

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ



М. С. Вербицкий

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ТОПОЛОГИИ

Задачи и теоремы



УДК 515.12
ББК 22.152
В31

Вербицкий М. С.

Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2018

352 с.

ISBN 978-5-4439-3036-7

Книга написана по материалам лекций, прочитанных в Независимом московском университете и на факультете математики Высшей школы экономики, и состоит из записок лекций и упражнений, предлагавшихся студентам. В курс включены результаты общей топологии, широко применяемые в анализе и геометрии. Для удобства читателя приводятся необходимые понятия и результаты теории категорий и теории множеств. Книга заканчивается начальными главами гомотопической топологии (накрытия, фундаментальная группа). Теоретический материал курса изложен как в лекциях, так и в упражнениях, которые можно изучать независимо от лекций.

Портреты математиков на с. 54, 156, 160, 167, 172, 193, 221, 274, 331
выполнены Юрием Сопельняком.

Подготовлено на основе книги: *Вербицкий М. С.* Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы. — М.: МЦНМО, 2017. — 352 с. ISBN 978-5-4439-1036-9

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (495) 241-74-83
www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3036-7

© М. С. Вербицкий, 2016.
© МЦНМО, 2017.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	11
Краткое описание	11
Матклассы: обучение по листочкам	13
Как читать эту книгу	16

ЧАСТЬ I. ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Глава 1. Основания математики	21
1.1. О математической строгости	21
1.2. О формальном методе	22
1.3. Теория множеств и ее аксиоматизация	25
1.4. Терминология и библиография	28
Глава 2. Основные понятия теории множеств	29
2.1. Обозначения теории множеств	29
2.2. Соответствия и отображения	30
2.3. Отношения эквивалентности	32
2.4. Аксиоматическая теория множеств	33
2.5. Терминология и библиография	36
Глава 3. Кардиналы и теорема Кантора	39
3.1. Теорема Кантора—Бернштейна—Шрёдера	39
3.2. Мощность множества	40
3.3. Счетные множества	41
3.4. Диагональный метод Кантора	42
3.5. Континуум-гипотеза	44
3.6. Замечания	45
Глава 4. Аксиома выбора и ее приложения	47
4.1. Сечение отображения	47
4.2. Аксиоматическая теория множеств	47
4.3. Аксиома выбора и ее конкуренты	49
4.4. Вполне упорядоченные множества	52
4.5. Лемма Цорна и теорема Цермело	55

ЧАСТЬ II. ТОПОЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ

Листок 1. Метрические пространства и норма	61
1.1. Метрические пространства, выпуклые множества, норма	61
1.2. Полные метрические пространства	65
Листок 2. Топология метрических пространств	71
2.1. Липшицевы функции	73
2.2. Расстояние между подмножествами метрических пространств	74
2.3. Расстояние Хаусдорфа	75
2.4. Локально компактные метрические пространства . . .	76
Листок 3. Теоретико-множественная топология	81
3.1. Топология и сходимость	87
Листок 4. Произведение пространств	89
4.1. База топологии	89
4.2. Тихоновский куб и гильбертов куб	91
4.3. Нормальные топологические пространства	92
4.4. Лемма Урысона и метризация топологических пространств	93
Листок 5. Компактность	95
5.1. Компакты и произведения	98
5.2. Теорема Тихонова	99
5.3. Основная теорема алгебры	101
Листок 6. Поточечная и равномерная сходимость	103
6.1. Кривая Пеано	106
Листок 7. Связность	109
7.1. Вполне несвязные пространства	110
Листок 8. Фундаментальная группа и пространство петель	113
8.1. Линейная связность	113
8.2. Геодезическая связность	114
8.3. Пространство петель	116
8.4. Фундаментальная группа	118

8.5. Односвязные пространства	120
8.6. Накрытия	123
Листок 9. Накрытия Галуа	125
9.1. Накрытия Галуа	126
9.2. Накрытия линейно связных пространств	130
9.3. Существование универсального накрытия	132
Листок 10. Фундаментальная группа и гомотопии	137
10.1. Гомотопии	137
10.2. Пространства путей на локально стягиваемых про- странствах	138
10.3. Свободная группа и букет	140
 ЧАСТЬ III. ЛЕКЦИИ ПО ТОПОЛОГИИ 	
Лекция 1. Метрика, пополнение, p-адические числа	145
1.1. Метрические пространства и пополнение	145
1.2. Нормирование на группах и кольцах	149
1.3. Целые p -адические числа: неархимедова геометрия . .	151
1.4. Арифметика p -адических чисел	153
1.5. Библиография, замечания	157
Лекция 2. Нормирования в векторных пространствах	159
2.1. Примеры нормированных пространств	159
2.2. Непрерывные отображения	163
2.3. Выпуклые множества и норма	165
2.4. История, замечания	166
Лекция 3. Компакты в метрических пространствах	169
3.1. Теорема Гейне—Бореля	169
3.2. Историческое отступление: работы Хаусдорфа	173
3.3. Расстояние Хаусдорфа	175
3.4. Компактность и ε -сети	176
3.5. Историческое отступление: расстояние Громова—Хаус- дорфа	178

Лекция 4. Внутренняя метрика	181
4.1. Пространство с внутренней метрикой	181
4.2. Локально компактные метрические пространства . . .	183
4.3. Геодезические в метрическом пространстве	185
4.4. История, терминология, литература	187
Лекция 5. Основы общей топологии	191
5.1. Топологическое пространство	191
5.2. Аксиомы Хаусдорфа	192
5.3. Аксиомы счетности	195
Лекция 6. Произведение пространств	197
6.1. Свойства произведения	197
6.2. Отображения в $M \times M'$	198
6.3. Произведение метрических пространств	199
6.4. Полуметрики и полунормы	201
6.5. Тихоновская топология	202
6.6. Пространства Фреше	205
6.7. Тихоновский куб и гильбертов куб	206
6.8. История, замечания	208
Лекция 7. Теорема о метризации	211
7.1. Нормальные топологические пространства	211
7.2. Функции Урысона	212
7.3. «Создатель советской топологии»	213
7.4. Нормальные пространства и нуль-множества	216
7.5. Теорема Урысона о метризации	217
7.6. Теоремы о метризуемости	219
Лекция 8. Компакты	221
8.1. Компакты и слабо секвенциально компактные пространства	221
8.2. Компакты и нормальные пространства	224
Лекция 9. Произведение компактов	227
9.1. Открытые, замкнутые и собственные отображения . . .	227
9.2. Конечные произведения компактов	228
9.3. Максимальные идеалы в кольцах	230
9.4. Лемма Цорна: история, замечания	232

9.5. Кольцо подмножеств и ультрафильтры	233
9.6. Теорема Александра о предбазе	237
9.7. Теорема Тихонова о компактности	239
Лекция 10. Равномерная сходимость	243
10.1. Банаховы пространства	243
10.2. Примеры пространств Фреше	246
10.3. Равномерная метрика на пространстве отображений .	247
10.4. История, замечания	249
Лекция 11. Пространство непрерывных отображений	251
11.1. Топология равномерной сходимости на $C(X, Y)$	251
11.2. Топология, заданная окрестностями графика	252
11.3. Замечания	254
Лекция 12. Связные пространства	257
12.1. Свойства связных подмножеств	257
12.2. Компоненты связности	259
12.3. Линейная связность	260
Лекция 13. Вполне несвязные пространства	263
13.1. Примеры вполне несвязных пространств	263
13.2. Пространства Стоуна	264
Лекция 14. Теорема Стоуна и теория категорий	269
14.1. Категории	269
14.2. Теория категорий: история, замечания	271
14.3. Булевы кольца и булевы алгебры	275
14.4. Спектр Зарисского для булева кольца	276
14.5. Булевы алгебры: история, замечания	280
Лекция 15. Фундаментальная группа	281
15.1. Гомотопные отображения	281
15.2. Категория пространств с отмеченной точкой и про- странства петель	283
15.3. Фундаментальная группа	284
15.4. Стягиваемые пространства, ретракты, гомотопиче- ская эквивалентность	289
15.5. История, замечания	290

Лекция 16. Накрытия Галуа	293
16.1. Факторпространства	293
16.2. Категория накрытий	294
16.3. Односвязные пространства	297
16.4. Поднятие накрытия	299
16.5. Накрытия и пути	301
16.6. Произведение накрытий	303
16.7. Накрытия Галуа и группа Галуа	305
16.8. Теория Галуа для накрытий	306
16.9. Универсальное накрытие	307
16.10. Этальная фундаментальная группа	310
16.11. История, замечания	310
Лекция 17. Теорема Зейферта—ван Кампена	315
17.1. Фундаментальная группа и универсальное накрытие	315
17.2. Категория накрытий и фундаментальная группа	318
17.3. Как восстановить фундаментальную группу по катего- рии накрытий	320
17.4. Свободная группа и свободное произведение групп	321
17.5. Представимые функторы	322
17.6. Лемма Ионеды: история, замечания	324
17.7. Произведение и копроизведение в категории	325
17.8. История свободной группы и копроизведений	326
17.9. Теорема Зейферта—ван Кампена	328
17.10. История, замечания	330
Лекция 18. Подгруппы в свободных группах	333
18.1. Фундаментальная группа букета окружностей	333
18.2. Деревья	334
18.3. Унициклические графы	337
18.4. Фундаментальная группа графа	338

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Листок 0. Вещественные числа	343
0.1. Фундаментальные последовательности	343
0.2. Дедекиндовы сечения	346

Оглавление

0.3. Супремум и инфимум	347
0.4. Корни многочленов нечетной степени	348
0.5. Пределы	349
0.6. Ряды	351

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТРОГОСТИ

«Точные науки» отличаются от «социо-гуманитарных» тем, что в точных науках утверждение можно проверить воспроизводимым экспериментом либо наблюдением. Роль воспроизводимого наблюдения в математике играет *доказательство*.

Идея доказательства восходит к древним грекам; она дошла до наших дней практически без изменений. Математическая теория строится *аксиоматически*. В основе лежат несколько утверждений — аксиом, принятых как нечто абсолютно верное; всё остальное выводится из аксиом посредством формальной логики.

При таком подходе доказательству подлежат зачастую вещи, интуитивно очевидные. Именно это и называется *математической строгостью*.

На протяжении истории стандарты математической строгости менялись довольно часто. Отказ от строгости в пользу *интуиции, мышления по аналогии и эвристических соображений* — дело не всегда вредное. Многие современные математики считают, что принятые в конце XX века стандарты математической строгости (восходящие к Гильберту и к французской группе Бурбаки) излишни. Немало об отрицательном влиянии Гильберта и Бурбаки говорил В. И. Арнольд.

Отчасти он прав — большинство эвристических соображений можно довести до математически строгих доказательств посредством рутинной (и не всегда полезной) работы. Эту точку зрения лучше всего высказали сами Бурбаки («Теория множеств»).

...Математик, желающий убедиться в полной правильности, или, как говорят, «строгости» доказательства или теории, отнюдь не прибегает к одной из тех полных формализаций, которыми мы сейчас располагаем, и даже большей частью не пользуется частичными и неполными формализациями, доставляемыми алгебраическим и другими подобными исчислениями. Обыкновенно он довольствуется тем, что

приводит изложение к такому состоянию, когда его опыт и чутье математика говорят ему, что перевод на формализованный язык был бы теперь лишь упражнением (...) в терпении. Если возникают сомнения, то в конечном счете они относятся именно к возможности прийти без двусмысленности к такой формализации — употреблялось ли одно и то же слово в разных смыслах в зависимости от контекста, нарушались ли правила синтаксиса бессознательным употреблением способов рассуждения, не разрешаемых явно этими правилами, была ли, наконец, совершена фактическая ошибка. (...) Текст редактируется, все больше и больше приближаясь к формализованному тексту, пока, по общему мнению математиков, дальнейшее продолжение этой работы не станет излишним.

Излишняя увлеченность формальными методами, возможно, действительно вредна, но в обучении студентов без математической строгости не обойтись. Профессиональный математик способен легко определить, когда эвристическое рассуждение можно *формализовать*, т. е. довести до любой требуемой степени математической строгости; но эту способность можно приобрести, только упражняясь в получении формально строгих доказательств.

1.2. О ФОРМАЛЬНОМ МЕТОДЕ

Формальный метод восходит к Гильберту, который надеялся, что с его помощью удастся обосновать математику. Его надежды не оправдались из-за теорем Гёделя о неполноте. Но и сейчас формальный метод остается простейшим (и лучше всего развитым) методом построения оснований математики.

Формальная версия математики устроена так. Математическая теория описывает свойства определенных объектов с помощью аксиом и правил вывода. Сущность этих объектов с формальной точки зрения неинтересна: по замечанию Гильберта, *«следует добиться того, чтобы вместо точек, прямых и плоскостей с равным успехом можно было говорить о столах, стульях и пивных кружках»*. Правила вывода суть формальные операции над утверждениями; верным (доказанным) называется такое утверждение, которое можно вывести из аксиом.

1.2. О формальном методе



Давид Гильберт (David Hilbert, 1862—1943)

Формальный метод подразумевает, что никакой связи между математическим миром и миром, окружающим нас, нет вовсе. В качестве базовых понятий и аксиом можно брать что угодно. Для того чтобы этот метод обоснования математики считался действенным, необходимо (как минимум) доказать, что из использованного набора аксиом нельзя получить противоречия: иначе в этой теории будет верно *любое* утверждение. Действительно, «импликация с ложной посылкой истинна». Это свойство системы аксиом называется *непротиворечивостью*.

Также нужно доказать, что любое утверждение можно доказать либо опровергнуть исходя из аксиом. Это свойство теории называется *полнотой*. В противном случае формальное описание математических объектов неадекватно их сущности.

Дело в том, что математическим объектам можно приписать реальность безотносительно к аксиомам, которые ими описываются. Скажем, аксиомы арифметики описывают теорию чисел, науку о решении диофантовых уравнений (уравнений в целых числах). Утверждение «*полиномиальное уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ не имеет целочисленных решений $t_1, \dots, t_n$* » может выводиться из аксиом

арифметики (аксиом Пеано), а может и не выводиться. Во втором случае может оказаться, что уравнение имеет решения. Может случиться и так, что из аксиом арифметики невозможно вывести ни наличия, ни отсутствия решений¹.

Когда в какой-то теории есть утверждение Q , которое нельзя вывести из аксиом, и при этом нельзя вывести из аксиом его отрицание «не Q », эта система аксиом называется *неполной*.

«Математической реальности» такая система аксиом, очевидно, неадекватна. Действительно, предположим, что исходя из аксиом Пеано нельзя ни доказать, ни опровергнуть утверждение Q «полиномиальное уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ не имеет целочисленных решений $t_1, \dots, t_n$ ». В этой ситуации уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ таки не имеет решений, ибо, если бы такое решение было, мы бы могли его подставить в уравнение и получить теорему « Q ложно».

В этой ситуации разговор о числах, апеллирующий к утилитарному пониманию числа, гораздо содержательнее разговора о формальных аксиомах и следствиях. Действительно, формально получить Q как следствие аксиом нельзя, ибо теория неполна; но Q тем не менее верно, что ясно из невозможности его опровергнуть (у уравнения либо нет решений, либо они есть — третьего не дано).

Гильберт надеялся, что система аксиом Пеано (и шире — система аксиом теории множеств, лежавшей в основе математики того времени) полна и непротиворечива. Доказательство этого фактически доказало бы эквивалентность формального метода и утилитарного (основанного на естественно-научной интуиции) представления о числах и о математике.

Этого не случилось.

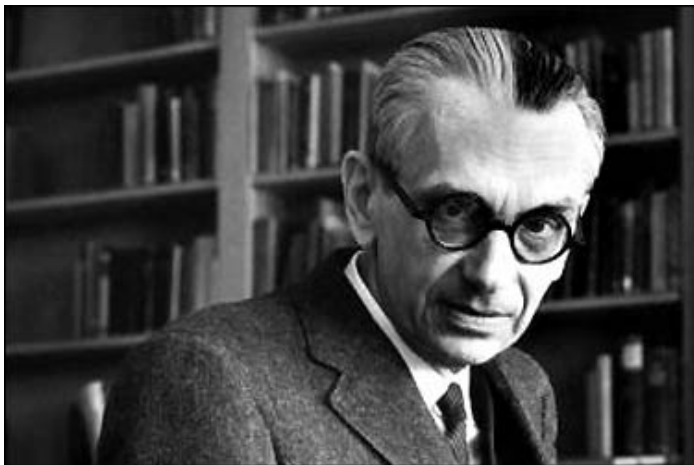
К концу 1920-х гг. формальная программа Гильберта близилась к завершению. В 1930 г. польский математик Альфред Тарский развил систему аксиом для элементарной геометрии, более формальную и строгую, чем у Гильберта, и доказал, что эта система аксиом полна и непротиворечива.

Но в самом начале 1930-х гг. совершенно неожиданно Курт Гёдель доказал две теоремы о неполноте, которые не оставили камня на камне от программы Гильберта.

1 Это утверждение известно как «Десятая проблема Гильберта». Оно было доказано Юрием Матиясевичем в 1970 году.

1.3. Теория множеств и ее аксиоматизация

Гёдель доказал, что ни одна достаточно богатая (например, содержащая среди своих аксиом аксиомы Пеано) формальная теория не может быть полна; также он доказал, что доказательство ее непротиворечивости получить *невозможно*.



Курт Гёдель (Kurt Gödel, 1906—1978)

Формальный метод потерпел поражение, а аксиоматическое построение математики было значительно дискредитировано.

1.3. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ЕЕ АКСИОМАТИЗАЦИЯ

Дополнительную остроту кризису придавали *парадоксы теории множеств*. Дело в том, что в представлении Гильберта и современных ему математиков естественным фундаментом для математики могла быть только теория множеств, разработанная Кантором в конце XIX века. Но в начале XX века в теории множеств обнаружились неустранимые противоречия.

«Наивная теория множеств» имеет дело с *множествами* — любыми совокупностями объектов, которые называются «элементами множества». Утверждение « x является элементом X » записывается как $x \in X$. Его отрицание записывается как $x \notin X$.

Можно говорить о «множестве всех последовательностей элементов данного множества», «множестве всех букв алфавита», «множестве всех слов из букв данного алфавита» и проделывать

над такими множествами естественные операции (пересечения, объединения и т. п.). *Подмножеством* множества X называется любое множество X' , обладающее тем свойством, что все элементы X' являются элементами X . Тот факт, что X' является подмножеством множества X , записывается как $X' \subset X$.

«Пустое множество» (обозначается $\emptyset$) не имеет элементов вообще.

Кантор не добивался абсолютной строгости в теории множеств. Первая попытка построить теорию множеств строго и аксиоматически принадлежала Готлобу Фреге, который предполагал, что получится логически вывести всю математику из самоочевидных постулатов теории множеств (этот подход к основаниям математики называется «логицизмом»). Построенную Фреге теорию называют «наивной теорией множеств». Она неверна (содержит противоречия).

Самое простое из противоречий наивной теории множеств было обнаружено Берtrandом Расселом в 1901 году. Рассмотрим множество A всех множеств X , не являющихся собственным элементом. Будет ли A принадлежать A ? Если A не принадлежит A , то A должно быть своим элементом, т. е. формальным следствием утверждения $A \notin A$ является $A \in A$.

Этот парадокс — форма хорошо известного «парадокса цирюльника». В одном селе живет цирюльник X , который бреет всех жителей, кроме тех, которые бреют себя сами. Бреет ли цирюльник X сам себя?

Со времен Рассела получено множество парадоксов наивной теории множеств. Они все сводятся, грубо говоря, к тому, что строится «слишком большое» множество, которое и приводит к парадоксам.

Рассел и Уайтхед построили версию теории множеств, свободную от известных парадоксов, но она оказалась неудобна. Более удобная версия аксиоматической теории множеств была разработана Э. Цермело в 1908 году. В 1922 г. А. Френкель дополнил эту систему аксиом; современная версия аксиоматической теории множеств называется *система аксиом Цермело—Френкеля* (ZF). Отличие этой версии теории множеств от наивной было в том, что «излишне больших» множеств Цермело и Френкель не допускали. Их теория оперировала не «всеми» множествами, а только теми, существование которых можно доказать (вывести из аксиом). Та-

кие множества конструируются из других множеств посредством набора четко определенных операций. И парадоксальные объекты, такие как «множество всех множеств», в системе аксиом Цермело—Френкеля просто *не существуют*.

Довольно долго (вплоть до Гёделя) математики надеялись, что теория множеств Цермело—Френкеля полна и непротиворечива. Сейчас ясно, что она неполна и, возможно, противоречива (во всяком случае, непротиворечивость этой системы аксиом доказать невозможно, и это факт). Тем не менее, в большинстве версий «оснований математики» математика базируется на теории множеств.

В обучении математике нам приходится поступать так же. Отчасти это связано с тем, что альтернативные подходы (конструктивная математика, теория категорий и другие) труднее и менее известны. А отчасти — с тем, что базовые понятия теории множеств (отображения, произведение множеств, подмножества, биекции, классы эквивалентности) необходимы математику в любом случае.

Бурбаки комментируют возможность противоречий в основаниях математики таким образом («Теория множеств»).

За 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы Теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие, и можно с основанием надеяться, что оно и не появится никогда.

Если бы дело и сложилось иначе, то, конечно, замеченное противоречие было бы внутренне присуще самим принципам, положенным в основание Теории множеств, а потому нужно было бы видоизменить эти принципы, стараясь по возможности не ставить под угрозу те части математики, которыми более других дорожат. И ясно, достичь этого тем более легко, что применение аксиоматического метода и формализованного языка позволит формулировать эти принципы более четко и отделять от них следствия более определенно. Впрочем, приблизительно это и произошло недавно, когда устранили «парадоксы» Теории множеств принятием формализованного языка... Подобную ревизию следует предпринять и в случае, когда этот язык окажется в свою очередь противоречивым.

1.4. ТЕРМИНОЛОГИЯ И БИБЛИОГРАФИЯ

По-английски теория множеств называется *set theory*, Цермело—Френкель пишется *Zermelo—Fraenkel*. В английской версии Википедии основания математики изложены весьма подробно, особенно экзотические и альтернативные версии. Популярное изложение формального метода и его истории есть в «Теории множеств» Бурбаки. Полезный учебник по теории множеств — «Теория множеств» Куратовского и Мостовского. Биография Гильберта — книга Констанс Рид «Гильберт».

Философские аспекты теорем Гёделя подробно обсуждаются в книгах Р. Пенроуза «Новый ум короля» («*The Emperor's New Mind*») и «Тени разума» («*Shadows of the Mind*»).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Г. Кантор определял множество так: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое». Говоря чуть более строго, «множество — это единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством» (тоже Кантор).

В наивной теории множеств множество есть «любая совокупность объектов, называемых элементами множества». Во избежание противоречий, которыми славится наивная теория множеств, это определение придется несколько изменить, отбросив «излишне большие» классы множеств. Множества *равны*, если они составлены из одинаковых элементов.

Множество S следует понимать как своего рода черный ящик — для каждого объекта x этот черный ящик умеет отвечать на вопрос: «Принадлежит ли x множеству S ?» Больше ничего S делать не умеет. Два множества *равны*, или же *совпадают*, если они отвечают на этот вопрос одинаково.

Если x принадлежит S , это обозначается $x \in S$ или $S \ni x$, если не принадлежит, это обозначается $x \notin S$. Это обозначение (как и большинство других обозначений для логических операторов: $\exists$, $\cap$, $\cup$ и так далее) придумал Джузеппе Пеано в конце XIX века. В этих обозначениях равенство множеств можно записать так:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (\forall x: x \in S_1 \Leftrightarrow x \in S_2),$$

т. е. множества S_1 и S_2 равны тогда и только тогда, когда для любого x условие $x \in S_1$ равносильно условию $x \in S_2$. Значок $\forall$ обозначает «для каждого», а $\Leftrightarrow$ — эквивалентность утверждений («тогда и только тогда», «равносильно»).

Подмножеством множества S называется множество S_1 , целиком содержащееся в S . Это обозначается $S_1 \subset S$ (обозначение введено Эрнстом Шрёдером в 1890 г.). Используя логические обозначения, это можно записать так:

$$S_1 \subset S \Leftrightarrow (\forall x: x \in S_1 \Rightarrow x \in S).$$

В этой формуле стрелка $\Rightarrow$ обозначает импликацию («следовательно»). Иногда это же самое записывают как $S \supset S_1$. Если $S_2 \subset S_1$ и $S_1 \subset S_2$, множества S_1 и S_2 равны.

Подмножество $S_1 \subset S$, не совпадающее с S , называется *собственным подмножеством*. Это обозначается так: $S_1 \subsetneq S$.

Пустое множество обозначают $\emptyset$; это обозначение впервые появилось у Бурбаки и принадлежит Андре Вейлю.

Множество всех подмножеств множества S обозначается 2^S .

Задача 2.1. Пусть S — конечное множество из s элементов. Докажите, что 2^S — конечное множество из 2^s элементов.

Если S_1 и S_2 — два множества, то можно говорить об их *объединении* $S_1 \cup S_2$ (множестве всех элементов, принадлежащих S_1 или S_2) и *пересечении* $S_1 \cap S_2$ (множестве всех элементов, принадлежащих S_1 и S_2). Формально объединение определяется так:

$$S_1 \cup S_2 = \{x: (x \in S_1) \vee (x \in S_2)\}. \quad (2.1.1)$$

В этой формуле $\{x: P(x)\}$ обозначает «множество всех x , удовлетворяющих $P(x)$ » (это обозначение принадлежит Кантору). Символы $\vee$ и $\wedge$ означают «или» и «и» (использовать $\vee$ для обозначения дизъюнкции первым стал Б. Рассел; вместо «и» Рассел использовал точку).

Задача 2.2. Запишите $S_1 \cap S_2$ формулой, аналогичной (2.1.1).

Если заданы множества S_1 и S_2 , то можно определить *произведение* $S_1 \times S_2$ — множество всех пар (x, y) , где $x \in S_1$, $y \in S_2$.

Дополнение множества A до подмножества $B \subset A$ — множество всех $a \in A$, которые не лежат в B . Дополнение обозначается $A \setminus B$.

2.2. Соответствия и отображения

Пусть S_1, S_2 — множества. *Соответствием*¹ называется любое подмножество $P \subset S_1 \times S_2$. Если пара (x, y) принадлежит P , то говорят: «Соответствие P выполнено для пары (x, y) ». Это обозначается $P(x, y)$.

Соответствие обычно задается какой-либо формулой: например, если $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, то формулы $x < y$, $x > y$, $x \neq y$ задают соответствия.

¹ Соответствие иногда называют *отношением*, или *бинарным отношением*. Это синонимы.

2.2. Соответствия и отображения

Отображением, или *функцией* $f: S_1 \rightarrow S_2$ называется такое соответствие $\Gamma_f \subset S_1 \times S_2$, что для каждого $x \in S_1$ существует единственный элемент $y \in S_2$, удовлетворяющий условию $(x, y) \in \Gamma_f$. Множество Γ_f в этой ситуации называется *графиком функции* f . *Значением функции* f на элементе $x \in S_1$ называется тот единственный элемент $y \in S_2$, для которого $(x, y) \in \Gamma_f$. Это обозначается так: $y = f(x)$.

Функцию часто задают формулами: если S_1 и S_2 — множества вещественных чисел, то формулы $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow |x|$, $x \rightarrow x + 2$ задают отображения.

Следует думать про функцию как про набор правил, ставящих в соответствие каждому $x \in S_1$ некоторый элемент множества S_2 .

Отображение из множества в себя называется *преобразованием* множества. *Тождественное преобразование* множества S переводит каждый элемент $x \in S$ в себя. Его график называется *диагональю*. Тождественное преобразование S обозначается $\text{Id}_S: S \rightarrow S$.

Если есть две функции $f: S_1 \rightarrow S_2$, $g: S_2 \rightarrow S_3$, то можно определить их *композицию*¹ $f \circ g$, ставящую в соответствие элементу $x \in S_1$ элемент $g(f(x)) \in S_3$.

Задача 2.3. Пусть $f: S_1 \rightarrow S_2$, $g: S_2 \rightarrow S_3$, $h: S_3 \rightarrow S_4$ — три функции. Докажите, что композиция удовлетворяет *свойству ассоциативности*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Замечание 2.1. Иногда значок $\circ$ обозначает композицию отображений, примененную в другом порядке: не $g(f(x))$, а $f(g(x))$.

Если $f(x) = y$, то y называется *образом* элемента x , а x — *прообразом* y .

Образом множества S_1 (обозначается $f(S_1)$) при отображении $f: S_1 \rightarrow S_2$ называется множество всех $y \in S_2$, которые являются образами каких-то $x \in S_1$.

Прообраз подмножества $R_2 \subset S_2$ — множество всех элементов $x \in S_1$, переходящих в элементы R_2 ; *образ подмножества* $R_1 \subset S_1$ — совокупность всех элементов, полученных как образы элементов R_1 . Образ подмножества обозначается $f(R_1)$, прообраз — $f^{-1}(R_2)$.

Ограничением функции $f: S_1 \rightarrow S_2$ на подмножество $R_1 \subset S_1$ называется функция $f|_{R_1}: R_1 \rightarrow S_2$, которая на каждом $x \in R_1$ принимает значение $f(x)$.

¹ Чаше композицию обозначают $g \circ f$. — Прим. ред.