной и профильной плоскостей – **осью *z***. Точка *O*, которая принадлежит всем трем плоскостям, называется точкой начала координат.



а б

Рис. 15. построение профильной плоскости

На рисунке 15а показана точка *A* и три ее проекции. Проекцию на профильную плоскость (*а́*) называют **профильной проекцией** и обозначают *а́*.

Для получения эпюра точки А, которая состоит из трех проекций *a, a a*, необходимо разрезать трехгранник, образующийся всеми плоскостями, вдоль оси y (рис. 15б) и совместить все эти плоскости с плоскостью фронтальной проекции. Горизонтальную плоскость необходимо вращать около оси *x*, а профильную плоскость – около оси *z* в направлении, указанном на рисунке 15 стрелкой.

На рисунке 16 изображено положение проекций *a, а́* и *а́* точки *A*, полученное в результате совмещения всех трех плоскостей с плоскостью чертежа.

В результате разреза ось y встречается на эпюре в двух различных местах. На горизонтальной плоскости (рис. 16) она принимает вертикальное положение (перпендикулярно оси *x*), а на профильной плоскости – горизонтальное (перпендикулярно оси *z*).

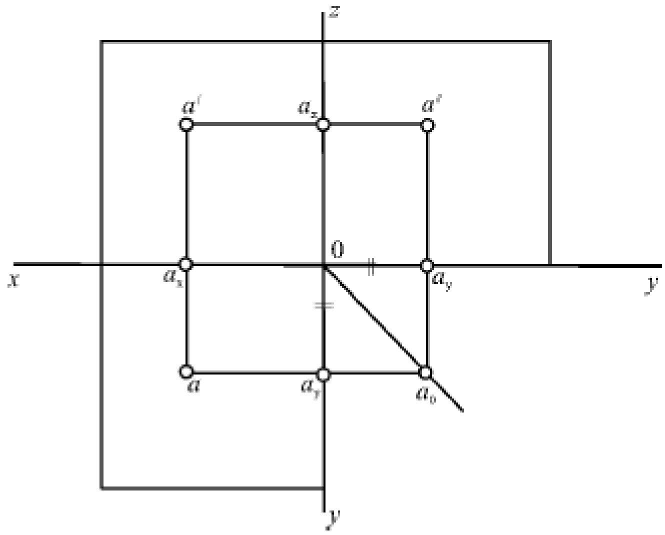


Рис. 16. Положение проекций a, a′и a″ точки A

На рисунке 16 три проекции *a, a′* и *a′* точки А имеют на эпюре строго определенное положение и подчинены однозначным условиям:

1) горизонтальная и фронтальная проекции *a* и *a′* всегда должны располагаться на одной вертикальной прямой, перпендикулярной оси *x*;

2) фронтальная и профильная проекции *a′* и *a′* всегда должны располагаться на одной горизонтальной прямой, перпендикулярной оси *z*;

3) при проведении через горизонтальную проекцию а горизонтальной прямой, а через профильную проекцию *a′*– вертикальной прямой построенные прямые обязательно пересекутся на биссектрисе угла между осями проекций, так как фигура $Oa_{\text{Y}}a_0a_{\text{н}}$ – квадрат.

При выполнении построения трех проекций точки нужно проверять выполняемость всех трех условий для каждой точки.

4. Координаты точки

Положение точки в пространстве может быть определено с помощью трех чисел, называемых ее **координатами**. Каждой координате соответствует расстояние точки от какой-нибудь плоскости проекций.

Расстояние определяемой точки *A* до профильной плоскости является координатой *x*, при этом $x = a''A$ (рис. 15), расстояние до фронтальной плоскости – координатой y, причем $y = a'A$, а расстояние до горизонтальной плоскости – координатой *z*, при этом $z = aA$.

На рисунке 15 точка A занимает ширину прямоугольного параллелепипеда, и измерения этого параллелепипеда соответствуют координатам этой точки, т. е., каждая из координат представлена на рисунке 15 четыре раза, т. е.:

$x = a''A = Oa_x = a_ya = a_za'$;

$y = a'A = Oa_y = a_xa = a_za''$;

$z = aA = Oa_z = a_xa' = a_ya''$.

На эпюре (рис. 16) координаты x и z встречаются по три раза:

$x = a_za' = Oa_x = a_ya$,

$z = a_xa' = Oa_z = a_ya''$.

Все отрезки, которые соответствуют координате *x* (или *z*), являются параллельными между собой. Координата *y* два раза представлена осью, расположенной вертикально:

$y = Oa_y = a_xa$

и два раза – расположенной горизонтально:

$y = Oa_y = a_za''$.

Данное различие появилось из-за того, что ось y присутствует на эпюре в двух различных положениях.

Следует учесть, что положение каждой проекции определяется на эпюре только двумя координатами, а именно:

1) горизонтальной – координатами *x* и *y*,

2) фронтальной – координатами *x* и *z*,

3) профильной – координатами *y* и *z*.

Используя координаты *x, y* и *z*, можно построить проекции точки на эпюре.

Если точка A задается координатами, их запись определяется так: A (*x; y; z*).

При построении проекций точки *A* нужно проверять выполняемость следующих условий:

1) горизонтальная и фронтальная проекции *a* и *a'* должны располагаться на одном перпендикуляре к оси *x*, так как имеют общую координату *x*;

2) фронтальная и профильная проекции *a'* и *a''* должны располагаться на одном перпендикуляре к оси *z*, так как имеют общую координату *z*;

3) горизонтальная проекция a так же удалена от оси *x*, как и профильная проекция *a* удалена от оси *z*, так как проекции a' и a'' имеют общую координату *y*.

В случае, если точка лежит в любой из плоскостей проекций, то одна из ее координат равна нулю.

Когда точка лежит на оси проекций, две ее координаты равны нулю.

Если точка лежит в начале координат, все три ее координаты равны нулю.

Лекция № 3. Прямая

1. Проекции прямой

Для определения прямой необходимы две точки. Точку определяют две проекции на горизонтальную и фронтальную плоскости, т. е. прямая определяется с помощью проекций двух своих точек на горизонтальной и фронтальной плоскостях.

На рисунке 17 показаны проекции (*a* и *a*′*, b* и *b*′) двух точек *A* и В. С их помощью определяется положение некоторой прямой *AB*. При соединении одноименных проекций этих точек (т. е. *a* и *b, a*′ и *b*′) можно получить проекции *ab* и *a*′*b*′ прямой AB.

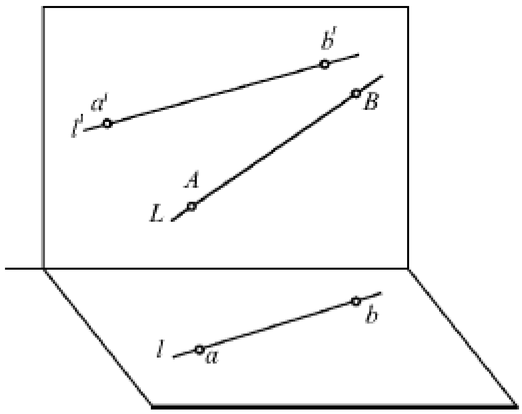


Рис. 17. Проекции точек A и B

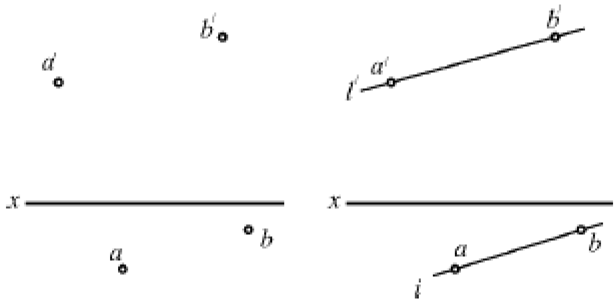


Рис. 18. Проекции точек A и B

На рисунке 18 показаны проекции обеих точек, а на рисунке 19 – проекции проходящей через них прямой линии.

Если проекции прямой определяются проекциями двух ее точек, то они обозначаются двумя рядом поставленными латинскими буквами, соответствующими обозначениям проекций точек, взятых на прямой: со штрихами для обозначения фронтальной проекции прямой или без штрихов – для горизонтальной проекции.

Если рассматривать не отдельные точки прямой, а ее проекции в целом, то данные проекции обозначаются цифрами.

Если некоторая точка *C* лежит на прямой *AB*, ее проекции с и с′ находятся на одноименных проекциях прямой *ab* и *a*′*b*′. Данную ситуацию поясняет рисунок 19.

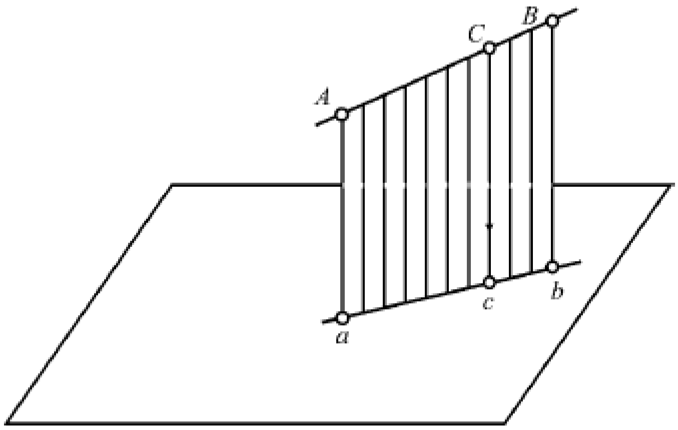


Рис. 19. Проекции прямой между точками A и B

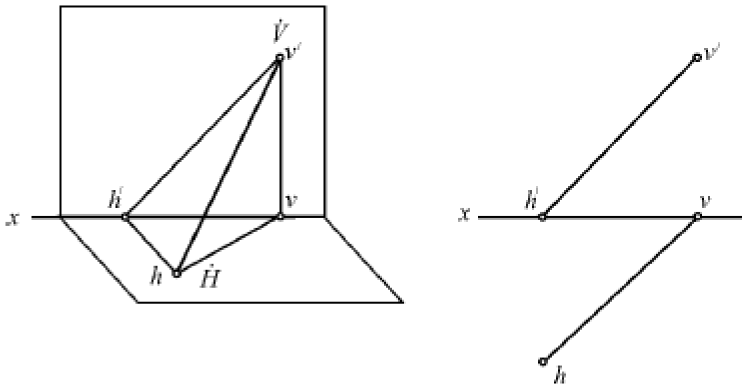
2. Следы прямой

След прямой – это точка пересечения ее с некоторой плоскостью или поверхностью (рис. 20).

Горизонтальным следом прямой называется некоторая точка *H*, в которой прямая встречается с горизонтальной плоскостью, а **фронтальным** – точка *V*, в которой данная прямая встречается с фронтальной плоскостью (рис. 20).

На рисунке 21а изображен горизонтальный след прямой, а ее фронтальный след, – на рисунке 21б.

Рис. 20. След прямой



а б

Рис. 21. Горизонтльный (а) и фронтальный след прямой

Иногда также рассматривается профильный след прямой, *W* – точка пересечения прямой с профильной плоскостью.

Горизонтальный след находится в горизонтальной плоскости, т. е. его горизонтальная проекция *h* совпадает с этим следом, а фронтальная h' лежит на оси x. Фронтальный след лежит во фронтальной плоскости, поэтому его фронтальная проекция v' совпадает с ним же, а горизонтальная v лежит на оси x.

Итак, $H = h$, и $V = v'$. Следовательно, для обозначения следов прямой можно применять буквы *h* и v'.

3. Различные положения прямой

Прямую называют **прямой общего положения**, если она не параллельна и не перпендикулярна ни одной плоскости проекций. Проекции прямой общего положения тоже не параллельны и не перпендикулярны осям проекций.

Прямые, которые параллельны одной из плоскостей проекций (перпендикулярны одной из осей). На рисунке 22 показана прямая, которая параллельна горизонтальной плоскости (перпендикулярная оси z), – горизонтальная прямая; на рисунке 23 показана прямая, которая параллельна фронтальной плоскости (перпендикулярна оси *y*), – фронтальная прямая; на рисунке 24 показана прямая, которая параллельна профильной плоскости (перпендикулярна оси *x*), – профильная прямая. Несмотря на то что каждая из данных прямых образует с одной из осей прямой угол, они не пересекают ее, а только скрещиваются с нею.

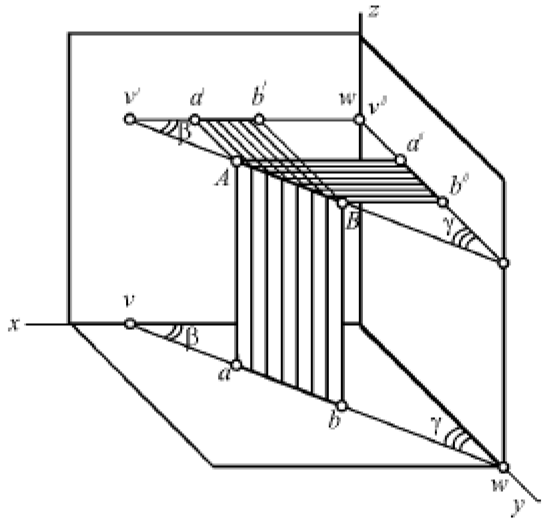


Рис. 22. Горизонтальная прямая

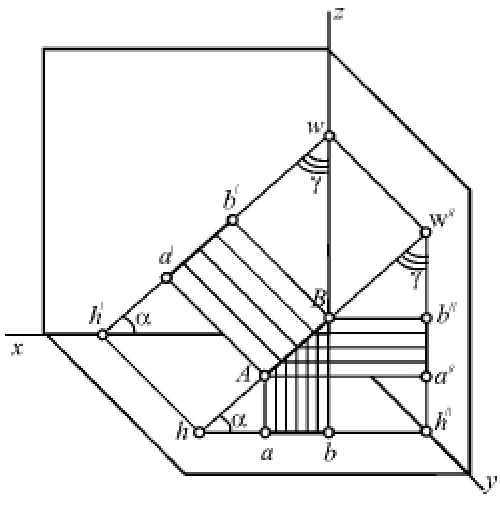


Рис. 23. Фронтальная прямая

Из-за того что горизонтальная прямая (рис. 22) параллельна горизонтальной плоскости, ее фронтальная и профильная проекции будут параллельны осям, определяющим горизонтальную плоскость, т. е. осям *x* и *y*. Поэтому проекции $a'b' \parallel x$ и $a''b'' \parallel y$, т. е. они перпендикулярны оси *z*. Горизонтальная проекция ab может занимать любое положение на эпюре.

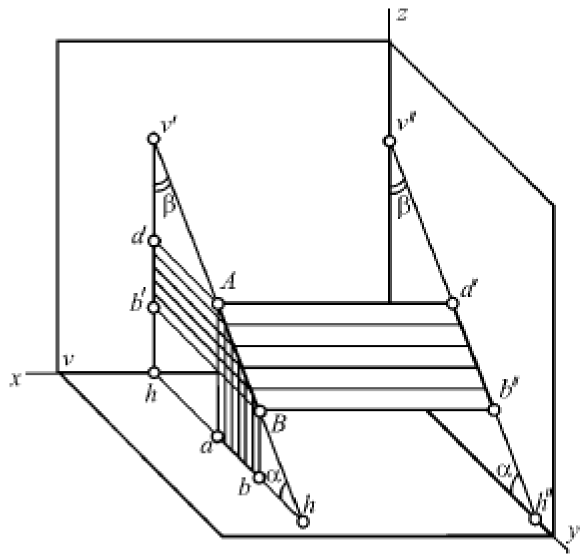


Рис. 24. Профильная прямая

У фронтальной прямой (рис. 23) проекции $ab \parallel x$ и $a''b'' \parallel z$, т. е. они перпендикулярны оси y, а потому в этом случае фронтальная проекция $a'b'$ прямой может занимать произвольное положение.

У профильной прямой (рис. 24) $ab \parallel y$, $a'b' \parallel z$, и обе они перпендикулярны оси x. Проекция $a''b''$ может располагаться на эпюре любым образом.

При рассмотрении той плоскости, которая проецирует горизонтальную прямую на фронтальную плоскость (рис. 22), можно заметить, что она проецирует эту прямую и на профильную плоскость, т. е. она является плоскостью, которая проецирует прямую сразу на две плоскости проекций – фронтальную и профильную. Исходя из этого ее называют **дважды проецирующей плоскостью**. Таким же образом для фронтальной прямой (рис. 23) дважды проецирующая плоскость проецирует ее на плоскости горизонтальной и профильной проекций, а для профильной (рис. 23) – на плоскости горизонтальной и фронтальной проекций.

Две проекции не могут определить прямую. Две проекции *1* и *1'* профильной прямой (рис. 25) без уточнения на них проекций двух точек этой прямой не определят положения данной прямой в пространстве.

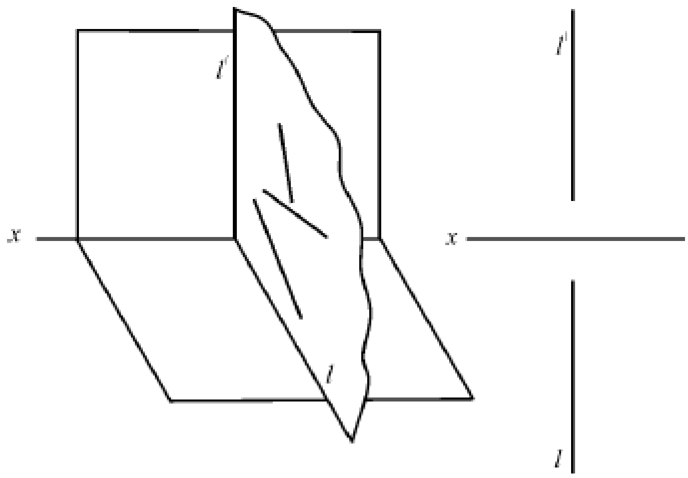


Рис. 25. Две проекции профильной прямой

В плоскости, которая перпендикулярна двум заданным плоскостям симметрии, возможно существование бесчисленного множество прямых, для которых данные на эпюре 1 и $1'$ являются их проекциями.

Если точка находится на прямой, то ее проекции во всех случаях лежат на одноименных проекциях этой прямой. Обратное положение не всегда справедливо для профильной прямой. На ее проекциях можно произвольным образом указать проекции определенной точки и не быть уверенным в том, что эта точка лежит на данной прямой.

Во всех трех частных случаях (рис. 22, 23 и 24) положения прямой по отношению к плоскости проекций произвольный ее отрезок AB, взятый на каждой из прямых, проецируется на одну из плоскостей проекций без искажения, т. е. на ту плоскость, которой он параллелен. Отрезок AB горизонтальной прямой (рис. 22) дает проекцию в натуральную величину на горизонтальную плоскость ($ab = AB$); отрезок AB фронтальной прямой (рис. 23) – в натуральную величину на плоскость фронтальной плоскости V ($a'b' = AB$) и отрезок AB профильной прямой (рис. 24) – в натуральную величину на профильную плоскость W ($a''b''$ = AB), т. е. представляется возможным измерить на чертеже натуральную величину отрезка.

Иначе говоря, с помощью эпюр можно определить натуральные размеры углов, которые рассматриваемая прямая образует с плоскостями проекций.

Угол, который составляет прямая с горизонтальной плос костью H, принято обозначать буквой α, с фронтальной плоскостью – буквой β, с профильной плоскостью – буквой γ.

Любая из рассматриваемых прямых не имеет следа на параллельной ей плоскости, т. е. горизонтальная прямая не имеет горизонтального следа (рис. 22), фронтальная прямая не имеет фронтального следа (рис. 23), а профильная прямая – профильного следа (рис. 24).

4. Взаимное расположение двух прямых

Возможны три случая расположения прямых в пространстве:

1) прямые пресекаются, т. е. имеют общую точку;

2) прямые параллельны, т. е. не имеют общей точки, но лежат в одной плоскости;

3) прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости, т. е. через них нельзя провести плоскость.

Когда прямые пересекаются, на эпюре точки пересечения их одноименных проекций на горизонтальной и фронтальной плоскостях находятся на одном перпендикуляре к оси x.

Рассмотрим прямые I и II, которые пересекаются в точке *A* (рис. 26). Спроецируем обе прямые на горизонтальную плоскость. Если учесть, что точка A принадлежит обеим прямым, то ее проекция a будет принадлежать также и обеим проекциям прямых.

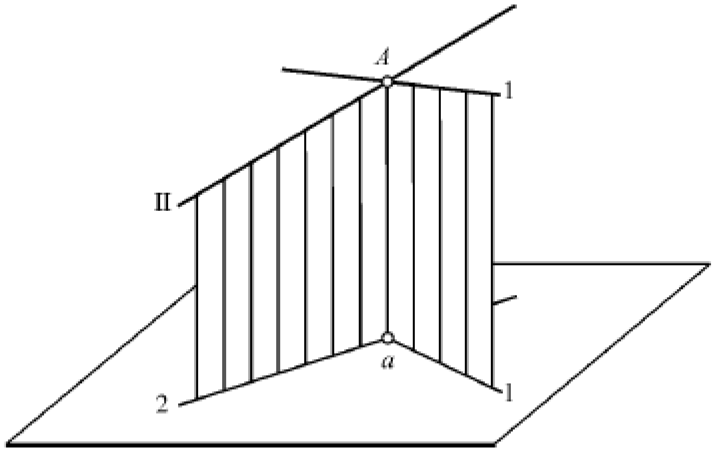


Рис. 26. Проекция прямых I и II на горизонтальную плоскость

Похожая картина будет и на фронтальной плоскости, т. е. эти точки пересечения одноименных проекций *a* и *a*′ являются проекциями некоторой точки *A*, и поэтому они должны лежать на одном перпендикуляре к оси x. Точно так же будет верным и обратное утверждение: если на эпюре точки пересечения одноименных проекций прямых на две плоскости (горизонтальную и фронтальную) лежат на одном перпендикуляре к оси *x*, то эти прямые пересекаются.

Пусть проекции прямых I к II (рис. 27) подчиняются этому условию.

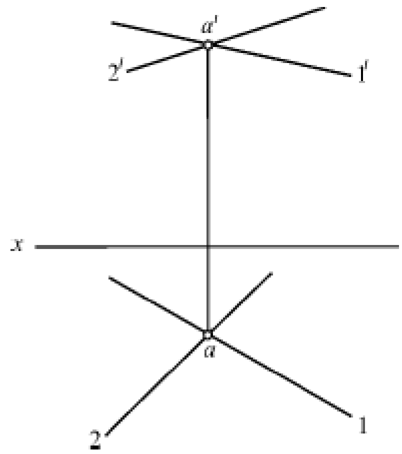


Рис. 27. Проекции прямых I и II на горизонтальную и фронтальную плоскости

Тогда точки пересечения их одноименных проекций можно рассматривать как проекции некоторой точки в пространстве. Обозначим точку пересечения горизонтальных проекций 1 и 2 буквой *a*, а точку пересечения фронтальных проекций $1'$ и $2'$ – буквой a'. Рассматриваемая точка А находится и на прямой I, и на прямой II. То есть она является их общей точкой, в которой пересекаются эти прямые.

Прямое утверждение справедливо во всех случаях без исключения. Обратное же утверждение неприменимо в том случае, если хотя бы одна из прямых профильная.

Когда **прямые параллельны**, на эпюре их одноименные проекции параллельны (рис. 28).

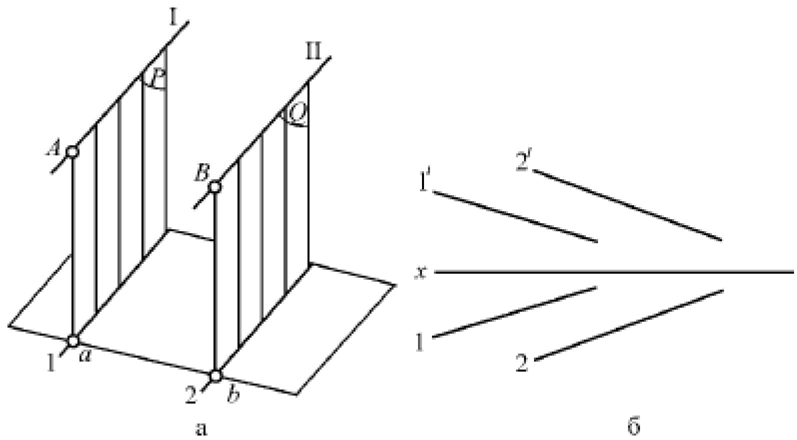


Рис. 28. Проекции параллельных прямых

На самом деле, плоскости *P* и *Q*, проецирующие прямые I и II на горизонтальную плоскость, параллельны, так как в каждой из этих плоскостей можно указать две пересекающиеся прямые, параллельные двум пересекающимся прямым второй плоскости, т. е. прямая I параллельна прямой II, и проектирующий луч *Aa* параллелен лучу *Bb*. Но две параллельные плоскости *P* и *Q* пересекут горизонтальную плоскость. В результате этого образуются две параллельные прямые 1 и 2, т. е. горизонтальные проекции прямых I и II параллельны между собой.

Аналогично можно доказать, что и любые другие одноименные проекции обеих прямых также будут параллельны друг другу.

Верно и обратное утверждение: прямые параллельны, если на эпюре их одноименные проекции параллельны.

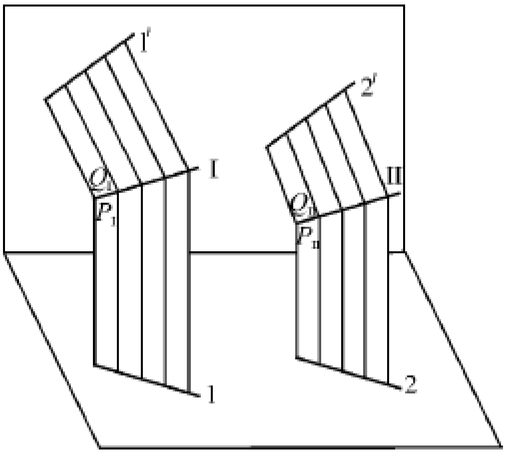


Рис. 29. Горизонтальная и фронтальная проекции параллельных прямых

Если известно, что горизонтальные и фронтальные проекции прямых I и II параллельны, будет справедливо следующее: $1 \parallel 2$ и $1' \parallel 2'$ (рис. 29).

В этом случае можно сказать, что плоскости P_{I} и P_{II}, проецирующие прямые I и II на горизонтальную плоскость, параллельны, так как в этих плоскостях можно указать по паре пересекающихся соответственно параллельных прямых (прямые 1 и 2 и проецирующие лучи). Аналогично плоскости Q_{I} и Q_{II} будут параллельны.

Прямая I находится в пересечении плоскостей P_{I} и Q_{I}, а прямая II – в пересечении плоскостей P_{II} Q_{II}. Отсюда получаем, что прямая I параллельна плоскости P_{II}, потому что находится в плоскости, ей параллельной. Однако прямая I параллельна и плоскости Q_{II}. Поэтому прямая I параллельна линии пересечения плоскостей P_{II} и Q_{II}, т. е. прямой II.

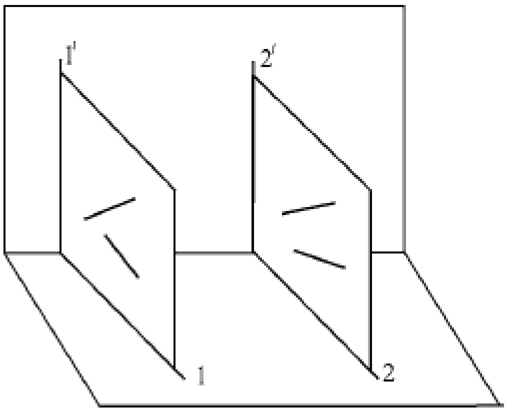


Рис. 30

Доказательство обратного утверждения не имеет смысла для профильных прямых. Это объясняется тем, что тогда вместо двух плоскостей, проецирующих прямую на горизонтальную и фронтальную плоскости, существует только одна, дважды проецирующая плоскость (рис. 30).

Видно, что вне зависимости от расположения двух профильных прямых I и II в пространстве их горизонтальные и фронтальные проекции всегда параллельны (или сливаются).

Прямые будут являться скрещивающимися, если они не параллельны и не пересекаются. Это вытекает из того, что возможны только три случая взаимного расположения прямых.

Для скрещивающихся прямых справедливы утверждения:

1) точки пересечения одноименных проекций на горизонтальной и фронтальной плоскостях не лежат на одном перпендикуляре к оси x (прямые I и II на рис. 31).

2) хотя бы в одной паре одноименные проекции не параллельны (прямые III и IV на рис. 31).

Рисунок 31 показывает проекции четырех прямых, любая пара из которых скрещивается.

Как и в рассмотренных ранее случаях, обратное утверждение для скрещивающихся прямых несправедливо при условии, что хотя бы одна из прямых является профильной.

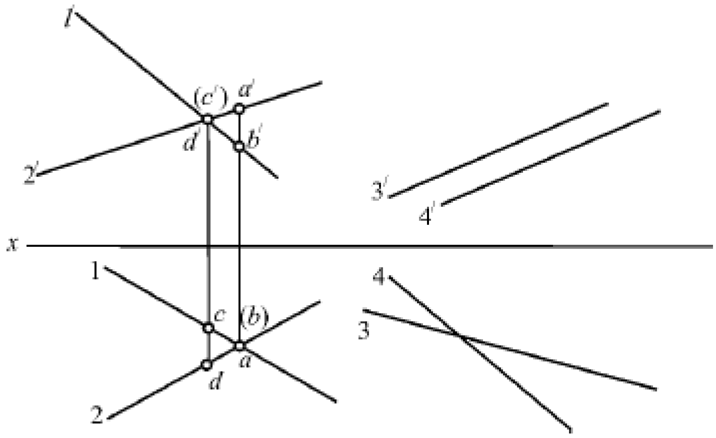


Рис. 31. Проекции четырех прямых

5. Перпендикулярные прямые

Рассмотрим теорему: если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций (или лежит в ней), то прямой угол проецируется на эту плоскость без искажения.

Приведем доказательство для прямого угла *ABC*, одна сторона которого *BC* параллельна горизонтальной плоскости (рис. 32).

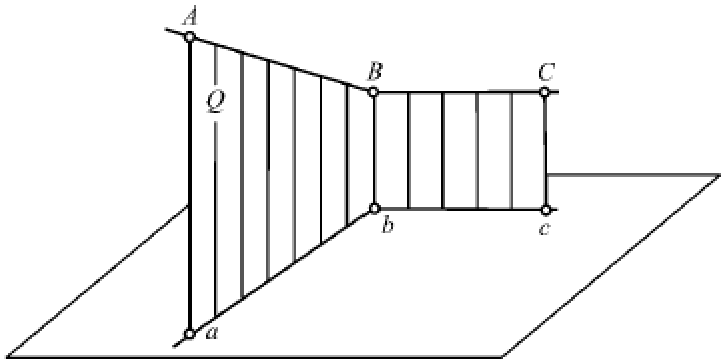


Рис. 32. Проекция угла ABC

Плоскость, в которой находится сторона угла *AB* и ее проекция *ab*, перпендикулярна горизонтальной плоскости, так как содержит перпендикуляр *Bb* к этой плоскости. Прямая *BC* перпендикулярна плоскости Q вследствие ее перпендикулярности двум пересекающимся прямым этой плоскости (*AB* и *Bb*). Прямая *bc* параллельна *BC*, т. е. она также перпендикулярна *Q*, а значит и прямой *ab*, которая лежит в ней.

Ясно, что если на эпюре одна пара одноименных проекций двух прямых перпендикулярна, а одна из двух остальных проекций параллельна оси *x*, то такие прямые образуют в пространстве прямой угол.

Конец ознакомительного фрагмента.