

В. В. Прасолов

Многочлены

МЦНМО

УДК 512.62

ББК 22.144

П70

Прасолов В. В. Многочлены

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2017

335 с.

ISBN 978-5-4439-2638-4

В книге изложены основные результаты исследований по теории многочленов, как классические, так и современные. Большое внимание уделено 17-й проблеме Гильберта о представлении неотрицательных многочленов суммами квадратов рациональных функций и ее обобщениям. Теория Галуа обсуждается прежде всего с точки зрения теории многочленов, а не с точки зрения общей теории расширения полей.

Для студентов, аспирантов, научных работников — математиков и физиков.

Подготовлено на основе книги: *В. В. Прасолов. Многочлены* — М.: МЦНМО, 2014. — ISBN 978-5-4439-0233-3.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-2638-4

○ Прасолов В. В., 2017.

○ МЦНМО, 2017.

Оглавление

Предисловие к первому изданию	8
Глава 1. Корни многочленов	9
1. Неравенства для корней	9
1.1. Основная теорема алгебры	9
1.2. Теорема Коши	10
1.3. Теорема Лагерра	13
1.4. Аполярные многочлены	15
1.5. Проблема Рауса–Гурвица	20
2. Корни многочлена и его производной	21
2.1. Теорема Гаусса–Люка	21
2.2. Корни производной и фокусы эллипса	23
2.3. Локализация корней производной	25
2.4. Гипотеза Сендова–Илиева	28
2.5. Многочлены, у которых совпадают корни их самих и их производных	30
3. Результант и дискриминант	30
3.1. Результант	30
3.2. Дискриминант	34
3.3. Вычисление некоторых результатантов и дискриминантов	35
4. Разделение корней	38
4.1. Теорема Фурье–Бюдана	38
4.2. Теорема Штурма	42
4.3. Теорема Сильвестра	43
4.4. Разделение комплексных корней	47
5. Ряд Лагранжа и оценки корней многочлена	49
5.1. Ряд Лагранжа–Бюрмана	49
5.2. Ряд Лагранжа и оценки корней	52
Глава 2. Неприводимые многочлены	58
6. Основные свойства неприводимых многочленов	58
6.1. Разложение многочленов на неприводимые множители .	58
6.2. Признак Эйзенштейна	61
6.3. Неприводимость по модулю p	63
7. Признаки неприводимости	64
7.1. Признак Дюма	64
7.2. Многочлены с доминирующим коэффициентом	68
7.3. Неприводимость многочленов, принимающих малые значения	71

8. Неприводимость трехчленов и четырехчленов	72
8.1. Неприводимость многочленов $x^n \pm x^m \pm x^p \pm 1$	72
8.2. Неприводимость некоторых триномов	77
9. Теорема неприводимости Гильберта	78
10. Алгоритмы разложения на неприводимые множители	82
10.1. Алгоритм Берлекэмпса	82
10.2. Факторизация с помощью леммы Гензеля	85
Глава 3. Многочлены специального вида	91
11. Симметрические многочлены	91
11.1. Примеры симметрических многочленов	91
11.2. Основная теорема о симметрических многочленах	93
11.3. Неравенства Мюрхеда	95
11.4. Функции Шура	98
12. Целозначные многочлены	99
12.1. Базис целозначных многочленов	99
12.2. Целозначные многочлены от многих переменных	102
12.3. q -аналог целозначных полиномов	103
13. Круговые многочлены	104
13.1. Основные свойства круговых многочленов	104
13.2. Формула обращения Мёбиуса	105
13.3. Неприводимость круговых многочленов	107
13.4. Выражение Φ_{mn} через Φ_n	108
13.5. Дискриминант кругового многочлена	109
13.6. Результант пары круговых многочленов	110
13.7. Коэффициенты круговых многочленов	112
13.8. Теорема Веддерберна	113
13.9. Многочлены, неприводимые по модулю p	114
14. Многочлены Чебышева	116
14.1. Определение и основные свойства	116
14.2. Ортогональные многочлены	121
14.3. Неравенства для многочленов Чебышева	124
14.4. Производящая функция	126
15. Многочлены Бернулли	129
15.1. Определения многочленов Бернулли	129
15.2. Теоремы дополнения, сложения аргументов и умножения	132
15.3. Формула Эйлера	134
15.4. Теорема Фаульгера–Якоби	135
15.5. Арифметические свойства чисел и многочленов Бернулли	137

Глава 4. Некоторые свойства многочленов	151
16. Многочлены с предписанными значениями	151
16.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа	151
16.2. Интерполяционный многочлен Эрмита	154
16.3. Многочлен с предписанными значениями в нулях производной	155
17. Высота многочлена и другие нормы	158
17.1. Лемма Гаусса	158
17.2. Многочлены от одной переменной	160
17.3. Максимум модуля и неравенство Бернштейна	164
17.4. Многочлены от многих переменных	167
17.5. Неравенство для пары взаимно простых многочленов . .	170
17.6. Неравенство Миньотта	171
18. Уравнения для многочленов	174
18.1. Диофантовы уравнения для многочленов	174
18.2. Функциональные уравнения для многочленов	181
19. Преобразования многочленов	187
19.1. Преобразование Чирнгауза	187
19.2. Уравнение пятой степени в форме Бринга	189
19.3. Представление многочленов в виде сумм степеней линейных функций	190
20. Алгебраические числа	194
20.1. Определение и основные свойства	194
20.2. Теорема Кронекера	196
20.3. Теорема Лиувилля	199
Глава 5. Теория Галуа	203
21. Теорема Лагранжа и резольвента Галуа	203
21.1. Теорема Лагранжа	203
21.2. Резольвента Галуа	207
21.3. Теорема о примитивном элементе	212
22. Основы теории Галуа	214
22.1. Соответствие Галуа	214
22.2. Многочлен с группой Галуа S_5	219
22.3. Простые радикальные расширения	220
22.4. Циклические расширения	221
23. Решение уравнений в радикалах	223
23.1. Разрешимые группы	223

23.2. Уравнения с разрешимой группой Галуа	225
23.3. Уравнения, разрешимые в радикалах	226
23.4. Абелевы уравнения	229
23.5. Критерий Абеля–Галуа разрешимости уравнения простой степени	233
24. Вычисление групп Галуа	239
24.1. Дискриминант и группа Галуа	239
24.2. Резольвентные многочлены	239
24.3. Группа Галуа по модулю p	243
Глава 6. Идеалы в кольцах многочленов	246
25. Теоремы Гильберта о базисе и о нулях	246
25.1. Теорема Гильберта о базисе	246
25.2. Теорема Гильберта о нулях	248
25.3. Многочлен Гильберта	252
25.4. Однородная теорема Гильберта о нулях для p -полей	260
26. Базисы Грёбнера	263
26.1. Многочлены от одной переменной	263
26.2. Деление многочленов от многих переменных	264
26.3. Определения базисов Грёбнера	265
26.4. Алгоритм Бухбергера	268
26.5. Приведенный базис Грёбнера	270
Глава 7. Семнадцатая проблема Гильберта	272
27. Суммы квадратов: введение	272
27.1. Некоторые примеры	272
27.2. Теорема Артина–Касселса–Пфистера	277
27.3. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим	281
27.4. Теорема Гильберта о неотрицательных многочленах $p_4(x, y)$	283
28. Теория Артина	289
28.1. Вещественные поля	290
28.2. Теорема Сильвестра для вещественно замкнутых полей	295
28.3. Семнадцатая проблема Гильберта	298
29. Теория Пфистера	303
29.1. Мультипликативные квадратичные формы	303
29.2. C_i -поля	306

29.3. Теорема Пфистера о суммах квадратов рациональных функций	308
--	-----

Дополнение	313
-------------------	------------

30. Алгоритм Ленстры–Ленстры–Ловаса	313
--	------------

30.1. Общее описание алгоритма	313
--	-----

30.2. Приведенный базис решетки	314
---	-----

30.3. Решетки и факторизация многочленов	317
--	-----

Литература	324
-------------------	------------

Предметный указатель	331
-----------------------------	------------

Глава 1

Корни многочленов

1. Неравенства для корней

1.1. Основная теорема алгебры

В те давние времена, когда алгебра была скудна теоремами, следующее утверждение получило название *основной теоремы алгебры*: «Многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней (с учетом их кратностей)». Впервые это утверждение сформулировал Альбер де Жирар в 1629 г., но он даже не пытался его доказывать. Первым осознал необходимость доказательства основной теоремы алгебры Даламбер, но его доказательство (1746) не было признано убедительным. Свои доказательства предложили Эйлер (1749), Фонсене (1759) и Лагранж (1771), но и эти доказательства были безупречны.

Первым удовлетворительное доказательство основной теоремы алгебры получил Гаусс, который привел три разных доказательства (1799, 1815 и 1816), а в 1845 г. опубликовал еще и уточненную версию своего первого доказательства.

Обзор различных доказательств основной теоремы алгебры можно найти в [ТУ]. Мы ограничимся одним доказательством. Оно использует следующую теорему Руше, которая имеет и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 1.1 (Руше). Пусть f и g — многочлены и γ — замкнутая несамопересекающаяся кривая на комплексной плоскости. Тогда если

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad (1)$$

при всех $z \in \gamma$, то внутри кривой γ расположено одинаковое количество корней многочленов f и g (с учетом их кратностей).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на комплексной плоскости векторные поля $v(z) = f(z)$ и $w(z) = g(z)$. Из условия (1) следует, что ни в какой точке кривой γ векторы v и w не являются противоположно направленными.

Напомним, что *индексом* кривой γ относительно векторного поля v называют количество оборотов вектора $v(z)$ при полном обходе точки z вдоль кривой γ . (Для более подробного знакомства со свойствами индекса мы советуем обратиться к главе 6 книги [Пр1].) Рассмотрим векторное поле $v_t = tv + (1-t)w$. При этом $v_0 = w$ и $v_1 = v$. Ясно также, что

в любой точке $z \in \gamma$ вектор $v_t(z)$ ненулевой. Это означает, что для кривой γ определен индекс $\text{ind}(t)$ относительно векторного поля v_t . Целое число $\text{ind}(t)$ непрерывно зависит от t , поэтому $\text{ind}(t) = \text{const}$. В частности, индексы кривой γ относительно векторных полей v и w совпадают.

Несложно показать, что индекс кривой γ относительно векторного поля v равен сумме индексов *особых* точек, в которых $v(z) = 0$. (Индекс особой точки z_0 определяется как индекс кривой $|z - z_0| = \varepsilon$, где ε достаточно мало.) Для векторного поля $v(z) = f(z)$ индекс особой точки z_0 равен кратности корня z_0 многочлена f . Таким образом, из совпадения индексов кривой γ относительно векторных полей $v(z) = f(z)$ и $w(z) = g(z)$ следует, что внутри кривой γ расположено одинаковое количество корней многочленов f и g . $\square$

С помощью теоремы Руше можно не только доказать основную теорему алгебры, но и получить оценку для модуля любого корня многочлена f .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_i \in \mathbb{C}$. Тогда внутри круга $|z| = 1 + \max_i |a_i|$ расположено ровно n корней многочлена f (с учетом их кратностей).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \max_i |a_i|$. Многочлен $g(z) = z^n$ имеет внутри рассматриваемого круга корень 0 кратности n . Поэтому достаточно проверить, что если $|z| = 1 + a$, то $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$. Мы даже докажем, что $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$, т. е.

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| < |z|^n.$$

Ясно, что если $|z| = 1 + a$, то

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq a(|z|^{n-1} + \dots + 1) = a \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = |z|^n - 1 < |z|^n. \quad \square$$

1.2. Теорема Коши

Здесь мы обсудим теорему Коши о корнях многочленов, а также ее следствия и обобщения.

ТЕОРЕМА 1.3 (Коши). Пусть $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \dots - b_n$, где все числа b_i неотрицательны, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Тогда многочлен f имеет единственный (некратный) положительный корень p , а модули всех остальных корней не превосходят p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F(x) = -\frac{f(x)}{x^n} = \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} - 1.$$

Если $x \neq 0$, то уравнение $f(x) = 0$ эквивалентно уравнению $F(x) = 0$. При возрастании x от 0 до $+\infty$ функция $F(x)$ строго убывает от $+\infty$ до -1 . Поэтому при $x > 0$ функция F обращается в нуль ровно в одной точке p . При этом

$$-\frac{f'(p)}{p^n} = F'(p) = -\frac{b_1}{p^2} - \dots - \frac{nb_n}{p^{n+1}} < 0.$$

Следовательно, p — некратный корень многочлена f .

Остается доказать, что если x_0 — корень многочлена f , то $q = |x_0| \leq p$. Предположим, что $q > p$. Тогда из монотонности функции F следует, что $F(q) < 0$, т. е. $f(q) > 0$. С другой стороны, из равенства $x_0^n = b_1x_0^{n-1} + \dots + b_n$ следует, что $q^n \leq b_1q^{n-1} + \dots + b_n$, т. е. $f(q) \leq 0$. Приходим к противоречию. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Коши непосредственно связана с теоремой Перрона–Фробениуса о неотрицательных матрицах (по этому поводу см. [Wi]).

У многочлена $x^{2n} - x^n - 1$ имеется n корней, модули которых равны модулю положительного корня этого многочлена. Поэтому в теореме Коши утверждение о том, что модули корней не превосходят p , вообще говоря, нельзя заменить на утверждение о том, что модули корней строго меньше p . Но, как показал Островский, в достаточно общей ситуации это можно сделать.

ТЕОРЕМА 1.4 (Островский). Пусть $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \dots - b_n$, где все числа b_i неотрицательны, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Тогда если наибольший общий делитель номеров положительных коэффициентов b_i равен 1, то многочлен f имеет единственный положительный корень p , а модули всех остальных корней строго меньше p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть положительны только коэффициенты $b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_m}$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_m$). Наибольший общий делитель чисел $k_1, \dots, k_m$ равен 1, поэтому найдутся такие целые числа $s_1, \dots, s_m$, что $s_1 k_1 + \dots + s_m k_m = 1$. Снова рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} + \dots + \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} - 1.$$

Уравнение $F(x) = 0$ имеет единственное положительное решение p . Пусть x — любой другой (ненулевой) корень многочлена f . Положим $q = |x|$. Тогда

$$1 = \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} + \dots + \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \leq \left| \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} \right| + \dots + \left| \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \right| = \frac{b_{k_1}}{q^{k_1}} + \dots + \frac{b_{k_m}}{q^{k_m}},$$

т. е. $F(q) \geq 0$. При этом равенство $F(q) = 0$ возможно лишь в том случае, когда

$$b_{k_i}/x^{k_i} = |b_{k_i}/x^{k_i}| > 0$$

при всех i . Но в таком случае

$$\frac{b_{k_1}^{s_1} \dots b_{k_m}^{s_m}}{x} = \left(\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \right)^{s_m} > 0,$$

т. е. $x > 0$. Это противоречит тому, что $x \neq p$, а p — единственный положительный корень уравнения $F(x) = 0$. Таким образом, $F(q) > 0$. Поэтому из монотонности функции $F(x)$ при положительных x следует, что $q < p$. $\square$

Из теоремы Коши–Островского можно вывести следующую оценку для модуля корней многочлена с положительными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1.5. а) (Энестрём–Какейя) Если все коэффициенты многочлена $g(x) = a_0 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$ положительны, то для любого корня ξ этого многочлена справедлива оценка

$$\min_{1 \leq i \leq n-1} \{a_i/a_{i-1}\} = \delta \leq |\xi| \leq \gamma = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{a_i/a_{i-1}\}.$$

б) (Островский) Пусть $a_k/a_{k-1} < \gamma$ при $k = k_1, \dots, k_m$. Тогда если наибольший общий делитель чисел $n, k_1, \dots, k_m$ равен 1, то $|\xi| < \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен

$$(x - \gamma)g(x) = a_0x^n - (\gamma a_0 - a_1)x^{n-1} - \dots - (\gamma a_{n-2} - a_{n-1})x - \gamma a_{n-1}.$$

По определению $\gamma \geq a_i/a_{i-1}$, т. е. $\gamma a_{i-1} - a_i \geq 0$. Поэтому по теореме Коши γ — единственный положительный корень многочлена $(x - \gamma)g(x)$, а модули всех остальных корней этого многочлена не превосходят γ .

Если ξ — корень многочлена g , то $\eta = \xi^{-1}$ — корень многочлена $a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0$. Поэтому

$$|\xi|^{-1} = |\eta| = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{a_{i-1}/a_i\} = \left(\min_{1 \leq i \leq n-1} \{a_i/a_{i-1}\} \right)^{-1},$$

т. е.

$$|\xi| \geq \delta = \min_{1 \leq i \leq n-1} \{a_i/a_{i-1}\}.$$

Когда выполнено условие б), корень γ многочлена $(x - \gamma)g(x)$ строго больше модулей всех остальных корней этого многочлена. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Энестрёма–Какейя тоже связана с теоремой Перрона–Фробениуса: см. [AnSV].

Существенное обобщение теоремы Энестрёма–Какейя получено в статье [GG]. При этом отброшено требование вещественности коэффициентов и ослаблено требование их монотонного возрастания. Но формулировка этой теоремы весьма громоздка, поэтому она здесь не приведена.

1.3. Теорема Лагерра

Пусть $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ — точки, которым приписаны единичные массы. Тогда точку $\zeta = (z_1 + \dots + z_n)/n$ называют *центром масс* точек $z_1, \dots, z_n$. Это понятие можно обобщить следующим образом. Сделаем дробно-линейное преобразование w , переводящее точку z_0 в ∞ , т. е. $w(z) = \frac{a}{z - z_0} + b$. Найдем центр масс образов точек $z_1, \dots, z_n$, а затем сделаем обратное преобразование w^{-1} . Несложные вычисления показывают, что результат не зависит от a и b , а именно, мы получаем точку

$$\zeta_{z_0} = z_0 + n \left(\frac{1}{z_1 - z_0} + \dots + \frac{1}{z_n - z_0} \right)^{-1} \quad (1)$$

— центр масс точек $z_1, \dots, z_n$ относительно точки z_0 .

Центр масс точек $z_1, \dots, z_n$ лежит внутри их выпуклой оболочки. Это утверждение легко переносится на случай центра масс относительно точки z_0 . Нужно лишь прямые, соединяющие точки z_i и z_j , заменить окружностями, проходящими через точки z_i , z_j и z_0 . Точка z_0 , соответствующая точке ∞ , лежит при этом вне выпуклой оболочки.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $f(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$. Тогда центр масс корней многочлена f относительно произвольной точки z задается формулой

$$\zeta_z = z - nf(z)/f'(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $f'(z)/f(z) = (z - z_1)^{-1} + \dots + (z - z_n)^{-1}$. Требуемое утверждение непосредственно следует из формулы (1). $\square$

ТЕОРЕМА 1.7 (Лагерр). Пусть $f(z)$ — многочлен степени n и x — его некрatный корень. Тогда центром масс всех остальных корней многочлена относительно точки x служит точка

$$X = x - 2(n - 1)f'(x)/f''(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(z) = (z - x)F(z)$. Тогда $f'(z) = F(z) + (z - x)F'(z)$ и $f''(z) = 2F'(z) + (z - x)F''(z)$. Поэтому $f'(x) = F(x)$ и $f''(x) = 2F'(x)$. Применим предыдущую теорему к многочлену F степени $n - 1$ и к точке $z = x$. В результате получим требуемое. $\square$

ТЕОРЕМА 1.8 (Лагерр). Пусть $f(z)$ — многочлен степени n и

$$X(z) = z - 2(n - 1)f'(z)/f''(z).$$

Предположим, что окружность (или прямая) C проходит через некрatный корень z_1 многочлена f , а все остальные корни многочлена f принадлежат одной из двух областей, на которые C делит плоскость. Тогда $X(z_1)$ принадлежит той же самой области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае обычного центра масс окружности C соответствует прямая, по одну сторону от которой лежат все корни многочлена, кроме z_1 . Их центр масс лежит по ту же самую сторону от этой прямой. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть z_1 — один из некратных корней многочлена f с максимальным модулем. Тогда $|X(z_1)| \leq |z_1|$, т. е.

$$|z_1 - 2(n-1)f'(z_1)/f''(z_1)| \leq |z_1|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все корни f лежат в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z_1|\}$, поэтому точка $X(z_1)$ тоже лежит в этом круге. $\square$

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть f — многочлен с вещественными коэффициентами, а $\zeta_z = z - nf(z)/f'(z)$. Все корни многочлена f вещественны тогда и только тогда, когда при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta_z < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что все корни многочлена f вещественны. Пусть $\operatorname{Im} z = a > 0$. Прямая, состоящая из точек с мнимой частью ε , где $0 < \varepsilon < a$, отделяет точку z от всех корней многочлена f (они лежат на вещественной оси). Поэтому $\operatorname{Im} \zeta_z \leq \varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем $\operatorname{Im} \zeta_z \leq 0$. Легко проверить, что равенство $\operatorname{Im} \zeta_z = 0$ невозможно. В самом деле, пусть $\zeta_z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим окружность, проходящую через точку z и касающуюся вещественной оси в точке ζ_z . Слегка пошевелив эту окружность, можно построить окружность, по одну сторону от которой лежат точки z и ζ_z , а по другую — все корни многочлена f . В случае $\operatorname{Im} z = a < 0$ рассуждения аналогичны.

Предположим теперь, что $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta_z < 0$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Пусть z_1 — такой корень многочлена f , что $\operatorname{Im}(z_1) \neq 0$. Тогда $\lim_{z \rightarrow z_1} \zeta_z = z_1$, поэтому $\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} \zeta_{z_1} > 0$. $\square$

Изложение теории Лагерра основано на статье [Gr]; см. также [PS].

1.4. Аполярные многочлены

Пусть $f(z)$ — многочлен степени n , ζ — фиксированное число или ∞ . Функцию

$$A_\zeta f(z) = \begin{cases} (\zeta - z)f'(z) + nf(z) & \text{при } \zeta \neq \infty; \\ f'(z) & \text{при } \zeta = \infty \end{cases}$$

называют *производной* многочлена $f(z)$ относительно точки ζ . Легко

проверить, что если $f(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k z^k$, то $\frac{1}{n} f'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{k+1} z^k$,

а значит,

$$\frac{1}{n} A_{\zeta} f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_k + a_{k+1} \zeta) z^k. \quad (1)$$

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k z^k$ — многочлен с корнями $z_1, \dots, z_n$, а $g(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k z^k$ — многочлен с корнями $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Из формулы (1) следует, что

$$\frac{1}{n!} A_{\zeta_1} A_{\zeta_2} \dots A_{\zeta_n} f(z) = a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + \dots + a_n \sigma_n,$$

где

$$\sigma_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n = -\binom{n}{1} \frac{b_{n-1}}{b_n},$$

$$\sigma_2 = \zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-1} \zeta_n = \binom{n}{2} \frac{b_{n-2}}{b_n},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_n = \zeta_1 \dots \zeta_n = (-1)^n \frac{b_0}{b_n}.$$

Таким образом, равенство $A_{\zeta_1} A_{\zeta_2} \dots A_{\zeta_n} f(z) = 0$ эквивалентно равенству

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + (-1)^n a_n b_0 = 0. \quad (2)$$

Многочлены f и g , коэффициенты которых связаны соотношением (2), называют *аполярными*.

Будем называть *круговой областью* внутреннюю или внешнюю часть круга или полуплоскости.

ТЕОРЕМА 1.10 (Ж. Н. Грассе, 1902). Пусть f и g — аполярные многочлены. Тогда если все корни многочлена f лежат в круговой области K , то по крайней мере один корень многочлена g тоже лежит в K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1.1. Пусть все корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена $f(z)$ лежат внутри круговой области K , а точка ζ лежит вне K . Тогда все корни многочлена $A_{\zeta} f(z)$ лежат внутри K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если w_i — корень многочлена $A_\zeta f(z)$, то ζ — центр масс корней многочлена $f(z)$ относительно точки w_i (определение центра масс относительно точки см. на с. 13). В самом деле, если $\zeta \neq \infty$, то равенство $A_\zeta f(w_i) = 0$ можно записать в виде

$$(\zeta - w_i)f'(w_i) + nf(w_i) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \zeta = w_i - nf(w_i)/f'(w_i).$$

Если же $\zeta = \infty$, то $f'(w_i) = A_\zeta f(w_i) = 0$, поэтому

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j - w_i} = \frac{f'(w_i)}{f(w_i)} = 0.$$

Следовательно, центр масс точек $z_1, \dots, z_n$ относительно точки w_i находится в точке $w_i + \left(\sum \frac{1}{z_j - w_i}\right)^{-1} = \infty$.

Теперь уже ясно, что точка w_i не может лежать вне K . В самом деле, если бы точка w_i лежала вне K , то центр масс точек $z_1, \dots, z_n$ относительно точки w_i лежал бы внутри K , а это противоречит тому, что точка ζ лежит вне K . $\square$

С помощью леммы 1.1 утверждение теоремы доказывается следующим образом. Предположим, что все корни $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ многочлена g лежат вне K . Рассмотрим многочлен $A_{\zeta_2} \dots A_{\zeta_n} f(z)$. Его степень равна 1, т. е. он имеет вид $c(z - k)$. Из леммы следует, что $k \in K$. Условие аполярности многочленов f и g означает, что $A_{\zeta_1}(z - k) = 0$. С другой стороны, непосредственное вычисление производной показывает, что $A_{\zeta_1}(z - k) = \zeta_1 - k$. Поэтому $k = \zeta_1 \notin K$. Приходим к противоречию. $\square$

Для каждого многочлена f имеется целое семейство аполярных ему многочленов. Подбрав подходящим образом аполярный многочлен, с помощью теоремы Грэйса можно доказать, что у многочлена f есть корень в данной круговой области. Для тех же целей иногда бывает удобно воспользоваться и непосредственно леммой 1.1.

ПРИМЕР 1. У многочлена

$$f(z) = 1 - z + cz^n, \quad \text{где} \quad c \in \mathbb{C},$$

есть корень в круге $|z - 1| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлены $f(z) = 1 + \binom{n}{1}\frac{-1}{n}z + cz^n$ и $g(z) = z^n + \binom{n}{1}b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0$ аполярны, если

$$1 - n \left(\frac{-1}{n} \right) b_{n-1} + cb_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad 1 + b_{n-1} + cb_0 = 0.$$

Пусть $\zeta_k = 1 - \exp(2\pi i k/n)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $g(z) = \prod (z - \zeta_k) = z^n + \binom{n}{1}b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0$, где $b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum \zeta_k = -1$ и $b_0 = \pm \prod \zeta_k = 0$. Поэтому многочлены $f(z)$ и $g(z)$ аполярны. А так как все корни многочлена g лежат в круге $|z - 1| \leq 1$, то по крайней мере один из корней многочлена f лежит в этом круге. $\square$

ПРИМЕР 2. У многочлена $1 - z + c_1 z^{n_1} + \dots + c_k z^{n_k}$, где $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_k$, есть по крайней мере один корень в круге

$$|z| \leq \left(\left(1 - \frac{1}{n_1} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n_k} \right) \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с многочлена $f(z) = 1 - z + c_1 z^{n_1}$. Предположим, что все его корни лежат в области $|z| > \frac{n_1}{n_1 - 1}$. Тогда согласно лемме 1.1 корни многочлена $A_0 f(z) = n_1 - (n_1 - 1)z$ тоже лежат в области $|z| > \frac{n_1}{n_1 - 1}$. Но корень многочлена $A_0 f(z)$ равен $\frac{n_1}{n_1 - 1}$. Приходим к противоречию.

Для многочлена $f(z) = 1 - z + c_1 z^{n_1} + \dots + c_k z^{n_k}$ доказательство проведем индукцией по k . Рассмотрим многочлен

$$A_0 f(z) = n_k - (n_k - 1)z + c_1(n_k - n_1)z^{n_1} + \dots + c_{k-1}(n_k - n_{k-1})z^{n_{k-1}}.$$

Заменим в этом многочлене z на $\frac{n_k}{n_k - 1}w$. По предположению индукции корни полученного многочлена лежат в круге

$$|w| \leq \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{k-1}}{n_{k-1} - 1},$$

поэтому корни многочлена $A_0 f(z)$ лежат в круге

$$|z| \leq \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n_k}{n_k - 1}.$$

Следовательно, предположение о том, что все корни многочлена $f(z)$ лежат вне этого круга, приводит к противоречию. $\square$

Пусть $f(z) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i z^i$ и $g(z) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} b_i z^i$. Многочлен $h(z) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i b_i z^i$ называют *композицией* многочленов f и g .

ТЕОРЕМА 1.11 (Сегё). Пусть f и g — многочлены степени n , причем все корни многочлена f лежат в круговой области K . Тогда любой корень композиции h многочленов f и g имеет вид $-\zeta_i k$, где ζ_i — некоторый корень многочлена g , а $k \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ — какой-то корень многочлена h , т. е. $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i b_i \gamma^i = 0$. Тогда многочлены $f(z)$ и $G(z) = z^n g(-\gamma z^{-1})$ аполярны. Поэтому согласно теореме Грэйса один из корней многочлена $G(z)$ лежит в K . Пусть, например, $g(-\gamma k^{-1}) = 0$, где $k \in K$. Тогда $-\gamma k^{-1} = \zeta_i$, где ζ_i — корень многочлена g . $\square$

Для многочленов, степени которых не обязательно равны, имеется следующий аналог теоремы Грэйса.

ТЕОРЕМА 1.12 [Az]. Пусть $f(z) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i z^i$ и $g(z) = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} b_i z^i$ — многочлены степени n и m , причем $m \leq n$. Предположим, что их коэффициенты связаны соотношением

$$\binom{m}{0} a_0 b_m - \binom{m}{1} a_1 b_{m-1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} a_m b_0 = 0. \quad (3)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) если все корни многочлена $g(z)$ лежат в круге $|z| \leq r$, то по крайней мере один корень многочлена $f(z)$ тоже лежит в этом круге;
- б) если все корни многочлена $f(z)$ лежат вне круга $|z| \leq r$, то по крайней мере один корень многочлена $g(z)$ тоже лежит вне этого круга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [Ru]. а) Соотношение (3) инвариантно относительно замены z на rz в многочленах f и g , поэтому можно считать, что $r = 1$. Предположим, что все корни многочлена $f(z)$ лежат в области $|z| > 1$. Тогда все корни многочлена $z^n f(1/z)$ лежат в области $|z| < 1$.

Поэтому из теоремы Гаусса–Люка (теорема 2.1 на с. 22) следует, что все корни многочлена

$$f_1(z) = D^{(n-m)}(z^n f(1/z)) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1) \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a_i z^{m-i}$$

лежат в области $|z| < 1$. Следовательно, все корни многочлена

$$f_2(z) = z^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a_i (1/z)^{m-i} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a_i z^i$$

лежат в области $|z| > 1$.

Соотношение (3) означает, что многочлены f_2 и g аполярны. Все корни многочлена f_2 лежат в круговой области $|z| > 1$, поэтому согласно теореме Грэйса по крайней мере один корень многочлена g тоже лежит в этой области. Приходим к противоречию.

б) Все корни многочлена f_2 лежат в области $|z| \geq 1$, поэтому по крайней мере один корень многочлена g тоже лежит в этой области. $\square$

1.5. Проблема Рауса–Гурвица

Во многих задачах об устойчивости возникает потребность выяснить, все ли корни многочлена лежат в левой полуплоскости (т. е. вещественные части корней отрицательны). Такие многочлены называют *устойчивыми*. Проблема Рауса–Гурвица заключается в том, чтобы непосредственно по коэффициентам многочлена выяснить, устойчив он или нет. Известно много разных решений проблемы Рауса–Гурвица (см., например, [По2]). Мы ограничимся одним простым критерием, приведенным в [Str].

Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай многочлена с вещественными коэффициентами. В самом деле, если $p(z) = \sum a_n z^n$ — многочлен с комплексными коэффициентами, то можно рассмотреть многочлен

$$p^*(z) = p(z) \overline{p(\bar{z})} = \left(\sum a_n z^n \right) \left(\sum \bar{a}_n z^n \right).$$

Ясно, что вещественные части корней у многочлена $\overline{p(\bar{z})}$ такие же, как и у многочлена $p(z)$. Кроме того, выражения коэффициентов многочлена $p^*(z)$ симметричны относительно a_n и $\bar{a}_n$. Это означает, что коэффициенты многочлена p^* переходят в себя при сопряжении, т. е. они вещественны.

ТЕОРЕМА 1.13. Пусть $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$, где $m = n(n-1)/2$, — многочлен, корнями которого служат все суммы пар корней многочлена p . Многочлен p устойчив тогда и только тогда, когда все коэффициенты многочленов p и q положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многочлен p устойчив. Отрицательному корню α соответствует множитель $z - \alpha$ с положительными коэффициентами. Пары сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ с отрицательной вещественной частью соответствуют множитель

$$(z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$$

с положительными коэффициентами. Таким образом, все коэффициенты многочлена p положительны.

Комплексные корни многочлена q распадаются на пары сопряженных корней, поэтому коэффициенты многочлена q вещественные. Кроме того, вещественные части всех корней многочлена q отрицательны. Те же самые рассуждения, что и для многочлена p , показывают, что все коэффициенты многочлена q положительны.

Пусть теперь все коэффициенты многочленов p и q положительны. В таком случае все вещественные корни многочленов p и q отрицательны. Поэтому если α — вещественный корень многочлена p , то $\alpha < 0$, а если $\alpha \pm i\beta$ — пара комплексных сопряженных корней многочлена p , то $2\alpha = (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)$ — корень многочлена q , а значит, $2\alpha < 0$. $\square$

2. Корни многочлена и его производной

2.1. Теорема Гаусса–Люка

В 1836 г. Гаусс показал, что все корни производной многочлена P , отличные от кратных корней самого многочлена P , являются положениями равновесия для поля сил, которое создается одинаковыми частицами, расположенными в корнях многочлена P (в корне кратности r расположено r частиц); каждая частица создает силу притяжения, обратно пропорциональную расстоянию до этой частицы. Из этой теоремы Гаусса легко вывести приводимую ниже теорему 2.1, но сам Гаусс об этом не упоминает. Первым сформулировал и доказал теорему 2.1 французский инженер Люка (F. Lucas) в 1874 г. Поэтому теорему 2.1 часто называют *теоремой Гаусса–Люка*.