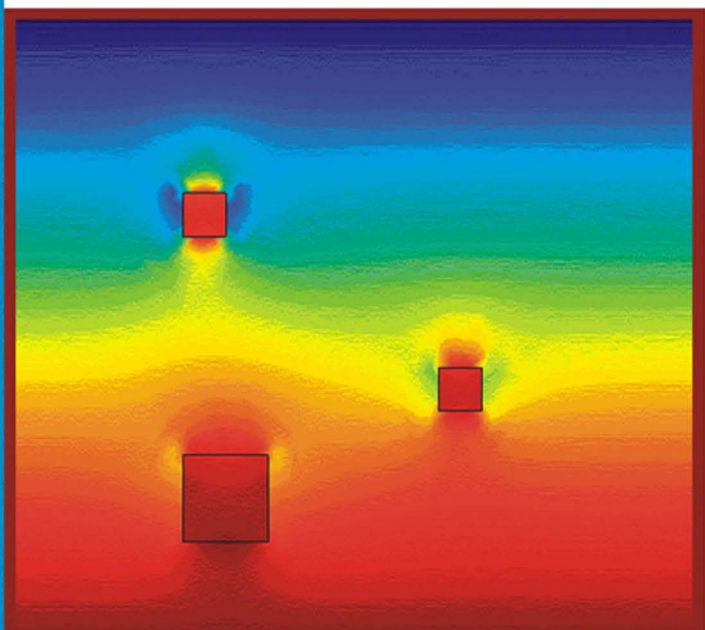




Н. Н. Гринчик

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ



УДК 537.876.23+519.6

Гринчик, Н. Н. Моделирование электрофизических и тепловых процессов в слоистых средах / Н. Н. Гринчик. – Минск: Беларус. наука, 2008. – 252 с. – ISBN 975-985-08-0985-8.

В монографии кратко рассмотрены основные положения электромагнетизма. При подаче известного материала внимание акцентировалось на формулировке условий на границах раздела смежных сред. Особое внимание уделялось условиям на границах раздела с учетом влияния тепловых и диффузионных процессов.

Впервые построена согласованная физико-математическая модель взаимодействия нестационарных электрических и тепловых полей в слоистой среде с учетом массопереноса. Модель основана на методах термодинамики, уравнениях электромагнитного поля и сформулирована без явного выделения носителей заряда (модель Ландау). Приводятся примеры решения ряда задач: импульсного электролиза в электрохимической ячейке, распространения волны в слоистой среде с магнитными свойствами.

Монография может быть использована для спецкурсов и как дополнение к обычным курсам для всех интересующихся прикладными аспектами теории электричества и электродинамики.

Табл. 8. Ил. 64. Библиогр.: 133 назв.

Р е ц е н з е н т ы:

академик НАН Беларуси А. П. Достанко,
член-корреспондент НАН Беларуси В. Л. Драгун

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ
(проект № T06P-089)*

ISBN 978-985-08-0985-8

© Гринчик Н. Н., 2008
© Оформление. РУП «Издательский
дом «Белорусская наука», 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего исследования – разработка физико-математической модели распространения электромагнитной волны (ЭМВ) в слоистых материалах с учетом влияния заряда двойного электрического слоя на границах раздела. Основные задачи:

анализ проблемы взаимодействия электромагнитных, тепловых полей и диффузионных процессов в многослойной структуре – электрохимической ячейке;

разработка физико-математической модели распространения и поглощения ЭМВ с учетом релаксационных процессов; физико-математической модели взаимодействия нестационарных электрических, тепловых и диффузионных явлений в электрохимической ячейке; численных методов решения полученных дифференциальных уравнений и алгоритмов их компьютерной реализации;

численное моделирование задач распространения и поглощения ЭМВ в слоистой структуре;

экспериментальная верификация предложенных моделей.

Взаимодействие электромагнитных волн с биологической тканью представляет собой сложную и малоизученную проблему. Биологическая ткань как слоистая среда состоит из клеток, мембран, кожного покрова, тканей и т. д. Лечение ряда заболеваний, диагностика, защита и маскировка человека от электромагнитной волны являются исключительно актуальными задачами. В настоящее время под редакцией академика РАН Ю. В. Гуляева начал изда-

ваться журнал «Субмиллиметровые волны в медицине и биологии», который освещает важные вопросы взаимодействия электромагнитных волн с биологической тканью. Отметим, что биологическая ткань в качестве проводника второго рода (электролита) еще больше усложняет проблему. При распространении ЭМВ в слоистой среде на границах раздела возникает поверхностный заряд. Известные теории и модели взаимодействия электромагнитных полей с биологическими тканями построены на большом количестве допущений. Поэтому разработка более строгих моделей, позволяющих учесть реальные физические процессы и явления, протекающие в биологических тканях при воздействии электромагнитного поля без введения большого количества феноменологических коэффициентов, даст возможность своевременно решить теоретические и практические задачи, а также получить более четкие представления о перспективах практического применения методов физиотерапии, в том числе и при определении состояния человека в условиях внешних электромагнитных воздействий.

Все большее распространение на металлургических заводах находят технологии индукционного нагрева металлов. Существующие методы расчета индукционного нагрева предполагают введение эмпирических коэффициентов: $\cos \alpha$, внутреннего импеданса, глубины проникновения электромагнитного поля и т. д., которые затрудняют проектирование нового оборудования, так как не только зависят от электрофизических свойств металла, но и являются функцией процесса. Полагаем, что проблему индукционного нагрева также необходимо рассматривать с учетом слоистости среды, поскольку между индуктором и обрабатываемой деталью имеется воздушный зазор.

Современные радиотехнические устройства начинают использовать более высокие частоты, поэтому при схемотехническом моделировании таких устройств применять условие квазистационарности токов в контуре становится

проблематично. Использование при проектировании сосредоточенных параметров R , L , C затруднительно. На высоких частотах $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$, электрическое поле не является потенциальным и уже нельзя говорить о напряжении, а также о вольт-амперной характеристике на высокой ($\sim 10^9$ Гц) частоте.

Как известно, радиотехническое устройство – типичная слоистая структура с сильными разрывами электромагнитного поля. Замыкающие соотношения, или условия на границах раздела, отсутствуют, что приводит к необходимости введения на поверхности раздела тензора импедансов. Одна из целей работы – формулировка новых условий на границах раздела без введения поверхностной емкости или сопротивления. Это упростит схемотехническое моделирование радиотехнических устройств.

Начало теоретическому исследованию проблемы изучения и распространения плоских электромагнитных волн в присутствии границы раздела сред положила классическая работа А. Зоммерфельда. Алгоритм расчета переменного электрического поля в слоистой среде предложил А. Н. Тихонова, обобщение и усовершенствование этого алгоритма осуществил В. И. Дмитриев. Проблема расчета поля в слоистых средах, согласно исследованиям данных авторов, сводится к вычислению интеграла Фурье – Бесселя, получившего известность как интеграл Зоммерфельда. Начиная с Вейла, который развил метод вычисления асимптотических значений таких интегралов, в дальнейшем названный методом седловой точки, или методом перевала, разрабатывались и другие подходы, например, в работах Ван дер Поля.

В последнее время В. В. Чебышев предложил метод численного исследования полосковых излучателей в слоистой среде с использованием тензорной функции Грина. В. И. Селин рассмотрел применение метода асимптотических возмущений фундаментального решения волнового уравнения для вычисления асимптотик полей точечного источника на

поверхности слоистой среды, а также получил приближенное граничное условие, связывающее тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей с поверхностным импедансом слоистой среды. Известное импедансное условие Леонтовича – Щукина на поверхности раздела, которое связывает тангенциальные проекции электрического и магнитного полей, определяется экспериментально, зависит не только от рода контактирующих веществ, но и от условий проведения эксперимента, что затрудняет разработку и создание новых приборов и устройств. При наличии нормальной составляющей вектора электрического смещения на контакте могут быть или под действием внешнего электрического поля возникать поверхностные заряды и поверхностные токи. Поверхностный заряд, как известно, образуется вследствие спонтанного перераспределения ионов или электронов на границе слоистой среды для выравнивания энергетических уровней Ферми, в результате чего появляется двойной электрический слой и имеет место пространственное распределение электрических зарядов на границе соприкосновения различных фаз.

Нестационарные тепловые и диффузионные процессы, а также дисперсия влияют на структуру двойного электрического слоя и распределение зарядов, что еще более усложняет проблему моделирования электрических полей. Построение эквивалентных схем замещения для учета заряда двойного электрического слоя посредством введения найденных экспериментально поверхностной емкости и поверхностного импеданса имеет смысл только в тех условиях опыта, при которых они и определялись, так как структура и заряд двойного электрического слоя представляют собой функцию процесса. В электрохимических системах указанные выше проблемы еще более усложняются – затруднительно учесть взаимодействие катионов и анионов, не являющихся независимыми компонентами, поскольку они связаны условиями электрической нейтральности за пределами двойного электрического слоя.

Для моделирования электромагнитных явлений в слоистых средах при наличии пространственного распределения электрических зарядов и образовании на границе контакта двойного электрического слоя предложено использовать телеграфное уравнение для вектора напряженности электрического поля и закон сохранения электрического заряда на границах раздела. В этом случае отсутствует необходимость задания поверхностного заряда, поверхностной емкости или импедансного условия Леонтовича–Щукина. Указанные параметры являются не только характеристиками свойств поверхности раздела, но и функцией процесса.

В основу работы положена оригинальная разработка автора в области математического и компьютерного моделирования физических процессов. Для феноменологического описания диффузионно-электрических явлений в жидких электролитах нами впервые предложено использовать методы термодинамики необратимых процессов и уравнения электромагнитного поля без явного выделения ионных носителей заряда.

В настоящее время разработаны два подхода к моделированию диффузионно-электрических явлений. Каждый из подходов обладает определенными недостатками и преимуществами. Для первого из них характерно рассмотрение потоков соответствующего вида ионов в полностью либо частично диссоциированном электролите. В получаемых уравнениях присутствует много параметров, отработанная методика по их определению в большинстве случаев отсутствует. Кроме того, описанная теория не учитывает взаимодействия катионов и анионов растворенного вещества между собой, а также с молекулами растворителя. Следует также отметить, что помимо реакции диссоциации происходит и ассоциация простых молекул, которые в свою очередь диссоциируют на комплексные и простые ионы. Коэффициенты диффузии комплексных ионов определять сложно, непросто учесть также силовое взаимодействие комплекс-

ных катионов и анионов между собой и внешним электромагнитным полем. Рассматриваемые трудности возрастают при описании многокомпонентного электролита. Подобные проблемы возникают и при моделировании задач в физике плазмы.

Второй подход не предусматривает введения и определения коэффициентов молекулярной диффузии катионов и анионов (модель Ландау) и степени диссоциации электролита. Он основывается на регистрируемых потоках тепла, массы и заряда без явного выделения ионных носителей, при этом ток проводимости включается в уравнения поля. Нами проведены экспериментальные исследования и численное моделирование задачи импульсного электролиза при прохождении тока через раствор меднения с использованием второго подхода.

Данный феноменологический подход справедлив не только для жидких электролитов. Действительно, для многих задач прикладного характера бывает достаточно рассматривать ионизованный газ или плазму как проводящий газ. Такое приближение строго обосновано только в случае плотной плазмы, когда длина пробега заряженных частиц значительно меньше характерных размеров системы и столкновения частиц играют определяющую роль. Распределение частиц по скоростям подчиняется закону Максвелла, и в каждой точке оно полностью определяется локальными значениями плотности, температуры и макроскопической скорости. При выполнении этих условий с единых позиций можно производить макроскопическое феноменологическое описание газовой плазмы, плазмы металлов и диэлектриков, плазмы в жидком электролите и в биологической ткани. Необходимое условие существования локального термодинамического равновесия плазмы – большая частота столкновений плазмы частиц (максвеллизация): за время между столкновениями на расстоянии длины свободного пробега в состоянии плазмы не должно быть заметных изменений.

Для расчета потерь одновременно учитывается запаздывание полей поляризации и намагниченности во внешнем электромагнитном поле, которое обусловлено не только электрическими, но и магнитными явлениями релаксации диполей и доменов. Данные эффекты учитывались в материальных уравнениях поля посредством введения только одного дополнительного параметра – времени релаксации диполей и доменов. Получено решение задачи о распространении ЭМВ (периодического граничного режима) с учетом наследственных характеристик среды, которые в качественном плане соответствуют экспериментальным данным.

В первую часть книги включен известный материал, методически связанный со второй частью издания. При изложении основных идей классической электродинамики [1–8] в первую часть книги не вошли многие важные разделы – электрические токи в вакууме, разряды в газе, движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, электромагнитные колебания и волны, а также техническое использование электричества. В то же время во второй части более полно рассмотрены вопросы прохождения тока через растворы электролитов, тепловые и диффузионные процессы в слоистых материалах, а также новые условия на границах раздела смежных сред для уравнений электромагнитного поля Максвелла, которые имеют общее значение.

Часть I

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Глава 1

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

1.1. Электрический заряд

В конце XVI в. английский врач У. Джильберт подробно исследовал удивительные свойства янтаря, потертого о шерсть. Именно У. Джильберт обнаружил, что свойством притягивать предметы обладают и многие другие материалы, которые он назвал наэлектризованными (от греч. *электрон* — янтарь). Отметим, что электрические заряды всегда возникают на границах раздела различных веществ и при отсутствии трения. Физические и химические свойства вещества в значительной степени объясняются электрическими силами.

Рассмотрим классическую теорию электромагнетизма в предположении, что электрический заряд и ток можно измерить независимо друг от друга с неограниченной точностью. Квантовые законы в данном варианте теории рассматриваться не будут. Квантовая физика, специальная теория относительности не затмили, а, наоборот, усилили значение уравнений электромагнитного поля Максвелла, выведенных более 100 лет назад.

Сохранившееся в современной физике значение классической теории электромагнетизма объясняется двумя фактами: специальная теория относительности не требует пересмотра классического электромагнетизма, так как сама выросла из классической электромагнитной теории и связанных с ней экспериментов; квантовый характер электромагнитных сил не оказывает влияния даже при расстояни-

ях менее 10^{-12} м, что в 100 раз меньше характерных размеров атомов. Для малых расстояний имеет место успешное слияние электромагнитной и квантовой теорий.

Под электрическим зарядом в дальнейшем будем понимать источник электромагнитного поля, связанный с материальным носителем. Природа электростатического отталкивания или притяжения объясняется фактом существования зарядов двух видов, условно называемых положительными и отрицательными, при этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Величина заряда служит мерой количества электричества. Электрический заряд дискретен, а именно существует минимальный элементарный электрический заряд, которому кратны все электрические заряды.

Минимальный электрический заряд электрона составляет $1,60210 \cdot 10^{-19}$ Кл. Грубую оценку верхнего предела радиуса электрона можно получить, предположив, что вся его масса электромагнитного происхождения. Тогда $r_e = 2,81777 \cdot 10^{-15}$ м ($r_e = e^2/mc^2$). В атомной физике широко используется внесистемная единица энергии – электрон-вольт: 1 эВ равен энергии, которую приобретает элементарный электрический заряд, равный заряду электрона, проходя разность потенциалов 1 В (1 эВ = $1,60207 \cdot 10^{-19}$ Дж, 1 кэВ = 10^3 эВ, 1 МэВ = 10^6 эВ, 1 ГэВ = 10^9 эВ).

Связь электрического заряда с создаваемым им полем определяется уравнениями Максвелла. Плотность заряда ρ_e находится следующим образом: $\rho_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta V)$, где Δq – суммарный заряд в объеме ΔV . В действительности, ρ_e для всех тел близко к нулю. Это связано с тем, что одноименные заряды всегда отталкиваются, так как большие скопления положительно или отрицательно заряженных частиц, как правило, долго существовать не могут.

В некоторых телах электрические заряды свободно перемещаются между различными частицами тела, в других телах такого явления не наблюдается, поэто-

му их условно разделяют на проводники и диэлектрики. Все известные вещества в большей или меньшей степени проводят электричество.

1.2. Сохранение заряда

В изолированной системе полный электрический заряд, т. е. алгебраическая сумма положительного и отрицательного зарядов, остается постоянным. Под изолированной понимаем такую систему, через границы которой не могут проникнуть носители заряда. Свет может входить и выходить из системы, не нарушая этого принципа, так как фотоны не несут зарядов. Гамма-лучи способны ионизировать вещество, при этом можно наблюдать создание положительного и отрицательного электронов, но суммарный заряд системы по-прежнему равен нулю. Закон сохранения заряда был бы нарушен в случае создания частицы только одного знака, но этого никогда не наблюдалось. Таким образом, в законе сохранения заряда, массы проявляется некая универсальная симметрия природы. Закон сохранения заряда является одним из наиболее общих законов природы.

1.3. Закон Кулона для покоящихся зарядов

Опыт показывает, что два неподвижных заряда отталкиваются или притягиваются с силой, пропорциональной произведению величины зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{n}, \quad (1.1)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2; r – расстояние между зарядами. Сила $\mathbf{F}$ зависит от знака зарядов: если q_1, q_2 имеют противоположные знаки, заряды притягиваются; если знаки зарядов совпадают, $\mathbf{F}$ является силой отталкивания.

Сила гравитации есть сила притяжения. Влияние силы гравитации в 10^{39} раз меньше силы электрического отталкивания электронов. Такое влияние гравитации заметно, когда взаимодействующие массы очень велики.

Умножение на единичный вектор $\mathbf{n}$ означает, что сила параллельна линии, соединяющей заряд. Это могло быть иначе, если бы само пространство обладало свойством внутренней неоднородности, но в пустом и изотропном пространстве два точечных заряда не могут определить другого направления, кроме линии, их соединяющей. Если точечный заряд имеет некоторую внутреннюю структуру с осью, определяющей направление, его нельзя описать только одной скалярной величиной q .

В уравнении (1.1) полагается, что оба заряда занимают объемы, размеры которых малы по сравнению с r . Требование неподвижности зарядов необходимо для исключения вопроса о магнитных силах, образующиеся при движении зарядов.

Естественно возникает вопрос: почему появляются силы, действующие на заряды, и как они передаются от одного заряда к другому? Для понимания происхождения и передачи сил, действующих между покоящимися зарядами, необходимо допустить наличие между зарядами какого-то физического агента, осуществляющего это взаимодействие. Этот агент – электрическое поле.

1.4. Напряженность электрического поля

Для количественной оценки электрического поля служит специальная векторная физическая величина – напряженность электрического поля.

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом q . Внесем в данное поле точечный пробный заряд q_1 . Положим $q_1 \ll q$, поэтому искажения электрического поля вследствие влияния q_1 не происходит. На пробный заряд q_1 будет действовать сила $\mathbf{F}$, различная в разных точках поля, но

пропорциональная, согласно закону Кулона, q_1q . Однако отношение этой силы к пробному заряду F/q_1 уже не зависит от выбора пробного заряда и является векторной характеристикой электрического поля. Данная величина и называется напряженностью электрического поля E .

Опыт показывает, что при наличии двух и более зарядов результирующее поле есть векторная сумма напряженностей полей, создаваемых отдельными зарядами. Если $E_1, E_2, E_3, \dots$ – напряженности полей, создаваемых отдельными зарядами в какой-либо точке, то напряженность результирующего поля в той же точке

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots = \sum_k E_k.$$

Данное соотношение выражает принцип суперпозиции (или наложения) электрических полей. Справедливость этого принципа подтверждает опыт. Следует иметь в виду, что на малых квантовых расстояниях и в сверхсильных полях данный принцип может нарушаться.

1.5. Объемная и поверхностная плотности заряда

Объемная плотность заряда измеряется зарядом единицы объема тела:

$$\rho_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Распределение заряда в объеме тела задано, если известно ρ как функция координат. Очень часто заряды распределяются в телах только внутри тонкого тела, прилегающего к поверхности. В этом случае удобно пользоваться поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

где Δq – заряд, находящийся на элементе поверхности ΔS . Следовательно, заряд, находящийся на элементе поверхности dS , равен σdS .

1.6. Векторное поле и его дифференциальные характеристики

Состояние электромагнитного поля характеризуется заданием его векторных характеристик – напряженностей электрического и магнитных полей, поэтому в теории широко используется векторный анализ. Предположим, что основы векторного анализа известны читателю, но считаем необходимым напомнить основные определения.

1.6.1. Поток

Рассмотрим в пространстве некоторое электрическое поле и замкнутую поверхность S произвольной формы. Разделим всю поверхность на столь малые части, что каждую элементарную площадку можно считать плоской, а вектор поля – постоянным. Другими словами, поверхность должна быть не слишком «морщинистой» и не проходить через особенности поля, например точечный заряд. Обозначим через $\mathbf{E}_j$ вектор электрического поля на элементе поверхности. Скалярное произведение $\mathbf{E}_j \mathbf{S}_j$ является числом, которое и называют потоком через данный элемент поверхности. Наше определение потока применимо к любой векторной функции. Под $\mathbf{E}_j$ можно понимать, в частности, скорость воды в реке, $\mathbf{S}_j$ – элемент площади в воде, тогда $\mathbf{E}_j \mathbf{S}_j$ означает поток воды Φ ; $\Phi = \sum_j \mathbf{E}_j \mathbf{S}_j$ – скалярная величина. Беспрерывно уменьшая участки и увеличивая их число, перейдем к поверхностному интегралу

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S},$$

тогда поток через замкнутую поверхность

$$\Phi = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

1.6.2. Теоремы Остроградского – Гаусса и Стокса

Предположим, что задан поток вектора в каждой точке пространства

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int f(\mathbf{r}) dV, \quad (1.2)$$

где $f(\mathbf{r})$ – известная функция координат, тогда на основании теоремы Остроградского имеем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int f(\mathbf{r}) dV, \quad (1.3)$$

откуда ввиду произвольного характера области интегрирования с объемом V получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = f(\mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Таким образом, задание потока вектора через замкнутую поверхность в каждой точке пространства эквивалентно заданию дивергенции этого вектора.

В гидродинамике дивергенция скорости жидкости $\mathbf{v}$ имеет непосредственное физическое значение. Действительно, в каждой точке жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{v}_n dS}{\Delta V} \quad (1.5)$$

т. е. равна рассчитанному на единицу объема количеству жидкости, вытекающей из элемента объема dV , окружающего рассматриваемую точку. Термин «дивергенция» (от лат. – обнаруживать расхождение) был избран потому, что жидкость растекается или расходится из тех точек, в которых $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$. В данных точках и должны быть расположены источники жидкости. Те точки поля, в которых $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$, принято называть истоками, или стоками, поля. Векторные поля, у которых $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, называются соленоидальными. В проекциях на декартовы оси

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Дивергенция вектора $\mathbf{v}$ в данной точке поля есть предел, к которому стремится отклонение потока вектора $\mathbf{v}$ через произвольную, окружающую эту точку поверхность к ограниченному этой поверхностью объему ΔV (при $\Delta V \rightarrow 0$). Следовательно, значение $\text{div } \mathbf{v}$ не зависит от выбора системы координат и является истинным скаляром.

Рассмотрим теперь интеграл вектора по замкнутой кривой. Пусть в поле вектора $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ заданы некоторая кривая ℓ и возможное положительное направление движения вдоль нее. Разбиваем кривую ℓ на бесконечно малые элементы $d\ell$, направление которых совпадает с направлением положительного движения вдоль линии, и умножаем каждый элемент $d\ell$ скалярно на значение вектора $\mathbf{E}$ в соответствующей точке поля. Предел суммы этих произведений $\mathbf{E} d\ell = E_\ell d\ell$ при $d\ell \rightarrow 0$, распространенный на все элементы кривой, называется линейным интегралом вектора $\mathbf{E}$ вдоль кривой ℓ :

$$\oint \mathbf{E} d\ell = \int_{\ell} E_\ell d\ell ;$$

если кривая ℓ замкнута, что отмечается кружком у знака интеграла, то линейный интеграл вектора $\mathbf{E}$ вдоль нее называется циркуляцией вдоль ℓ . На основании теоремы Стокса имеем

$$\oint \mathbf{E} d\ell = \int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int \vec{\omega}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} , \quad (1.7)$$

где $\vec{\omega}(\mathbf{r})$ – известная векторная функция координат.

Величина $\text{rot } \mathbf{E}$ называется вихрем, или ротором, электрического поля и имеет вид в проекциях на декартовы оси координат

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{E} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} , \\ \text{rot}_y \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} , \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Задание циркуляции вектора эквивалентно заданию его ротора.

В курсах теоретической механики показано, что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega/2$, где ω – угловая скорость вращения твердого тела; $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ в точках тела, которые совершают вращательное движение. Это обстоятельство и послужило поводом к тому, чтобы дать величине $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ название ротора, или вихря $\mathbf{v}$.

1.7. Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме

Введем понятие электрического смещения для вакуума:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1.9)$$

Обобщение на случай произвольной среды имеет вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость.

Если электрическое поле создается одним точечным зарядом, то электрическое смещение на расстоянии r от заряда равно по модулю

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}, \quad (1.11)$$

а направление смещения $\mathbf{D}$ совпадает с направлением поля $\mathbf{E}$.

Вычислим поток вектора $\mathbf{D}$ через сферическую поверхность радиусом r , в центре которой расположен точечный заряд q . Величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ совпадают по направлению в каждой точке сферической поверхности, D определяется формулой (1.11), тогда суммарный поток Φ равен

$$\Phi = D \times \text{площадь} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = q. \quad (1.12)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Обозначения	10
Часть I. Основные законы электромагнетизма.	12
<i>Глава 1. Электрическое поле.</i>	<i>12</i>
1.1. Электрический заряд	12
1.2. Сохранение заряда	14
1.3. Закон Кулона для покоящихся зарядов	14
1.4. Напряженность электрического поля	15
1.5. Объемная и поверхностная плотности заряда	16
1.6. Векторное поле и его дифференциальные характеристики	17
1.6.1. Поток	17
1.6.2. Теоремы Остроградского – Гаусса и Стокса	18
1.7. Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме	20
1.8. Применение теоремы Гаусса	22
1.8.1. Электрическое поле бесконечной равномерно заря- женной плоскости	22
1.8.2. Шаровой конденсатор	23
1.8.3. Цилиндрический конденсатор	23
1.9. Дифференциальная форма электростатической теоремы Гаусса. Уравнение Пуассона. Свободные и связанные заряды .	24
1.10. Электрический потенциал	25
1.10.1. Работа в электростатическом поле	25
1.10.2. Потенциал и потенциальное поле	26
1.10.3. Потенциал в простейших электрических полях ..	27
1.11. Проводники и изоляторы	30
1.12. Силы, действующие на поверхность проводника	31
1.13. Электрическая емкость	33
1.14. Емкость простых конденсаторов	34
1.15. Диэлектрики	35
1.15.1. Поляризация диэлектриков	35
1.15.2. Поляризованность	37
1.15.3. Напряженность электрического поля внутри ди- электрика	38
1.15.4. Электрическое смещение в слоистом диэлектрике и поверхностная дивергенция	40
1.15.5. Трение двух диэлектриков	42

1.15.6. Объемные и поверхностные связанные заряды. . .	44
1.15.7. Сегнетоэлектрики	45
1.15.8. Пирозэлектрики.	47
1.15.9. Пьезоэлектрический эффект	48
Глава 2. Электрический ток	51
2.1. Постоянный электрический ток в проводниках первого рода	51
2.2. Уравнение непрерывности	55
2.3. Квазистационарные токи	55
2.4. Закон Джоуля – Ленца.	57
2.5. Ток в слоистом материале и поверхностный заряд.	59
2.6. Электрический ток в электролитах.	61
2.6.1. Законы электролиза Фарадея.	61
2.6.2. Электролитическая диссоциация	62
2.6.3. Движение ионов в электролитах	63
2.6.4. Проводимость электролитов	64
2.6.5. Эффект Вина и дисперсия электропроводности. . .	65
Глава 3. Электрические явления в контактах	66
3.1. Контактная разность потенциалов	66
3.2. Сторонние электродвижущие силы	68
3.3. Термоэлектричество	70
Глава 4. Магнитное поле в вакууме	75
4.1. Сила Лоренца	75
4.2. Магнитное поле равномерно движущегося заряда.	76
4.3. Закон Био – Савара для постоянных токов.	77
4.4. Основные законы магнитного поля.	78
4.4.1. Теорема Гаусса для поля B . Магнитный поток . . .	78
4.4.2. Теорема о циркуляции вектора B	80
4.5. Применения теоремы о циркуляции вектора B	83
4.6. Сила, действующая на контур с током	87
4.7. Момент сил, действующих на контур с током.	89
4.8. Работа при перемещении контура с током.	90
Глава 5. Магнитное поле в веществе	93
5.1. Намагничивание вещества. Намагниченность	93
5.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля H (для магнитного поля постоянных токов).	96
5.3. Граничные условия для B и H	98
5.4. Ферромагнетизм.	101
Глава 6. Относительность электрического и магнитного полей	107
6.1. Электромагнитное поле. Инвариантность заряда	107
6.2. Законы преобразования полей E и B	109
6.3. Инварианты электромагнитного поля	114

Глава 7. Электромагнитная индукция	117
7.1. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца	117
7.2. Природа электромагнитной индукции	121
Глава 8. Уравнения Максвелла. Энергия электромагнитного поля	129
8.1. Ток смещения	129
8.2. Система уравнений Максвелла	133
8.3. Свойства уравнений Максвелла	137
8.4. Энергия и поток энергии. Вектор Пойнтинга	141
8.5. Импульс электромагнитного поля	145
Часть II. Новые замыкающие соотношения для уравнений электромагнитного поля Максвелла в слоистых материалах	149
Глава 1. Электродинамические процессы в проводниках второго рода	150
1.1. Предыдущие исследования и современное состояние теории прохождения тока через растворы электролитов	150
1.2. Макроскопическая электронейтральность объемного раствора электролита	155
1.3. Парадокс Гиббса и различимость катионов и анионов при макроскопическом описании раствора электролита	157
1.4. Уравнения диффузии и миграции ионов в проводниках второго рода при протекании электрического тока. Модель Ландау	166
1.5. Полный ток в проводнике второго рода с учетом влияния нестационарных потоков тепла и массы	168
1.6. Система уравнений для описания электродинамических процессов в проводниках второго рода	174
Глава 2. Взаимодействие электрических, тепловых полей и диффузии в слоистых средах с учетом релаксации	176
2.1. Взаимодействие нестационарных электрических, тепловых полей и диффузии в слоистых материалах	178
2.2. Взаимодействие нестационарных электрических и тепловых полей с учетом релаксационных процессов	184
2.3. Особенности вычисления распространения электромагнитных волн в слоистых средах. Схемы сквозного счета с учетом поверхностных токов	205
2.4. Результаты численного моделирования распространения электромагнитных волн в слоистых средах с использованием схем сквозного счета	208

2.5. Пондеромоторные силы в неоднородных слоистых средах с поглощением	214
Глава 3. Высокочастотная электродинамика медленно движущихся сред	218
3.1. К аэроакустике движущихся сред	219
3.2. Скорость электромагнитной волны в медленно движущейся среде. Коэффициент увлечения Френеля.	229
3.3. Электромагнитные волны в медленно движущейся среде	230
Приложение 1. Индукционный нагрев металлов	236
Приложение 2. Распознавание и контроль состояний динамических объектов в атмосфере на основе эффекта вторичной модуляции радиолокационных сигналов	239
Литература.	241

Научное издание

Гринчик Николай Николаевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Редактор *Г. В. Малахова*

Художественный редактор *Т. Д. Царева*

Технический редактор *Т. В. Летьен*

Компьютерная верстка *Н. И. Кашуба*

Подписано в печать 23.10.2008. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. офсетная № 1.

Гарнитура Таймс ЕТ. Усл. печ. л. 13,23. Усл. кр.-отт. 13,65.

Уч.-изд. л. 11,2. Тираж 150 экз. Заказ 429.

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом
«Белорусская наука».

ЛИ № 02330/0131569 от 11.05.2005. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

Отпечатано в РУП «Издательский дом «Белорусская наука».