И. Б. Аббасов

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕЛКОВОДЬЯ

УДК 551.466
ББК 26.222.5
А 13

Аббасов И.Б. **Моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 128 с. — ISBN 978-5-9221-1254-3.

Рассмотрены вопросы моделирования нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. Методом последовательных приближений получены решения нелинейного уравнения в двух приближениях. С помощью предложенного графоаналитического способа описана трансформация профиля поверхностных гравитационных волн на этапах заострения гребней, укручения их переднего фронта.

Рассмотрено влияние спектральных составляющих на процесс трансформации профиля волны, описаны причины возникновения асимметрий. На основе полученных аналитических выражений учтены влияния эффектов дисперсии на трансформацию профиля волн. Представлены пространственно-трехмерные модели распространения и рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на различных береговых образованиях.

Для научных работников и специалистов в области моделирования волновой гидродинамики.

Научное издание

АББАСОВ Ифтихар Балакиши оглы

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕЛКОВОДЬЯ

Редактор *О.В. Салецкая*
Оригинал-макет: *Е.В. Осипов*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 05.10.2010. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-1254-3

9 785922 112543

ISBN 978-5-9221-1254-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

1.1. Особенности постановки задач математической физики

При изучении физического процесса исследователю необходимо описать его в математических терминах. Математическое описание или моделирование процесса может быть достаточно разнообразным. При математическом моделировании исследуется не сам реальный физический процесс, а некоторая его модель — идеальный процесс, записанный в форме математических соотношений. Математическая модель должна сохранять основные черты реального физического процесса и в то же время должна быть достаточно простой для решения известными методами. В дальнейшем соответствие математической модели реальному процессу необходимо проверять экспериментальным путем.

Многие способы математического описания физических процессов приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными, а в некоторых случаях к интегро-дифференциальным уравнениям. Именно этой группе задач присваивают термин «математическая физика», а способы их решения называют методами математической физики [Власова, 2001].

Предметом изучения математической физики является теория математических моделей физических явлений. Широкое распространение методов математической физики связано с общностью математических моделей, базирующихся на фундаментальных законах природы: законы сохранения массы, энергии, заряда, количества движения. Это приводит к тому, что одни и те же математические модели описывают физические явления различной природы.

Математическая физика обычно исследует процессы в некоторой пространственной области, заполненной непрерывной материальной средой, так называемой сплошной средой. Величины, описывающие состояние среды и происходящие в ней физические процессы, зависят от пространственных координат и времени. В общем случае модели математической физики описывают поведение системы на трех уровнях: взаимодействие системы в целом с внешней средой; взаимодействие между элементарными объемами системы и свойства отдельно взятого элементарного объема системы.

Взаимодействия системы с внешней средой приводят к формулировке краевых условий, т.е. условий на границе области решения задачи, включающих в общем случае граничные и начальные условия. На втором уровне происходит описание взаимодействия элементарных объемов на основе законов сохранения физических субстанций и их переноса в пространстве. Третий уровень соответствует установлению уравнений состояния среды, т.е. построению математических моделей поведения среды в элементарном объеме.

Уравнения математической физики возникли из рассмотрения таких важнейших физических задач, как распространение звука в газах, волн в жидкостях, тепла в физических телах. В наше время активно изучаются такие явления, как ядерные реакции, гравитация, электромагнитные эффекты, происхождение и развитие Вселенной. Математические модели этих разных физических явлений приводят к уравнениям с частными производными.

Уравнением с частными производными называют уравнение, в которое входят неизвестная функция, зависящая от нескольких переменных, и ее частные производные. Зависимость от многих переменных неизвестной функции существенно усложняет решение уравнений с частными производными. Очень мало таких уравнений решается в явном виде.

В связи с развитием вычислительной техники возросла роль численных методов приближенного решения задач математической физики. Но при этом не утратили своего значения приближенные аналитические методы, позволяющие получить в конечном виде соотношения между искомыми функциями и заданными параметрами рассматриваемой задачи.

Точное аналитическое решение задач математической физики обычно требует интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. Эти уравнения необходимо проинтегрировать в некоторой пространственно-временной области, на границе которой искомые функции подчинены заданным краевым условиям. Поэтому точное аналитическое решение таких уравнений возможно лишь в редких случаях, что подчеркивает значимость приближенных методов решения. Прежде чем перейти к методам решения уравнений, рассмотрим классификацию дифференциальных уравнений с частными производными.

1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Многие задачи математической физики приводят к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Для неизвестной функции u, зависящей от двух переменных x и y линейное дифференциальное уравнения второго порядка имеет следующий вид

[Араманович, 1969]:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y). \tag{1.2.1}$$

Предполагаем, что все коэффициенты уравнения постоянны. Большинство дифференциальных уравнений математической физики представляют частные случаи общего уравнения (1.2.1).

Л. Эйлер доказал, что любое дифференциальное уравнение вида (1.2.1) с помощью замены независимых переменных x и y может быть приведено к одному из следующих трех видов:

1. Если $AC - \frac{B^2}{4} > 0$, то после введения новых независимых переменных ξ и η уравнение (1.2.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u = f_1(\xi, \eta). \tag{1.2.2}$$

В этом случае уравнение называется *эллиптическим*. Наиболее простым эллиптическим уравнением является уравнение Лапласа.

2. Если $AC - \frac{B^2}{4} < 0$, то уравнению 1.2.1 можно придать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_2\frac{\partial u}{\partial \xi} + E_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + F_2 u = f_2(\xi, \eta). \tag{1.2.3}$$

Такое уравнение называется *гиперболическим*; простейшим примером его является одномерное уравнение свободных колебаний.

3. Если $AC - \frac{B^2}{4} = 0$, то уравнение (1.2.1) приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_3\frac{\partial u}{\partial \xi} + E_3\frac{\partial u}{\partial \eta} + F_3 u = f_3(\xi, \eta). \tag{1.2.4}$$

Данное уравнение называется *параболическим*. Примером его служит уравнение линейной теплопроводности.

Наименования уравнений объясняются тем, что при исследовании общего уравнения кривых второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

оказывается, что кривая представляет:

в случае $AC - \frac{B^2}{4} > 0$ — *эллипс*;

в случае $AC - \frac{B^2}{4} < 0$ — *гиперболу*;

в случае $AC - \frac{B^2}{4} = 0$ — *параболу*.

Окончательно любое уравнение вида 1.2.1 может быть приведено к одному из следующих канонических типов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + cu = f \text{ (эллиптический тип),}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + cu = f \text{ (гиперболический тип),}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = f \text{ (параболический тип),}$$

(с — постоянное число, f — функция переменных x и y).

Уравнения гиперболического и параболического типов возникают чаще всего при изучении процессов, протекающих во времени (уравнения колебаний, распространения волн, распространения тепла, диффузии). В одномерном случае всегда участвует одна координата x и время t. Дополнительные условия для таких задач разделяются на *начальные* и *краевые*.

Начальные условия состоят в задании при $t = 0$ значений искомой функции u и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае).

Краевые условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции $u(x, t)$ на концах интервала изменения координаты. Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x, то краевые условия отпадают, и получается задача только с начальными условиями, или, как ее часто называют, *задача Коши*.

Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные и краевые условия. Тогда говорят о смешанной задаче.

Уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании стационарных процессов. Время t в эти уравнения не входит, и обе независимые переменные являются координатами точки. Такими оказываются уравнения стационарного температурного поля, электростатического поля и уравнения многих других физических задач. Для задач такого типа ставятся только краевые условия, т. е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области. Это может быть задача Дирихле, когда заданы значения самой функции; задача Неймана, когда заданы значения нормальной производной искомой функции, и задача, когда на контуре задана линейная комбинация функции, и ее нормальной производной.

В основных задачах математической физики именно физические соображения подсказывают, какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса.

Кроме того, следует иметь в виду, что все выведенные уравнения носят идеализированный характер, т. е. отражают лишь наиболее существенные черты процесса. Функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно.

1.3. Нелинейные уравнения гидродинамики

Линейные интегро-дифференциальные уравнения описывают волновые процессы, обладающие свойством суперпозиции. В линейных волнах пространственно-временные спектральные составляющие волновых полей распространяются без искажений и не взаимодействуют друг с другом.

Линейная среда представляет собой некоторую идеализированную модель описания реальной среды, и это описание не всегда адекватно. Применимость модели линейной среды зависит, в первую очередь, от величины отношения амплитуды волны к характерной величине, определяющей свойства среды. В линейной среде отношение амплитуды волны к характерной величине среды полагается бесконечно малым, в результате чего волновое уравнение становится линейным.

При конечной величине этого отношения в волновом уравнении необходимо учитывать *нелинейные члены*. Учет нелинейных членов в волновом уравнении приводит к качественно новым явлениям. Если на вход такой системы подается монохроматическая волна, то нелинейность приводит к последовательному возбуждению временных гармоник исходной волны. Расширение частотного спектра в дальнейшем приводит к искажению формы исходного синусоидального профиля волны.

В волновых системах степень нелинейного взаимодействия определяется как рассмотренной локальной нелинейностью, так и соотношением протяженности области взаимодействия к длине волны. Протяженность области эффективного взаимодействия гармоник во многом зависит от дисперсии и диссипации среды. Энергообмен между гармониками зависит от соотношения фаз. В среде без частотной дисперсии все волны бегут с одинаковыми скоростями, и фазовые соотношения сохраняются в процессе распространения между гармониками. Это условие называется условием *синхронизма*. Если затухание волн мало, то даже незначительные нелинейные эффекты могут накапливаться пропорционально расстоянию, и волна со временем станет неустойчивой, разрывной [Виноградова и др., 1979].

В случае среды с дисперсией фазовые скорости волн на различных частотах различны, вследствие чего соотношения между фазами гармоник изменяются в пространстве весьма быстро. При нарушении фазового синхронизма нелинейные эффекты не накапливаются и перекачка энергии незначительна. Поэтому в диспергирующих средах заметных искажений формы профиля волны не происходит.

Рассмотрим нелинейные уравнения, которые часто используются в гидродинамике, хотя они встречаются и во многих других областях современной физики. Учитывая аналогичность нелинейных эффектов любой природы, можно создать модельное уравнение для одномерной волны [Бреховских, Гончаров, 1982; Габов, 1988]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.3.1}$$

Здесь $\varepsilon << 1$ — параметр нелинейности; L — линейный оператор, соответствующий определенной дисперсии линейных волн.

Если $L = c\partial/\partial x$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.3.2}$$

Это нелинейное уравнение акустического типа без учета дисперсии и диссипации, его решением являются Римановы инварианты, приводящие к разным скоростям распространения областей сжатия и растяжения.

Если $L = c\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.3.3}$$

Это *уравнение Кортевега–де Вриза* для нелинейных сред с дисперсией, оно описывает поверхностные волны на мелководье и является частным случаем более общего уравнения для мелкой воды

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3}H\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0. \tag{1.3.4}$$

Уравнение 1.3.4 называется *уравнением Буссинеска*, оно описывает нелинейные волны малой амплитуды, движущиеся как влево, так и вправо. Для случая двумерных волн на мелкой воде используется *уравнение Кадомцева–Петвиашвили*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3c}{2H}u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6}cH^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{1}{2}c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.3.5}$$

Огибающие цуга поверхностных волн на глубокой воде описываются кубическим *уравнением Шредингера*

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu|u|^2 u = 0. \tag{1.3.6}$$

Уравнение Шредингера относится к параболическому типу с одной пространственной переменной.

Для описания поверхностных волн на мелкой воде с произвольной дисперсией используется *уравнения Уизема* с интегральным оператором:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)u_s(s,t)ds = 0. \tag{1.3.7}$$

Для изучения эффектов вязкости в жидкостях модельным уравнением является *уравнение Бюргерса*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.3.8}$$

Уравнение Бюргерса относится к параболическому типу и является одномерным случаем уравнения *Навье–Стокса*. Уравнение Навье–Стокса описывает двумерные волновые процессы в вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\nabla)v = -\nabla p + \eta \Delta v + (\xi + \frac{\eta}{3})\nabla\nabla v. \tag{1.3.9}$$

Процесс распространения ограниченного звукового пучка в нелинейной среде описывается двумерным *уравнением Хохлова–Заболотской–Кузнецова*:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^{2p'}}{\partial t^2}\right] = \frac{c_0}{2} \Delta_\perp p', \tag{1.3.10}$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — лапласиан по поперечным координатам.

В теории колебаний и солитонов применяется *уравнение Клейна–Гордона*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = V'(u), \tag{1.3.11}$$

здесь $V'(u)$ — некоторая нелинейная функция, зависящая от u. При $V'(u) = \sin u$ уравнение Клейна–Гордона преобразуется в так называемое уравнение sin-*Гордона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u. \tag{1.3.12}$$

Уравнение sin-Гордона используется для описания топологических солитонов с геометрией поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

В теории нелинейных волн также используется уравнение, имеющее решение типа бегущих волн произвольной формы:

$$(1 - \frac{\partial u^2}{\partial t})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (1 + \frac{\partial u^2}{\partial x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1.3.13}$$

Это *уравнение Борна–Инфельда*, оно описывает скачки фаз при взаимодействии двух солитонов.

1.4. Методы решения нелинейных уравнений. Метод последовательных приближений

Существуют различные приближенные аналитические методы решения задач математической физики. Выбор подходящего метода решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. *Нелинейные уравнения* можно разделить на два класса — алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие), называются трансцендентными [Амосов и др., 1994; Шуп Терри, 1990].

Методы решения нелинейных уравнений можно разделить на две группы:

1. *Точные методы*;
2. *Итерационные методы*.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. В некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно. Для их решения используются итерационные методы с заданной степенью точности.

Решить уравнение *итерационным методом* означает: установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней с нужной точностью. Приближенные значения корней (начальные приближения) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены *графическим* способом.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс сходится. К итерационным методам относится *метод последовательных приближений* (или метод простой итерации).

Сущность метода последовательных приближений состоит в следующем. Уравнение $f(x) = 0$, которое необходимо решить, переписывается в виде

$$x = \varphi(x). \tag{1.4.1}$$

После этого выбирается начальное приближение x_1 и подставляется в правую часть уравнения (1.4.1). Полученное значение $x_2 = \varphi(x_1)$ принимают за второе приближение для корня. Если найдено приближение x_n, то следующее приближение x_{n+1} определяют по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Пусть после нескольких приближений мы получим, что с заданной степенью точности выполняется равенство $x_n \approx x_{n+1}$. Так как $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, то это значит, что с заданной точностью выполняется равенство $x_n \approx \varphi(x_n)$, т. е. что x_n — приближенное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$.

При использовании метода последовательных приближений необходимо выяснить следующие особенности:

1. Если имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, то является ли число ξ решением уравнения $x = \varphi(x)$?
2. Всегда ли последовательность $x_1, \ldots, x_n$ сходится к некоторому числу ξ?
3. Как быстро приближаются числа $x_1, \ldots, x_n$ к корню ξ уравнения $x = \varphi(x)$?

Отвечая на первый вопрос, допустим, что числа $x_1, \ldots, x_n \ldots$ приближаются к числу ξ. Рассмотрим равенство $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, дающее выражение следующего приближения через предыдущее. С увеличением n его левая часть приближается к ξ, а правая часть — к $\varphi(\xi)$. Поэтому в пределе мы и получим $\xi = \varphi(\xi)$, т. е. ξ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$.

На второй вопрос ответ неоднозначный, для этого рассмотрим геометрическое представление метода последовательных приближений [Виленкин, 1968].

Геометрический смысл метода последовательных приближений

Отыскание корня ξ уравнения $x = \varphi(x)$ есть не что иное, как нахождение абсциссы точки A пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (1.4.1) является абсциссой точки пересечения A кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 1.4.1*а*).

Отправляясь от некоторой точки $A_0(x_0, \varphi(x_0))$, строим ломаную $A_0\,B_1\,A_1\,B_2\,A_2 \ldots$ — («лестница»), звенья которой попеременно параллельны оси Оx и оси Оy, вершины A_0, A_1, $A_2, \ldots$ лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины B_1, B_2, $B_3, \ldots$ — на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, ..., очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, ... корня ξ.

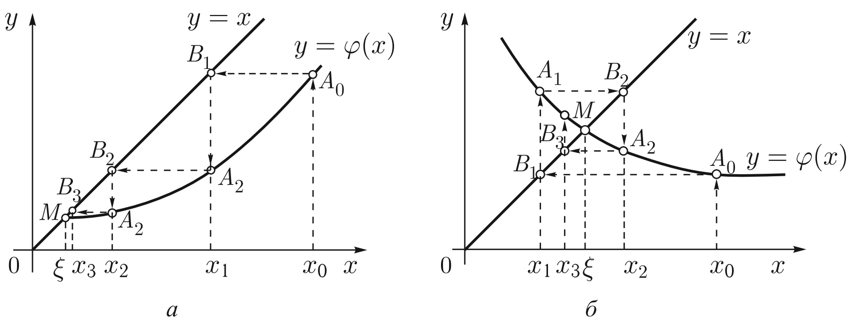

Рис. 1.4.1. Сходящиеся итерационные процессы

Возможен также другой вид ломаной $A_0\,B_1\,A_1\,B_2\,A_2 \ldots$ — «спираль» (рис. 1.4.1*б*). Решение в виде «лестницы» получается, если про-