

А. М. Райгородский

Модели случайных графов

МЦНМО

УДК 519.179.4

ББК 22.176

P18

Райгородский А. М.
Модели случайных графов.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
144 с.
ISBN 978-5-4439-3025-1

Книга посвящена теории случайных графов. Эта теория находится на стыке комбинаторики, теории графов и теории вероятностей.

Книга основана на многочисленных лекциях, которые автор читал в МГУ, МФТИ, на школах «Современная математика» в Дубне и «Комбинаторная математика и теория алгоритмов» в Судиславле, а также в Школе Анализа Данных Яндекса.

Книга предназначена для широкого круга читателей.

Подготовлено на основе книги:

Райгородский А. М. Модели случайных графов. — 2-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2016. — 144 с. — ISBN 978-5-4439-1025-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3025-1

© Райгородский А. М., 2017.
© МЦНМО, 2017.

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1	
Некоторые основы теории вероятностей	8
1.1. Классическая вероятность	8
1.2. Схема Бернулли	9
1.3. Схема серий	11
1.4. Общее конечное вероятностное пространство	11
1.5. Условные вероятности и независимость событий	12
1.6. Несколько слов о бесконечных вероятностных пространствах	14
1.7. Случайные величины и их распределения	16
1.8. Моменты распределений	18
1.9. Формула обращения и предельные теоремы пуассоновского типа	21
1.10. Нормальная аппроксимация	24
1.11. Неравенства Чебышёва и Маркова	25
1.12. Уточнение неравенства Чебышёва в случае схемы Бернулли	26
1.13. Условные вероятности и математические ожидания отно- сительно разбиений	27
1.14. Понятие о мартингале	29
1.15. Неравенство Азумы	29
Глава 2	
Модель Эрдёша — Реньи случайного графа	32
2.1. Введение	32
2.2. Определение модели Эрдёша — Реньи	33
2.3. Одна естественная модификация модели	34
2.4. Треугольники в случайных графах	34
2.4.1. Постановка задачи и формулировки результатов . . .	35
2.4.2. Доказательство теоремы 10	36
2.4.3. Доказательство теоремы 12	36
2.4.4. Доказательство теоремы 11	39
2.5. Связность случайного графа	42
2.5.1. Формулировки результатов и комментарии к ним . .	42
2.5.2. Доказательство теоремы 14	44
2.5.3. Вокруг теоремы 13	46
2.5.4. Гигантская компонента	47

2.6. Хроматическое число случайного графа	48
2.6.1. Определения, формулировки и комментарии	48
2.6.2. Мартингалы реберного и вершинного типов	51
2.6.3. Доказательство теоремы 18: формулировка леммы 1 и вывод из нее	52
2.6.4. Доказательство теоремы 18: доказательство леммы 1	54
2.6.5. Нижняя оценка в теореме 17	56
2.6.6. Верхняя оценка в теореме 17: план действий	58
2.6.7. Верхняя оценка в теореме 17: идея доказательства	58
2.6.8. Верхняя оценка в теореме 17: выбор параметров и оценка вероятности	59
2.6.9. Верхняя оценка в теореме 17: доказательство леммы 2	60
2.6.10. Комментарий к лемме 2	63
2.6.11. Чем Y_k лучше X_k , или почему не работает неравен- ство Чебышёва?	64
2.6.12. О функции u в теореме 18	65
2.7. О числе независимости и кликовом числе случайного графа	66
2.8. Числа Рамсея	67
2.9. Хроматическое число и обхват графа	70
2.10. Законы нуля или единицы	72
2.10.1. Язык первого порядка для графов	73
2.10.2. Формулировки результатов	73
2.10.3. Игра Эренфойхта	74
2.10.4. Выигрышная стратегия для Консерватора	76
2.11. Еще ряд сюжетов	77
2.11.1. Деревья в случайных графах	77
2.11.2. Еще несколько слов о хроматическом числе случай- ного графа	79
2.11.3. Планарность случайного графа	79
2.11.4. Степени вершин случайного графа	81
2.11.5. Изоморфизм случайных графов	81

Глава 3

Обобщенная модель Эрдёша — Реньи и случайные дистанционные графы	84
3.1. Определение модели	84
3.2. Случайные подграфы куба	85
3.3. Случайные дистанционные графы	87
3.4. Вспомогательные факты и свойства полного дистанционно- го графа	88
3.4.1. Немного простой аналитики	88

3.4.2. О числе независимости полного графа расстояний	89
3.4.3. О кликовом числе полного графа расстояний	91
3.4.4. О хроматическом числе полного графа расстояний	92
3.4.5. О числе ребер в произвольном подмножестве множества вершин полного графа расстояний	94
3.4.6. «Олимпиадный» комментарий к предыдущему пункту	97
3.5. Хроматическое и кликовое числа дистанционного графа	99
3.6. Хроматическое число случайного дистанционного графа	103
3.7. Дистанционные числа Рамсея	104
3.7.1. Постановка задачи	104
3.7.2. Формулировки результатов	105
3.7.3. Доказательство теоремы 35	107
3.7.4. Доказательство теоремы 37	108
3.8. О связности случайного дистанционного графа	111
3.9. Законы нуля или единицы для случайного дистанционного графа	112
3.10. Дистанционные графы и их случайные подграфы: еще одно определение	113
3.10.1. Определение и результаты	113
3.10.2. Доказательство теоремы 42	116
Глава 4	
Модели случайных веб-графов	118
4.1. Наблюдения Барабаши — Альберт	118
4.2. Модель Боллобаша — Риордана	120
4.2.1. Динамическая модификация	120
4.2.2. Статическая модификация, или LCD-модель	121
4.2.3. Некоторые результаты	122
4.2.4. Доказательство теоремы 46 при $k = 1$	125
4.3. Модель копирования	131
Глава 5	
Приложение	133
Литература	135

1. Некоторые основы теории вероятностей

В этой главе мы расскажем о наиболее значимых для дальнейшего аспектах теории вероятностей. Наше изложение будет достаточно сжатым, хотя и предельно элементарным, и замкнутым в себе. В качестве литературы к этой главе сразу стоит указать книги [10, 45, 49].

1.1. Классическая вероятность

Представим себе обычную игральную кость — кубик, сделанный из идеально однородного материала. Если мы бросим такую кость на стол, то произойдет ровно одно из шести событий: либо кость выпадет сверху той гранью, на которой нарисована одна точка, либо той, на которой точек две, и так далее. Поскольку кость идеально однородная, разумно считать, что указанные события *равновероятны*. При этом они *попарно несовместны* в том смысле, что никакие два из них не происходят одновременно. Наконец, как мы уже говорили, одно из этих событий непременно случится. Все перечисленные обстоятельства позволяют сказать, что с вероятностью $\frac{1}{6}$ кость выпадет заданной стороной сверху.

В общем случае классическая вероятность устроена совершенно аналогично. Есть некоторый набор событий $\omega_1, \dots, \omega_n$. Они попарно несовместны, одно из них обязательно реализуется, и они равновероятны. Такие события называют *элементарными*, и полагают вероятность каждого из них равной $\frac{1}{n}$.

Теперь допустим, что некоторое событие происходит тогда и только тогда, когда выполнено (ровно) одно из элементарных событий $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}$. Например, событие «кость выпала сверху гранью, на которой нарисовано четное число точек» имеет место, коль скоро реализовалось либо элементарное событие «с двумя точками», либо элементарное событие «с четырьмя точками», либо элементарное событие «с шестью точками». Говорят, что такие элементарные события *благоприятствуют* данному событию. Очевидно, что и в примере с костью вероятность интересующего нас события следует полагать равной $\frac{3}{6}$, и в общем случае ее нужно приравнивать к $\frac{k}{n}$.

В итоге вероятность любого события есть отношение числа благоприятствующих ему элементарных событий к числу всех элементарных событий.

Обычно используют формальные обозначения и соответствующую терминологию. А именно, полагают $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и называют множество Ω *пространством элементарных событий*. Каждое событие интерпретируют как подмножество в Ω , состоящее из благоприятствующих элементов. Множество всех событий обозначают $\mathcal{F}$. Как правило, $\mathcal{F}$ — это множество всех подмножеств из Ω , так что $|\mathcal{F}| = 2^n$. Наконец, вероятность обозначают символом P (в честь «probability» (англ.), «probabilité» (фр.) и т. д.). Это функция, заданная на множестве $\mathcal{F}$ и принимающая значения в $\left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$: $P(A) = \frac{|A|}{n}$. Всю тройку описанных объектов $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называют (*классическим*) *вероятностным пространством*.

Ясно, что события можно объединять и пересекать. Если есть события $A, B \in \mathcal{F}$, то событие $A \cup B$ — это событие, которое, по сути, состоит в том, что либо выполнено A , либо выполнено B . Аналогично, $A \cap B$ — это событие, состоящее в том, что одновременно реализовались A и B . Наконец, через $\bar{A}$ обозначают отрицание события A : в терминах множеств $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Вероятность обладает очевидными свойствами:

- 1) Для любого события $A \in \mathcal{F}$ выполнено $P(A) \in [0, 1]$.
- 2) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
- 3) Каковы бы ни были $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
В частности, если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 4) Для любого события $A \in \mathcal{F}$ выполнено $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

1.2. Схема Бернулли

Вот еще одна вероятностная конструкция, которая очень широко используется в науке и ее приложениях; для нас она также будет одной из основных.

Допустим, есть у нас монетка. Только, в отличие от нашей же игровой кости, эта монетка сделана из неоднородного материала. Бросим мы ее на стол. С какой «вероятностью» она ляжет «решкой» кверху? с какой — «орлом»? Ну, это зависит от распределения материала внутри монетки. Не будем вдаваться в столь технические детали. Просто сочтем, что $p \in [0, 1]$ — это и есть вероятность решки. Соответственно, тогда вероятность орла — это $q = 1 - p$: на ребро наша монетка не становится.

Будем бросать монетку на стол и каждый раз фиксировать «выпавшую» сторону. Если выпала решка, напомним 1 и скажем, что произошел успех; если выпал орел, напомним 0 и скажем, что случилась неудача. Всего таких «испытаний» произведем n штук. Это и будет схемой испытаний Бернулли. На выходе образуется последовательность из нулей и единиц длины n . Эта последовательность, естественно, случайна. А какова вероятность, что это будет именно последовательность $(x_1, \dots, x_n)$ с конкретными $x_1, \dots, x_n$? Кажется весьма уместным сказать, что такая вероятность равна произведению вероятностей чисел $x_1, \dots, x_n$. Иными словами, если $\omega = (x_1, \dots, x_n)$, то

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} q^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Снова возникает вероятностное пространство. На сей раз элементарными событиями в нем служат как раз последовательности ω : недаром мы их так и обозначили. В результате Ω — пространство элементарных событий — состоит из всевозможных реализаций схемы испытаний Бернулли, каковых, очевидно, 2^n . Как и прежде, события — это всевозможные подмножества из Ω . Например, событие «в n испытаниях Бернулли произошло ровно k успехов» формируется из C_n^k элементарных кирпичиков — тех последовательностей нулей и единиц, в которых ровно k единиц. Множество событий $\mathcal{F}$ имеет мощность 2^{2^n} .

Понятно, что вероятность P — это и здесь функция, определенная на $\mathcal{F}$ и принимающая значения из $[0, 1]$. По аналогии с классической вероятностью, для данного $A \in \mathcal{F}$ она полагается равной сумме вероятностей элементарных событий, которые благоприятствуют A : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$. Например, вероятность события, описанного

в предыдущем абзаце, есть $C_n^k p^k q^{n-k}$. По понятным причинам ее называют *биномиальной вероятностью*.

Нетрудно видеть, что и в нынешнем пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ выполнены свойства 1 — 4 из предыдущего параграфа.

Приведем пример сравнительно нетривиального вычисления, связанного со схемой Бернулли и биномиальными вероятностями. Пусть дано множество $\mathfrak{X}_n = \{1, \dots, n\}$. Производя схему испытаний Бернулли, извлекаем из него элемент i , коль скоро в i -м испытании произошел успех; иначе переходим к следующему испытанию. В итоге получается случайное подмножество $U \subset \mathfrak{X}_n$ (состоящее из извлеченных элементов). Аналогично строим множества V и W . Спрашивается: какова вероятность того, что $U \cap V \subseteq W \subseteq U \cup V$? Обозначим через A такое событие.

Запишем друг под дружкой реализации схем Бернулли, «породившие» множества U, V, W :

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ (y_1, y_2, \dots, y_n), \\ (z_1, z_2, \dots, z_n).\end{aligned}$$

Если A произошло, то нетрудно видеть, что при любом i столбец с номером i в приведенной табличке не может состоять из элементов $x_i = 1, y_i = 1, z_i = 0$ и из элементов $x_i = 0, y_i = 0, z_i = 1$: в первом случае получилось бы, что i -й элемент множества $\mathfrak{R}_n$ принадлежит U и V , но не принадлежит W , что невозможно, поскольку ввиду A у нас $U \cap V \subseteq W$; во втором случае было бы противоречие с условием $W \subseteq U \cup V$. Все остальные тройки из нулей и единиц в столбцах встречаться могут.

Вероятность тройки 1, 1, 0 есть, очевидно, p^2q ; вероятность тройки 0, 0, 1 есть q^2p . Значит, вероятность того, что «запрещенная» тройка в данном столбце не возникла, есть, по свойствам вероятности, $1 - (p^2q + q^2p) = 1 - pq(p + q) = 1 - pq$. Окончательно получаем, что $P(A) = (1 - pq)^n$.

Правомерность возведения в степень в рамках последнего рассуждения так же интуитивно понятна, как и допустимость перемножения вероятностей в самом определении схемы Бернулли. Строгое обоснование подобным действиям будет дано чуть позднее — когда мы будем говорить о независимости событий.

1.3. Схема серий

Важной разновидностью схемы испытаний Бернулли служит так называемая *схема серий*. Рассмотрим произвольную (вообще говоря, бесконечную) последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$. Для каждого i осуществим n_i испытаний Бернулли, причем вероятность успеха будем считать зависящей от i . Иными словами, мы производим серии испытаний, и вероятность успеха в каждой очередной серии есть $p_i \in [0, 1]$ (меняем монетки от серии к серии). Для определения случайного графа такая схема нам будет очень нужна.

1.4. Общее конечное вероятностное пространство

Рассмотренные в предыдущих параграфах вероятностные конструкции ничего не стоит обобщить. А именно, пусть Ω — произвольное конечное множество. Назовем его *пространством элементарных*

событий. Пусть, далее, $\mathcal{F}$ — произвольная совокупность подмножеств из Ω , обладающая свойствами:

- 1) для любых $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cup B \in \mathcal{F}$;
- 2) для любых $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- 3) для любого $A \in \mathcal{F}$ выполнено $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- 4) $\Omega \in \mathcal{F}$.

Элементы совокупности $\mathcal{F}$ назовем *событиями*. Ясно, для чего нужны свойства? Разумеется, для того чтобы можно было корректно говорить об «одновременном» выполнении любых двух событий (пересекать их), о выполнении «хотя бы одного» из любых двух событий (объединять их) и о «невыполнении» любого события (брать отрицание). При этом, конечно, «хотя бы что-то должно произойти», т. е. Ω — событие, и бывает «невозможное» событие $\emptyset = \bar{\Omega}$. Впрочем, как правило, $\mathcal{F}$ — это совокупность всех подмножеств пространства элементарных событий, так что свойства заведомо выполнены.

Пусть, наконец, P — это функция из $\mathcal{F}$ в $[0, 1]$ со свойствами 1—4 из параграфа 1.1. Тогда назовем ее *вероятностью* или *вероятностной мерой*, а тройку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — *вероятностным пространством*.

Нетрудно понять, что если $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n$, то каково бы ни было $A \in \mathcal{F}$, выполнено $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$,

причем, разумеется, $p_1 + \dots + p_n = P(\Omega) = 1$. Имеем прямое обобщение прежних ситуаций.

1.5. Условные вероятности и независимость событий

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для простоты будем считать, что речь идет о классической модели. Представим себе, что некоторое событие $B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}$ уже произошло. Скажем, бросили мы игральную кость на стол и точно знаем, что она упала четной стороной вверх. Спрашивается: какова, при условии этого дополнительного знания, вероятность события $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_l}\} \in \mathcal{F}$? Посмотрим сперва на наш пример с игральной костью. Если событие A состоит в том, что число очков на кости равно 1, то при условии указанного выше события B такое просто невозможно, и вероятность A есть теперь не $\frac{1}{6}$, а 0. Если же, допустим, A — это событие, при котором число очков есть полный квадрат натурального числа, то, поскольку среди чисел от единицы до шести таким свойством обладают 1 и 4, обычная вероятность A есть $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; условную же вероятность разумно полагать равной отношению числа полных квадратов среди

чисел 2, 4, 6 (каковые только и могли реализоваться, коль скоро случилось событие B) к количеству всех этих чисел. Иными словами, на сей раз условная вероятность совпадает с безусловной и равна $\frac{1}{3}$.

В общем случае схема совершенно аналогичная. Мы просто забываем про те элементарные события, которые не могли произойти, раз уже случилось B . Соответственно, вероятность любого A мы считаем как $\frac{|A \cap B|}{|B|}$. В итоге, если именно такую вероятность назвать *условной* и обозначить ее $P(A|B)$, то

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Заметим, что если $P(B)=0$, то условная вероятность считается неопределенной.

В случае произвольного пространства мы сразу определяем условную вероятность равенством $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, происхождение которого теперь вполне понятно. Разумеется, мы по-прежнему работаем лишь в ситуации, когда $P(B) \neq 0$.

Для условных вероятностей имеются очевидные формулы. Так, тождество $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$, в некотором смысле справедливое даже при $P(B) = 0$, носит громкое название *теорема умножения*. Выполнена, далее, важная *формула полной вероятности*: если Ω разбито на непересекающиеся события $B_1, \dots, B_k$ (будем писать $\Omega = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$, подчеркивая, что элементы объединения не пересекаются), то

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_k)P(B_k).$$

Наконец, верна *формула Байеса*, действующая в тех же предположениях, что и формула полной вероятности: для любого $i \in \{1, \dots, k\}$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^k P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Многочисленные стандартные примеры «с урнами», иллюстрирующие применение формул полной вероятности и Байеса, можно найти в отличном задачнике [14].

Из понятия условной вероятности вытекает глубочайшее понятие *независимости событий* — центральное понятие теории вероятностей. Действительно, какие события A и B естественно считать независимыми? Разумеется, такие, что $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$. Из

теоремы умножения получаем более симметричную и универсальную запись $P(AB) = P(A)P(B)$, осмысленную и при $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$. Эта запись и служит определением независимости наших двух событий.

Вот он, тот момент, который проясняет суть действий, осуществленных нами в параграфе о схеме Бернулли. Возможность перемножения вероятностей, которую тогда мы считали интуитивно ясной, строго обосновывается через независимость: испытания Бернулли были именно независимыми, и ровно за счет этого вероятности перемножались.

Если даны события $A_1, \dots, A_n$, то они называются *независимыми в совокупности* или *взаимно независимыми*, если для любого $k \leq n$ и для любых $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ выполнено

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Легко привести пример совокупности попарно независимых, но взаимно зависимых событий. Советуем читателю сделать это самостоятельно.

1.6. Несколько слов о бесконечных вероятностных пространствах

В дальнейшем нам почти никогда не понадобятся бесконечные пространства. Скорее, мы будем работать с «неограниченно растущими» конечными структурами. Тем не менее, для полноты картины, а также для пущей формальной строгости некоторых деталей последующего изложения скажем буквально несколько слов о «совершенно общей» ситуации.

В действительности, отличий немного. Пространство — это снова тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Только множество Ω бесконечное. В связи с этим и $\mathcal{F}$ может содержать бесконечное множество элементов. Желая корректно говорить о выполнении хотя бы одного события из любого (разумного) их множества, а также об одновременном выполнении любого (разумного) ряда событий, добавим к свойствам 1—4 из параграфа 1.4 еще одно: объединение и пересечение *счетного* множества событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ лежит в $\mathcal{F}$. Поскольку операцию пересечения можно интерпретировать как умножение, а операцию объединения — как сложение, множество событий $\mathcal{F}$ называют *алгеброй* или, точнее, *сигма-алгеброй* (пишут « σ -алгебра»), подчеркивая с помощью частички «сигма» замкнутость алгебры относительно взятия бесконечных объединений и пересечений. На самом деле, вся эта теоретико-

множественная возня исключительно нетривиальна, и в нее можно очень долго углубляться. Мы не станем здесь этого делать.

Заметим, что добавление нового свойства в определение $\mathcal{F}$ приводит к необходимости аналогичного пополнения множества свойств 1—4 из параграфа 1.1. А именно, требуют, чтобы вероятность объединения счетного множества попарно непересекающихся событий равнялась сумме их вероятностей. Такое свойство называется *σ -аддитивностью*.

В целом описанное построение вероятностного пространства носит аксиоматический характер. Данную аксиоматику предложил великий советский математик Андрей Николаевич Колмогоров.

Приведем напоследок пример простейшего бесконечного пространства. Пусть $\Omega = [0, 1]^2$, $\mathcal{F}$ состоит из всех подмножеств квадрата Ω , площадь которых можно измерить¹, вероятность — это просто отношение площади данного события (множества) к площади всего квадрата.

В каком-то смысле мы имеем тут предельный аналог классического вероятностного пространства. Мы не можем теперь суммировать вероятности элементарных событий (у каждой точки вероятность 0); взамен этого мы «интегрируем» их и получаем площади. Кстати, важным отличием от классической ситуации служит и тот факт, что отныне «невероятные» и «невозможные» события суть разные вещи: площадь любого конечного множества нулевая, т. е. мы считаем, что, «тыкая» наугад бесконечно тонкой иглой в Ω , мы с вероятностью 0 попадем, например, в его центр. При этом говорить о невозможности попадания в центр нелепо: почему бы и нет?

Легко объяснить и «практическое» значение описанного вероятностного пространства. Рассмотрим простую, на первый взгляд, задачу. Два человека (назовем их Петя и Вася) договорились о встрече. Встречаются они на автобусной остановке между 9:00 и 10:00. Более точно они время не назначали. Идея такая: если один из двоих приходит на остановку и не видит второго, то ждет 15 минут. Коли не дожидается — уходит. Какова вероятность встречи?

Понятно, что времена прихода Пети и Васи на остановку мы считаем случайными и независимыми. Понятно также, что классическая модель нам не поможет: время течет непрерывно, и подразбить наше событие (встречу Пети и Васи) на конечное число элементарных

¹ Строгое понятие измеримости множества нетривиально и выходит за рамки этой книги. Если читатель знаком с ним, то он должен представлять себе измеримость по Жордану; если нет, то он может ограничиться интуитивным представлением о площади.

кирпичиков нам не удастся. Давайте, стало быть, интерпретировать точку $(x, y) \in [0, 1]^2$ как пару, в которой x — это время прихода на остановку Пети, а y — Васи. Встрече благоприятствуют те и только те точки, у которых $|x - y| \leq \frac{1}{4}$. Считаем площади и получаем вероятность $\frac{7}{16}$.

Между прочим, если бы мы все-таки сочли, что время «дискретно» (разбили бы, скажем, час на 3600 секунд), то мы смогли бы воспользоваться классической вероятностью и получить ответ, весьма близкий к правильному. Вообще, чем мельче мы будем дробить наш временной интервал, тем ближе обычная комбинаторная вероятность окажется к величине $\frac{7}{16}$. В этом и состоит смысл словосочетания «предельный аналог», который мы употребили выше в отношении нынешнего пространства.

1.7. Случайные величины и их распределения

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Если оно конечно и $\mathcal{F}$ — это множество всех подмножеств Ω , то любая функция $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайной величиной* на этом пространстве. Иначе надо потребовать, чтобы ξ была «измеримой», т. е. чтобы прообраз любого луча $(-\infty, x]$ принадлежал σ -алгебре:

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

(пишут еще короче $\{\xi \leq x\} \in \mathcal{F}$).

Вероятностное поведение случайной величины полностью характеризуется ее *функцией распределения*: $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$. Именно здесь видно, откуда появилось условие измеримости. Поскольку в основном нас будут интересовать конечные пространства, мы будем, как правило, иметь дело лишь с ситуациями, когда $\xi: \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$. Соответственно, функция распределения будет целиком задаваться вероятностями $p_i = P(\xi = y_i)$, $i = 1, \dots, k$; $p_1 + \dots + p_k = 1$. Случайные величины с подобными функциями называются *дискретными*.

В общем случае бывают весьма изощренные распределения, которые нам совсем не пригодятся. Однако еще один приятный класс распределений, возникающих исключительно на бесконечных пространствах, служит предельным аналогом дискретных распределений. Речь идет о так называемых *абсолютно непрерывных распределениях*. Вместо конечного набора вероятностей $p_1, \dots, p_k$, имеющих сумму 1, они порождаются *плотностью* — функцией $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, принимающей неотрицательные значения и обладающей тем свойством, что пло-