В. В. Прасолов

Многочлены

МЦНМО

УДК 512.62
ББК 22.144
П70

Прасолов В. В. Многочлены
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
335 с.
ISBN 978-5-4439-2638-4

В книге изложены основные результаты исследований по теории многочленов, как классические, так и современные. Большое внимание уделено 17-й проблеме Гильберта о представлении неотрицательных многочленов суммами квадратов рациональных функций и ее обобщениям. Теория Галуа обсуждается прежде всего с точки зрения теории многочленов, а не с точки зрения общей теории расширения полей.

Для студентов, аспирантов, научных работников — математиков и физиков.

Подготовлено на основе книги: *В. В. Прасолов*. Многочлены — М.: МЦНМО, 2014. — ISBN 978-5-4439-0233-3.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2638-4

Оглавление

Глава 1
Корни многочленов

1. Неравенства для корней

1.1. Основная теорема алгебры

В те давние времена, когда алгебра была скудна теоремами, следующее утверждение получило название *основной теоремы алгебры*: «*Многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней* (*с учетом их кратностей*)». Впервые это утверждение сформулировал Альбер де Жирар в 1629 г., но он даже не пытался его доказывать. Первым осознал необходимость доказательства основной теоремы алгебры Даламбер, но его доказательство (1746) не было признано убедительным. Свои доказательства предложили Эйлер (1749), Фонсене (1759) и Лагранж (1771), но и эти доказательства были небезупречны.

Первым удовлетворительное доказательство основной теоремы алгебры получил Гаусс, который привел три разных доказательства (1799, 1815 и 1816), а в 1845 г. опубликовал еще и уточненную версию своего первого доказательства.

Обзор различных доказательств основной теоремы алгебры можно найти в [ТУ]. Мы ограничимся одним доказательством. Оно использует следующую теорему Руше, которая имеет и самостоятельный интерес.

Теорема 1.1 (Руше). Пусть f и g — многочлены и γ — замкнутая несамопересекающаяся кривая на комплексной плоскости. Тогда если

$$\left|f(z)-g(z)\right| < \left|f(z)\right| + \left|g(z)\right| \tag{1}$$

при всех $z \in \gamma$, то внутри кривой γ расположено одинаковое количество корней многочленов f и g (с учетом их кратностей).

Доказательство. Рассмотрим на комплексной плоскости векторные поля $v(z) = f(z)$ и $w(z) = g(z)$. Из условия (1) следует, что ни в какой точке кривой γ векторы v и w не являются противоположно направленными.

Напомним, что *индексом* кривой γ относительно векторного поля v называют количество оборотов вектора $v(z)$ при полном обходе точки z вдоль кривой γ. (Для более подробного знакомства со свойствами индекса мы советуем обратиться к главе 6 книги [Пр1].) Рассмотрим векторное поле $v_t = tv+(1-t)w$. При этом $v_0 = w$ и $v_1 = v$. Ясно также, что в любой точке $z \in \gamma$ вектор $v_t(z)$ ненулевой. Это означает, что для кривой γ определен индекс $\mathrm{ind}(t)$ относительно векторного поля v_t. Целое число $\mathrm{ind}(t)$ непрерывно зависит от t, поэтому $\mathrm{ind}(t) = \mathrm{const}$. В частности, индексы кривой γ относительно векторных полей v и w совпадают.

Несложно показать, что индекс кривой γ относительно векторного поля v равен сумме индексов *особых* точек, в которых $v(z) = 0$. (Индекс особой точки z_0 определяется как индекс кривой $|z - z_0| = \varepsilon$, где ε достаточно мало.) Для векторного поля $v(z) = f(z)$ индекс особой точки z_0 равен кратности корня z_0 многочлена f. Таким образом, из совпадения индексов кривой γ относительно векторных полей $v(z) = f(z)$ и $w(z) = g(z)$ следует, что внутри кривой γ расположено одинаковое количество корней многочленов f и g. $\square$

С помощью теоремы Руше можно не только доказать основную теорему алгебры, но и получить оценку для модуля любого корня многочлена f.

Теорема 1.2. Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_i \in \mathbb{C}$. Тогда внутри круга $|z| = 1 + \max\limits_i |a_i|$ расположено ровно n корней многочлена f (с учетом их кратностей).

Доказательство. Пусть $a = \max\limits_i |a_i|$. Многочлен $g(z) = z^n$ имеет внутри рассматриваемого круга корень 0 кратности n. Поэтому достаточно проверить, что если $|z| = 1 + a$, то $\bigl|f(z) - g(z)\bigr| < \bigl|f(z)\bigr| + \bigl|g(z)\bigr|$. Мы даже докажем, что $\bigl|f(z) - g(z)\bigr| < \bigl|g(z)\bigr|$, т. е.

$$|a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n| < |z|^n.$$

Ясно, что если $|z| = 1 + a$, то

$$|a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n| \leqslant a\bigl(|z|^{n-1} + \ldots + 1\bigr) = a\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = |z|^n - 1 < |z|^n. \quad \square$$

1.2. Теорема Коши

Здесь мы обсудим теорему Коши о корнях многочленов, а также ее следствия и обобщения.

Теорема 1.3 (Коши). Пусть $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \ldots - b_n$, где все числа b_i неотрицательны, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Тогда многочлен f имеет единственный (некратный) положительный корень p, а модули всех остальных корней не превосходят p.

Доказательство. Положим

$$F(x) = -\frac{f(x)}{x^n} = \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} - 1.$$

Если $x \neq 0$, то уравнение $f(x) = 0$ эквивалентно уравнению $F(x) = 0$. При возрастании x от 0 до $+\infty$ функция $F(x)$ строго убывает от $+\infty$ до -1. Поэтому при $x > 0$ функция F обращается в нуль ровно в одной точке p. При этом

$$-\frac{f'(p)}{p^n} = F'(p) = -\frac{b_1}{p^2} - \ldots - \frac{nb_n}{p^{n+1}} < 0.$$

Следовательно, p — некратный корень многочлена f.

Остается доказать, что если x_0 — корень многочлена f, то $q = |x_0| \leqslant p$. Предположим, что $q > p$. Тогда из монотонности функции F следует, что $F(q) < 0$, т. е. $f(q) > 0$. С другой стороны, из равенства $x_0^n = b_1x_0^{n-1} + \ldots + b_n$ следует, что $q^n \leqslant b_1q^{n-1} + \ldots + b_n$, т. е. $f(q) \leqslant 0$. Приходим к противоречию. $\square$

Замечание. Теорема Коши непосредственно связана с теоремой Перрона–Фробениуса о неотрицательных матрицах (по этому поводу см. [Wi]).

У многочлена $x^{2n} - x^n - 1$ имеется n корней, модули которых равны модулю положительного корня этого многочлена. Поэтому в теореме Коши утверждение о том, что модули корней не превосходят p, вообще говоря, нельзя заменить на утверждение о том, что модули корней строго меньше p. Но, как показал Островский, в достаточно общей ситуации это можно сделать.

Теорема 1.4 (Островский). Пусть $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \ldots - b_n$, где все числа b_i неотрицательны, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Тогда если наибольший общий делитель номеров положительных коэффициентов b_i равен 1, то многочлен f имеет единственный положительный корень p, а модули всех остальных корней строго меньше p.

Доказательство. Пусть положительны только коэффициенты b_{k_1}, $b_{k_2}, \ldots, b_{k_m}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_m)$. Наибольший общий делитель чисел $k_1, \ldots, k_m$ равен 1, поэтому найдутся такие целые числа $s_1, \ldots, s_m$, что $s_1 k_1 + \ldots + s_m k_m = 1$. Снова рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} + \ldots + \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} - 1.$$

Уравнение $F(x) = 0$ имеет единственное положительное решение p. Пусть x — любой другой (ненулевой) корень многочлена f. Положим $q = |x|$. Тогда

$$1 = \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} + \ldots + \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \leqslant \left|\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}}\right| + \ldots + \left|\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}}\right| = \frac{b_{k_1}}{q^{k_1}} + \ldots + \frac{b_{k_m}}{q^{k_m}},$$

т. е. $F(q) \geqslant 0$. При этом равенство $F(q) = 0$ возможно лишь в том случае, когда

$$b_{k_i}/x^{k_i} = \left|b_{k_i}/x^{k_i}\right| > 0$$

при всех i. Но в таком случае

$$\frac{b_{k_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot b_{k_m}^{s_m}}{x} = \left(\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}}\right)^{s_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}}\right)^{s_m} > 0,$$

т. е. $x > 0$. Это противоречит тому, что $x \neq p$, а p — единственный положительный корень уравнения $F(x) = 0$. Таким образом, $F(q) > 0$. Поэтому из монотонности функции $F(x)$ при положительных x следует, что $q < p$. □

Из теоремы Коши–Островского можно вывести следующую оценку для модуля корней многочлена с положительными коэффициентами.

Теорема 1.5. а) (Энестрём–Какейа) Если все коэффициенты многочлена $g(x) = a_0 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$ положительны, то для любого корня ξ этого многочлена справедлива оценка

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{a_i/a_{i-1}\} = \delta \leqslant |\xi| \leqslant \gamma = \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{a_i/a_{i-1}\}.$$

б) (Островский) Пусть $a_k/a_{k-1} < \gamma$ при $k = k_1, \ldots, k_m$. Тогда если наибольший общий делитель чисел $n, k_1, \ldots, k_m$ равен 1, то $|\xi| < \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$(x-\gamma)g(x) = a_0x^n - (\gamma a_0 - a_1)x^{n-1} - \ldots - (\gamma a_{n-2} - a_{n-1})x - \gamma a_{n-1}.$$

По определению $\gamma \geqslant a_i/a_{i-1}$, т. е. $\gamma a_{i-1} - a_i \geqslant 0$. Поэтому по теореме Коши γ — единственный положительный корень многочлена $(x-\gamma)g(x)$, а модули всех остальных корней этого многочлена не превосходят γ.

Если ξ — корень многочлена g, то $\eta = \xi^{-1}$ — корень многочлена $a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0$. Поэтому

$$|\xi|^{-1} = |\eta| = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{a_{i-1}/a_i\} = \left(\min_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{a_i/a_{i-1}\}\right)^{-1},$$

т. е.

$$|\xi| \geqslant \delta = \min_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{a_i/a_{i-1}\}.$$

Когда выполнено условие б), корень γ многочлена $(x-\gamma)g(x)$ строго больше модулей всех остальных корней этого многочлена. □

Замечание. Теорема Энестрёма–Какейа тоже связана с теоремой Перрона–Фробениуса: см. [AnSV].

Существенное обобщение теоремы Энестрёма–Какейа получено в статье [GG]. При этом отброшено требование вещественности коэффициентов и ослаблено требование их монотонного возрастания. Но формулировка этой теоремы весьма громоздка, поэтому она здесь не приведена.

1.3. Теорема Лагерра

Пусть $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ — точки, которым приписаны единичные массы. Тогда точку $\zeta = (z_1 + \ldots + z_n)/n$ называют *центром масс* точек $z_1, \ldots, z_n$. Это понятие можно обобщить следующим образом. Сделаем дробно-линейное преобразование w, переводящее точку z_0 в ∞, т. е. $w(z) = \dfrac{a}{z-z_0} + b$. Найдем центр масс образов точек $z_1, \ldots, z_n$, а затем сделаем обратное преобразование w^{-1}. Несложные вычисления показывают, что результат не зависит от a и b, а именно, мы получаем точку

$$\zeta_{z_0} = z_0 + n\left(\frac{1}{z_1-z_0} + \ldots + \frac{1}{z_n-z_0}\right)^{-1} \qquad (1)$$

— *центр масс точек* $z_1, \ldots, z_n$ *относительно точки* z_0.

Центр масс точек $z_1, \ldots, z_n$ лежит внутри их выпуклой оболочки. Это утверждение легко переносится на случай центра масс относительно точки z_0. Нужно лишь прямые, соединяющие точки z_i и z_j, заменить окружностями, проходящими через точки z_i, z_j и z_0. Точка z_0, соответствующая точке ∞, лежит при этом вне выпуклой оболочки.

Теорема 1.6. Пусть $f(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$. Тогда центр масс корней многочлена f относительно произвольной точки z задается формулой

$$\zeta_z = z - nf(z)/f'(z).$$

Доказательство. Ясно, что $f'(z)/f(z) = (z-z_1)^{-1}+\ldots+(z-z_n)^{-1}$. Требуемое утверждение непосредственно следует из формулы (1). □

Теорема 1.7 (Лагерр). Пусть $f(z)$ — многочлен степени n и x — его некратный корень. Тогда центром масс всех остальных корней многочлена относительно точки x служит точка

$$X = x - 2(n-1)f'(x)/f''(x).$$

Доказательство. Пусть $f(z) = (z - x)F(z)$. Тогда $f'(z) = F(z) + (z - x)F'(z)$ и $f''(z) = 2F'(z) + (z - x)F''(z)$. Поэтому $f'(x) = F(x)$ и $f''(x) = 2F'(x)$. Применим предыдущую теорему к многочлену F степени $n - 1$ и к точке $z = x$. В результате получим требуемое. □

Теорема 1.8 (Лагерр). Пусть $f(z)$ — многочлен степени n и

$$X(z) = z - 2(n-1)f'(z)/f''(z).$$

Предположим, что окружность (или прямая) C проходит через некратный корень z_1 многочлена f, а все остальные корни многочлена f принадлежат одной из двух областей, на которые C делит плоскость. Тогда $X(z_1)$ принадлежит той же самой области.

Доказательство. В случае обычного центра масс окружности C соответствует прямая, по одну сторону от которой лежат все корни многочлена, кроме z_1. Их центр масс лежит по ту же самую сторону от этой прямой. □

Следствие. Пусть z_1 — один из некратных корней многочлена f с максимальным модулем. Тогда $\left|X(z_1)\right| \leqslant |z_1|$, т. е.

$$\left|z_1 - 2(n-1)f'(z_1)/f''(z_1)\right| \leqslant |z_1|.$$

Доказательство. Все корни f лежат в круге $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leqslant |z_1|\right\}$, поэтому точка $X(z_1)$ тоже лежит в этом круге. □

Теорема 1.9. Пусть f — многочлен с вещественными коэффициентами, а $\zeta_z = z - nf(z)/f'(z)$. Все корни многочлена f вещественны тогда и только тогда, когда при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta_z < 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что все корни многочлена f вещественны. Пусть $\operatorname{Im} z = a > 0$. Прямая, состоящая из точек с мнимой частью ε, где $0 < \varepsilon < a$, отделяет точку z от всех корней многочлена f (они лежат на вещественной оси). Поэтому $\operatorname{Im} \zeta_z \leqslant \varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ получаем $\operatorname{Im} \zeta_z \leqslant 0$. Легко проверить, что равенство $\operatorname{Im} \zeta_z = 0$ невозможно. В самом деле, пусть $\zeta_z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим окружность, проходящую через точку z и касающуюся вещественной оси в точке ζ_z. Слегка пошевелив эту окружность, можно построить окружность, по одну сторону от которой лежат точки z и ζ_z, а по другую — все корни многочлена f. В случае $\operatorname{Im} z = a < 0$ рассуждения аналогичны.

Предположим теперь, что $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta_z < 0$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Пусть z_1 — такой корень многочлена f, что $\operatorname{Im}(z_1) \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{z \to z_1} \zeta_z = z_1$, поэтому $\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} \zeta_{z_1} > 0$. □

Изложение теории Лагерра основано на статье [Gr]; см. также [ПС].

1.4. Аполярные многочлены

Пусть $f(z)$ — многочлен степени n, ζ — фиксированное число или ∞. Функцию

$$A_\zeta f(z) = \begin{cases} (\zeta - z)f'(z) + nf(z) & \text{при } \zeta \neq \infty; \\ f'(z) & \text{при } \zeta = \infty \end{cases}$$

называют *производной* многочлена $f(z)$ относительно точки ζ. Легко проверить, что если $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k z^k$, то $\dfrac{1}{n} f'(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{k+1} z^k$, а значит,

$$\frac{1}{n}A_\zeta f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(a_k + a_{k+1}\zeta)z^k. \tag{1}$$

Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k z^k$ — многочлен с корнями $z_1, \ldots, z_n$, а $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k z^k$ — многочлен с корнями $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Из формулы (1) следует, что

$$\frac{1}{n!}A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_n} f(z) = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \ldots + a_n\sigma_n,$$

где

$$\sigma_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n = -\binom{n}{1}\frac{b_{n-1}}{b_n},$$

$$\sigma_2 = \zeta_1\zeta_2 + \ldots + \zeta_{n-1}\zeta_n = \binom{n}{2}\frac{b_{n-2}}{b_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n = \zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_n = (-1)^n \frac{b_0}{b_n}.$$

Таким образом, равенство $A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_n} f(z) = 0$ эквивалентно равенству

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n b_0 = 0. \tag{2}$$

Многочлены f и g, коэффициенты которых связаны соотношением (2), называют *аполярными*.

Будем называть *круговой областью* внутреннюю или внешнюю часть круга или полуплоскости.

Теорема 1.10 (J. H. Grace, 1902). Пусть f и g — аполярные многочлены. Тогда если все корни многочлена f лежат в круговой области K, то по крайней мере один корень многочлена g тоже лежит в K.

Доказательство. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. Пусть все корни $z_1, \ldots, z_n$ многочлена $f(z)$ лежат внутри круговой области K, а точка ζ лежит вне K. Тогда все корни многочлена $A_\zeta f(z)$ лежат внутри K.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если w_i — корень многочлена $A_\zeta f(z)$, то ζ — центр масс корней многочлена $f(z)$ относительно точки w_i (определение центра масс относительно точки см. на с. 13). В самом деле, если $\zeta \neq \infty$, то равенство $A_\zeta f(w_i) = 0$ можно записать в виде

$$(\zeta - w_i)f'(w_i) + nf(w_i) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \zeta = w_i - nf(w_i)/f'(w_i).$$

Если же $\zeta = \infty$, то $f'(w_i) = A_\zeta f(w_i) = 0$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j - w_i} = \frac{f'(w_i)}{f(w_i)} = 0.$$

Следовательно, центр масс точек $z_1, \ldots, z_n$ относительно точки w_i находится в точке $w_i + \left(\sum \frac{1}{z_j - w_i}\right)^{-1} = \infty$.

Теперь уже ясно, что точка w_i не может лежать вне K. В самом деле, если бы точка w_i лежала вне K, то центр масс точек $z_1, \ldots, z_n$ относительно точки w_i лежал бы внутри K, а это противоречит тому, что точка ζ лежит вне K. □

С помощью леммы 1.1 утверждение теоремы доказывается следующим образом. Предположим, что все корни $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ многочлена g лежат вне K. Рассмотрим многочлен $A_{\zeta_2} \ldots A_{\zeta_n} f(z)$. Его степень равна 1, т. е. он имеет вид $c(z-k)$. Из леммы следует, что $k \in K$. Условие аполярности многочленов f и g означает, что $A_{\zeta_1}(z-k) = 0$. С другой стороны, непосредственное вычисление производной показывает, что $A_{\zeta_1}(z-k) = \zeta_1 - k$. Поэтому $k = \zeta_1 \notin K$. Приходим к противоречию. □

Для каждого многочлена f имеется целое семейство аполярных ему многочленов. Подобрав подходящим образом аполярный многочлен, с помощью теоремы Грэйса можно доказать, что у многочлена f есть корень в данной круговой области. Для тех же целей иногда бывает удобно воспользоваться и непосредственно леммой 1.1.

Пример 1. У многочлена

$$f(z) = 1 - z + cz^n, \quad \text{где} \quad c \in \mathbb{C},$$

есть корень в круге $|z - 1| \leqslant 1$.

Доказательство. Многочлены $f(z) = 1 + \binom{n}{1}\dfrac{-1}{n}z + cz^n$ и $g(z) = z^n + \binom{n}{1}b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0$ аполярны, если

$$1 - n\left(\frac{-1}{n}\right)b_{n-1} + cb_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad 1 + b_{n-1} + cb_0 = 0.$$

Пусть $\zeta_k = 1 - \exp(2\pi ik/n)$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $g(z) = \prod(z - \zeta_k) = z^n + \binom{n}{1}b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0$, где $b_{n-1} = -\dfrac{1}{n}\sum\zeta_k = -1$ и $b_0 = \pm\prod\zeta_k = 0$. Поэтому многочлены $f(z)$ и $g(z)$ аполярны. А так как все корни многочлена g лежат в круге $|z-1| \leqslant 1$, то по крайней мере один из корней многочлена f лежит в этом круге. □

Пример 2. У многочлена $1 - z + c_1z^{n_1} + \ldots + c_kz^{n_k}$, где $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, есть по крайней мере один корень в круге

$$|z| \leqslant \left(\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Начнем с многочлена $f(z) = 1 - z + c_1z^{n_1}$. Предположим, что все его корни лежат в области $|z| > \dfrac{n_1}{n_1 - 1}$. Тогда согласно лемме 1.1 корни многочлена $A_0f(z) = n_1 - (n_1 - 1)z$ тоже лежат в области $|z| > \dfrac{n_1}{n_1 - 1}$. Но корень многочлена $A_0f(z)$ равен $\dfrac{n_1}{n_1 - 1}$. Приходим к противоречию.

Для многочлена $f(z) = 1 - z + c_1z^{n_1} + \ldots + c_kz^{n_k}$ доказательство проведем индукцией по k. Рассмотрим многочлен

$$A_0f(z) = n_k - (n_k - 1)z + c_1(n_k - n_1)z^{n_1} + \ldots + c_{k-1}(n_k - n_{k-1})z^{n_{k-1}}.$$

Заменим в этом многочлене z на $\dfrac{n_k}{n_k - 1}w$. По предположению индукции корни полученного многочлена лежат в круге

$$|w| \leqslant \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{n_{k-1}}{n_{k-1} - 1},$$

поэтому корни многочлена $A_0f(z)$ лежат в круге

$$|z| \leqslant \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{n_k}{n_k - 1}.$$

Следовательно, предположение о том, что все корни многочлена $f(z)$ лежат вне этого круга, приводит к противоречию. $\square$

Пусть $f(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i z^i$ и $g(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b_i z^i$. Многочлен $h(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i b_i z^i$ называют *композицией* многочленов f и g.

Теорема 1.11 (Сегё). Пусть f и g — многочлены степени n, причем все корни многочлена f лежат в круговой области K. Тогда любой корень композиции h многочленов f и g имеет вид $-\zeta_i k$, где ζ_i — некоторый корень многочлена g, а $k \in K$.

Доказательство. Пусть γ — какой-то корень многочлена h, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i b_i \gamma^i = 0$. Тогда многочлены $f(z)$ и $G(z) = z^n g(-\gamma z^{-1})$ аполярны. Поэтому согласно теореме Грэйса один из корней многочлена $G(z)$ лежит в K. Пусть, например, $g(-\gamma k^{-1}) = 0$, где $k \in K$. Тогда $-\gamma k^{-1} = \zeta_i$, где ζ_i — корень многочлена g. $\square$

Для многочленов, степени которых не обязательно равны, имеется следующий аналог теоремы Грэйса.

Теорема 1.12 [Az]. Пусть $f(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i z^i$ и $g(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} b_i z^i$ — многочлены степени n и m, причем $m \leqslant n$. Предположим, что их коэффициенты связаны соотношением

$$\binom{m}{0} a_0 b_m - \binom{m}{1} a_1 b_{m-1} + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} a_m b_0 = 0. \qquad (3)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если все корни многочлена $g(z)$ лежат в круге $|z| \leqslant r$, то по крайней мере один корень многочлена $f(z)$ тоже лежит в этом круге;

б) если все корни многочлена $f(z)$ лежат вне круга $|z| \leqslant r$, то по крайней мере один корень многочлена $g(z)$ тоже лежит вне этого круга.

Доказательство [Ru]. а) Соотношение (3) инвариантно относительно замены z на rz в многочленах f и g, поэтому можно считать, что $r = 1$. Предположим, что все корни многочлена $f(z)$ лежат в области $|z| > 1$. Тогда все корни многочлена $z^n f(1/z)$ лежат в области $|z| < 1$.

Поэтому из теоремы Гаусса–Люка (теорема 2.1 на с. 22) следует, что все корни многочлена

$$f_1(z) = D^{(n-m)}\bigl(z^n f(1/z)\bigr) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)\sum_{i=0}^{m}\tbinom{m}{i}a_i z^{m-i}$$

лежат в области $|z| < 1$. Следовательно, все корни многочлена

$$f_2(z) = z^m\sum_{i=0}^{m}\tbinom{m}{i}a_i(1/z)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m}\tbinom{m}{i}a_i z^i$$

лежат в области $|z| > 1$.

Соотношение (3) означает, что многочлены f_2 и g аполярны. Все корни многочлена f_2 лежат в круговой области $|z| > 1$, поэтому согласно теореме Грэйса по крайней мере один корень многочлена g тоже лежит в этой области. Приходим к противоречию.

б) Все корни многочлена f_2 лежат в области $|z| \geqslant 1$, поэтому по крайней мере один корень многочлена g тоже лежит в этой области. $\square$

1.5. Проблема Рауса–Гурвица

Во многих задачах об устойчивости возникает потребность выяснить, все ли корни многочлена лежат в левой полуплоскости (т. е. вещественные части корней отрицательны). Такие многочлены называют *устойчивыми*. Проблема Рауса–Гурвица заключается в том, чтобы непосредственно по коэффициентам многочлена выяснить, устойчив он или нет. Известно много разных решений проблемы Рауса–Гурвица (см., например, [По2]). Мы ограничимся одним простым критерием, приведенным в [Str].

Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай многочлена с вещественными коэффициентами. В самом деле, если $p(z) = \sum a_n z^n$ — многочлен с комплексными коэффициентами, то можно рассмотреть многочлен

$$p^*(z) = p(z)\overline{p(\overline{z})} = \left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum \overline{a_n} z^n\right).$$

Ясно, что вещественные части корней у многочлена $\overline{p(\overline{z})}$ такие же, как и у многочлена $p(z)$. Кроме того, выражения коэффициентов многочлена $p^*(z)$ симметричны относительно a_n и $\overline{a_n}$. Это означает, что коэффициенты многочлена p^* переходят в себя при сопряжении, т. е. они вещественны.

Теорема 1.13. Пусть $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$, где $m = n(n-1)/2$, — многочлен, корнями которого служат все суммы пар корней многочлена p. Многочлен p устойчив тогда и только тогда, когда все коэффициенты многочленов p и q положительны.

Доказательство. Пусть многочлен p устойчив. Отрицательному корню α соответствует множитель $z - \alpha$ с положительными коэффициентами. Паре сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ с отрицательной вещественной частью соответствует множитель

$$(z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$$

с положительными коэффициентами. Таким образом, все коэффициенты многочлена p положительны.

Комплексные корни многочлена q распадаются на пары сопряженных корней, поэтому коэффициенты многочлена q вещественные. Кроме того, вещественные части всех корней многочлена q отрицательны. Те же самые рассуждения, что и для многочлена p, показывают, что все коэффициенты многочлена q положительны.

Пусть теперь все коэффициенты многочленов p и q положительны. В таком случае все вещественные корни многочленов p и q отрицательны. Поэтому если α — вещественный корень многочлена p, то $\alpha < 0$, а если $\alpha \pm i\beta$ — пара комплексных сопряженных корней многочлена p, то $2\alpha = (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)$ — корень многочлена q, а значит, $2\alpha < 0$. □

2. Корни многочлена и его производной

2.1. Теорема Гаусса–Люка

В 1836 г. Гаусс показал, что все корни производной многочлена P, отличные от кратных корней самого многочлена P, являются положениями равновесия для поля сил, которое создается одинаковыми частицами, расположенными в корнях многочлена P (в корне кратности r расположено r частиц); каждая частица создает силу притяжения, обратно пропорциональную расстоянию до этой частицы. Из этой теоремы Гаусса легко вывести приводимую ниже теорему 2.1, но сам Гаусс об этом не упоминает. Первым сформулировал и доказал теорему 2.1 французский инженер Люка (F. Lucas) в 1874 г. Поэтому теорему 2.1 часто называют *теоремой Гаусса–Люка*.