

УЧЕБНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
И МЕХАНИКИ



А. Д. ПОЛЯНИН, В. Ф. ЗАЙЦЕВ, А. И. ЖУРОВ

ФИЗМАТЛИТ

Полянин А.Д.
Зайцев В.Ф.
Журов А.И.

**Методы решения
нелинейных
уравнений
математической
физики и
механики**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.9

ББК 517.2

П 54

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. **Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-0539-2.

Описаны точные аналитические методы решения нелинейных уравнений математической физики. Наряду с классическими методами представлены также новые методы, которые интенсивно развивались в последнее время (неклассический метод поиска симметрий, прямой метод Кларксона–Крускала, метод дифференциальных связей, метод обобщенного разделения переменных и другие). Во всех разделах рассматриваются примеры использования методов для построения точных решений конкретных нелинейных дифференциальных уравнений. Исследуются уравнения тепло- и массопереноса, гидродинамики, теории волн, нелинейной акустики, теории горения, нелинейной оптики и др. Приведены многочисленные задачи и упражнения, позволяющие получить практические навыки применения рассматриваемых методов.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, механики и физики. Ее теоретический материал и упражнения могут быть использованы в курсах лекций по уравнениям математической физики, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Табл. 13. Ил. 22. Библиогр. 201 назв.

© ФИЗМАТЛИТ, 2005, 2009

© А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов,
2005, 2009

ISBN 978-5-9221-0539-2

Оглавление

Предисловие	9
Некоторые обозначения и замечания	13
1. Классификация полулинейных уравнений с частными производными второго порядка	15
1.1. Типы уравнений. Уравнения характеристик	15
1.2. Канонический вид уравнений параболического типа	15
1.3. Канонический вид уравнений гиперболического типа	16
1.4. Канонический вид уравнений эллиптического типа	16
2. Преобразования уравнений математической физики	18
2.1. Точечные преобразования	18
2.2. Преобразование годографа	20
2.2.1. Случай, когда одна из независимых переменных принимается за искомую величину	20
2.2.2. Использование эквивалентной системы уравнений	20
2.3. Контактные преобразования. Преобразования Лежандра и Эйлера ...	23
2.3.1. Общий вид контактных преобразований	23
2.3.2. Преобразование Лежандра	24
2.3.3. Преобразование Эйлера	25
2.4. Преобразования Беклунда	27
2.4.1. Преобразования Беклунда для уравнений второго порядка	27
2.4.2. Преобразования Беклунда, основанные на законах сохранения ...	29
2.5. Дифференциальные подстановки	31
3. Решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Метод подобия	34
3.1. Предварительные замечания	34
3.2. Решения типа бегущей волны	34
3.2.1. Общий вид решений типа бегущей волны	34
3.2.2. Инвариантность уравнений относительно преобразований сдвига ...	35
3.2.3. Функциональное уравнение, задающее решения типа бегущей волны	36
3.3. Автомодельные решения. Метод подобия	37
3.3.1. Общий вид автомодельных решений. Метод подобия	37
3.3.2. Примеры автомодельных решений уравнений математической физики и механики	38
3.3.3. Более общий подход, основанный на решении функционального уравнения	41
3.3.4. Некоторые замечания	42
3.4. Уравнения, инвариантные относительно комбинаций преобразований сдвига и растяжения, и их решения	44
3.4.1. Экспоненциально-автомодельные (предельные) решения	44
3.4.2. Инвариантные решения	45
3.5. Обобщенно-автомодельные решения	47

4. Метод обобщенного разделения переменных	49
4.1. Введение	49
4.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных	49
4.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях	49
4.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях	51
4.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных	53
4.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных уравнений	53
4.2.2. Общий вид функционально-дифференциальных уравнений	54
4.3. Упрощенная схема построения точных решений, основанная на априорном задании одной системы координатных функций	54
4.3.1. Описание упрощенной схемы построения точных решений	54
4.3.2. Примеры построения решений нелинейных уравнений старших порядков	55
4.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования	57
4.4.1. Описание метода дифференцирования	57
4.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных	58
4.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления	62
4.5.1. Предварительные замечания. Описание метода расщепления	62
4.5.2. Решения простейших функциональных уравнений и их применение	63
4.6. Метод Титова — Галактионова	69
4.6.1. Описание метода. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного оператора	69
4.6.2. Некоторые обобщения	70
5. Метод функционального разделения переменных	73
5.1. Структура решений с функциональным разделением переменных	73
5.2. Решения с функциональным разделением переменных специального вида	73
5.2.1. Решения типа обобщенной бегущей волны. Примеры	73
5.2.2. Решение путем сведения к уравнениям с квадратичной нелинейностью	78
5.3. Метод дифференцирования	80
5.3.1. Основные идеи метода. Редукция к уравнению стандартного вида	80
5.3.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных	80
5.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными	85
5.4.1. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению стандартного вида	85
5.4.2. Функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида	86
5.5. Решения некоторых нелинейных функциональных уравнений и их приложения в математической физике	87
5.5.1. Функциональное уравнение $f(x) + g(y) = Q(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$	87
5.5.2. Функциональное уравнение $f(t) + g(x) + h(x)Q(z) + R(z) = 0$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$	87
5.5.3. Функциональное уравнение $f(t) + g(x)Q(z) + h(x)R(z) = 0$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$	90
5.5.4. Функциональное уравнение $f(x) + g(y) + h(x)P(z) + s(y)Q(z) + R(z) = 0$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$	91

6. Прямой метод Кларксона—Крускала	94
6.1. Поиск точных решений специального вида	94
6.1.1. Упрощенная схема. Примеры построения точных решений	94
6.1.2. Процедура построения точных решений специального вида	96
6.2. Поиск точных решений общего вида	97
6.2.1. Общий вид решений	97
6.2.2. Примеры построения точных решений методом Кларксона—Крускала	98
6.3. Некоторые модификации и обобщения	99
6.3.1. Комбинация методов Кларксона—Крускала и обобщенного разделения переменных	99
6.3.2. Построение точных решений уравнений с тремя и более независимыми переменными	101
7. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений	104
7.1. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства	104
7.1.1. Однопараметрические преобразования. Инфинитезимальный оператор	104
7.1.2. Инвариант оператора. Преобразования на плоскости	105
7.1.3. Формулы для вычисления производных. Координаты первого и второго продолжений	106
7.2. Симметрии нелинейных уравнений второго порядка. Условие инвариантности	108
7.2.1. Условие инвариантности. Процедура расщепления по производным	108
7.2.2. Примеры поиска симметрий нелинейных уравнений математической физики	109
7.3. Использование симметрий уравнения для поиска точных решений. Инвариантные решения	113
7.3.1. Использование симметрий уравнения для построения однопараметрических решений	113
7.3.2. Процедура построения инвариантных решений	114
7.3.3. Примеры построения инвариантных решений нелинейных уравнений	115
7.3.4. Решения, порождаемые линейными комбинациями допускаемых операторов	118
7.4. Некоторые обобщения. Уравнения старших порядков	120
7.4.1. Однопараметрические группы Ли точечных преобразований. Генератор группы	120
7.4.2. Инварианты группы. Локальные преобразования производных	121
7.4.3. Условие инвариантности. Процедура расщепления. Инвариантные решения	122
7.5. Симметрии систем уравнений математической физики	123
7.5.1. Основные соотношения, используемые при анализе симметрий систем уравнений	123
7.5.2. Симметрии уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя	124
8. Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений	130
8.1. Описание метода. Условие инвариантной поверхности	130
8.2. Конкретные примеры: уравнение Фитц-Хью — Нагумо и нелинейное волновое уравнение	131
9. Метод дифференциальных связей	137
9.1. Описание метода	137
9.1.1. Предварительные замечания. Простейший пример	137
9.1.2. Общее описание метода дифференциальных связей	138

9.2.	Дифференциальные связи первого порядка	141
9.2.1.	Эволюционные уравнения второго порядка	141
9.2.2.	Гиперболические уравнения второго порядка	145
9.2.3.	Уравнения второго порядка общего вида	147
9.3.	Дифференциальные связи второго и старших порядков	148
9.3.1.	Дифференциальные связи второго порядка для эволюционных уравнений	148
9.3.2.	Примеры использования дифференциальных связей для построения точных решений	148
9.4.	Использование нескольких дифференциальных связей	150
9.5.	Связь между методом дифференциальных связей и другими методами	153
9.5.1.	Обобщенное и функциональное разделение переменных и дифференциальных связи	153
9.5.2.	Прямой метод Кларксона—Крускала и метод дифференциальных связей	154
9.5.3.	Методы группового анализа и метод дифференциальных связей	154
10.	Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики	157
10.1.	Подвижные особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений	157
10.1.1.	Примеры решений, имеющих подвижные особенности	157
10.1.2.	Результаты классификации нелинейных уравнений первого и второго порядков	157
10.1.3.	Уравнения Пенлеве	158
10.1.4.	Тест Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений	159
10.1.5.	Некоторые замечания о тесте Пенлеве. Индексы Фукса. Примеры	160
10.1.6.	Тест Пенлеве для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	162
10.2.	Решения уравнений с частными производными, имеющие подвижный полюс. Описание метода	163
10.2.1.	Простейшая схема анализа нелинейных уравнений в частных производных	164
10.2.2.	Общая схема анализа нелинейных уравнений в частных производных	164
10.2.3.	Основные этапы исследования нелинейных уравнений на тест Пенлеве	165
10.2.4.	Некоторые замечания. Усеченные разложения	165
10.3.	Примеры применения теста Пенлеве и усеченных разложений для анализа нелинейных уравнений математической физики	167
10.3.1.	Уравнения, удовлетворяющие тесту Пенлеве	167
10.3.2.	Анализ нелинейных систем уравнений математической физики на тест Пенлеве	170
10.4.	Построение решений нелинейных уравнений, не удовлетворяющих тесту Пенлеве, с помощью усеченных разложений	172
11.	Методы обратной задачи рассеяния (теория солитонов)	175
11.1.	Метод, основанный на использовании пар Лакса	175
11.1.1.	Описание метода. Условие совместности. Пары Лакса	175
11.1.2.	Примеры пар Лакса для нелинейных уравнений математической физики	176
11.2.	Метод, использующий условие совместности систем линейных уравнений	177
11.2.1.	Общая схема. Условие совместности. Линейные системы с двумя уравнениями	177
11.2.2.	Решение определяющих уравнений в виде полиномов по спектральному параметру. Примеры	179
11.3.	Метод, основанный на использовании линейных интегральных уравнений	182
11.3.1.	Описание метода	182
11.3.2.	Конкретные примеры	183

11.4. Решение задачи Коши методом обратной задачи	186
11.4.1. Предварительные замечания. Прямая и обратная задачи рассеяния	186
11.4.2. Решение задачи Коши для нелинейных уравнений методом обратной задачи	188
11.4.2. N -солитонное решение уравнения Кортевега—де Фриза	190
12. Законы сохранения и интегралы движения	193
12.1. Основные определения и примеры	193
12.1.1. Общий вид законов сохранения	193
12.1.2. Интегралы движения	193
12.1.3. Законы сохранения некоторых нелинейных уравнений математической физики	194
12.2. Уравнения, допускающие вариационную формулировку. Нётеровы симметрии	195
12.2.1. Лагранжиан, уравнение Эйлера—Лагранжа. Нётеровы симметрии	195
12.2.2. Примеры построения законов сохранения с помощью нётеровых симметрий	197
Вспомогательные главы	200
13. Уравнения Пенлеве	200
13.1. Первое уравнение Пенлеве	200
13.2. Второе уравнение Пенлеве	201
13.3. Третье уравнение Пенлеве	202
13.4. Четвертое уравнение Пенлеве	203
13.5. Пятое уравнение Пенлеве	204
13.6. Шестое уравнение Пенлеве	204
14. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка	206
14.1. Характеристическая система. Общее решение	206
14.1.1. Уравнения с двумя независимыми переменными	206
14.1.2. Использование двухпараметрических частных решений	207
14.1.3. Уравнения с произвольным числом независимых переменных	207
14.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности	207
14.2.1. Две формулировки задачи Коши	207
14.2.2. Процедура решения задачи Коши	208
14.2.3. Теорема существования и единственности	208
14.3. Качественные особенности и разрывные решения квазилинейных уравнений	210
14.3.1. Модельное уравнение газовой динамики	210
14.3.2. Решение задачи Коши	210
14.3.3. Ударные волны. Условия на разрыве	212
14.3.4. Использование интегральных равенств для определения обобщенных решений	215
14.3.5. Законы сохранения. Вязкие решения	216
14.3.6. Формула Хопфа для обобщенного решения	218
14.3.7. Задача о распаде произвольного разрыва	219
14.3.8. Задача о распространении сигнала	220
14.4. Обобщенные решения квазилинейных уравнений	221
14.4.1. Предварительные замечания	221
14.4.2. Обобщенное решение. Условия на разрыве и условия устойчивости	222
14.4.3. Законы сохранения. Вязкие решения	224
14.4.4. Конструктивный метод построения обобщенных устойчивых решений	224

15. Нелинейные уравнения общего вида с частными производными первого порядка	226
15.1. Методы решения	226
15.1.1. Полный, общий и особый интегралы	226
15.1.2. Метод Лагранжа—Шарпи	227
15.1.3. Построение полного интеграла с помощью двух первых интегралов	228
15.1.4. Случай, когда уравнение не зависит явно от w	229
15.1.5. Уравнение Гамильтона—Якоби	230
15.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности	230
15.2.1. Постановка задачи и процедура построения решения	230
15.2.2. Теорема существования и единственности	231
15.2.3. Задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби	231
15.2.4. Примеры решения задачи Коши	232
15.3. Обобщенные вязкие решения и их приложения	233
15.3.1. Предварительные замечания	233
15.3.2. Вязкие решения, основанные на использовании параболического уравнения	233
15.3.3. Обобщенные решения, основанные на пробных функциях и неравенствах	234
15.3.4. Локальная структура обобщенных вязких решений	235
15.3.5. Обобщение классического метода характеристик	236
15.3.6. Примеры вязких (негладких) решений	237
16. Решение некоторых функциональных уравнений	239
16.1. Метод дифференцирования по параметру	239
16.1.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода	239
16.1.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по параметру	240
16.2. Метод дифференцирования по независимым переменным	241
16.2.1. Предварительные замечания	241
16.2.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по независимым переменным	241
16.3. Решение функциональных уравнений методом исключения аргумента	242
16.3.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода	242
16.3.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом исключения аргумента	243
Список литературы	245

Предисловие

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE и др.).

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются следующие решения:

1. Решения, которые выражаются через элементарные функции.
2. Решения, которые выражаются в виде квадратур.*
3. Решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений).
4. Решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений).

Под точными методами решения нелинейных уравнений математической физики понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

В книге описаны основные (как классические, так и новые) точные методы решения нелинейных уравнений математической физики. Эти методы перечислены в сводной таблице.

ТАБЛИЦА
Основные точные методы решения нелинейных уравнений математической физики

№	Название метода	Характерные особенности
1	Классический метод поиска симметрий (метод группового анализа)	Основан на поиске преобразований, которые оставляют инвариантным вид уравнений. Позволяет получать инвариантные решения
2	Неклассический метод поиска симметрий	Важная модификация метода группового анализа (но более сложная для практического применения). Позволяет описать более широкий класс решений
3	Прямой метод Кларксона—Крускала	Задается общая структура решения, в которое входят произвольные функции. Эти функции неравноправны, для их определения используют специальные приемы
4	Метод дифференциальных связей	Основан на совместном исследовании данных уравнений и вспомогательных (более простых) уравнений, называемых дифференциальными связями
5	Метод обобщенного разделения переменных	Задается общий вид решения, характерный для линейных уравнений. Для определения искоемых функций используют разные методы
6	Метод функционального разделения переменных	Задается общий вид решения с функциональным произволом. Для определения искоемых функций используют методы дифференцирования и расщепления
7	Метод обратной задачи рассеяния	Основан на специальном представлении уравнения (с помощью пары линейных операторов) или на условии совместности двух линейных уравнений
8	Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики	Основан на поиске решений в виде разложений, имеющих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается произвольной функцией

* Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции) и операций взятия неопределенного интеграла.

Замечание 1. Наиболее популярными методами являются методы группового анализа и обратной задачи рассеяния (данные основаны на поиске ключевых слов в Интернете).

Замечание 2. В теории тепло- и массопереноса и гидродинамике* эффективно работают только первые шесть методов, указанных в таблице.

Замечание 3. Иногда объединяют метод группового анализа и неклассический метод поиска симметрий, а также методы обобщенного и функционального разделения переменных.

Замечание 4. Метод Монжа, метод Хироты и другие точные методы, имеющие существенно более узкую область применимости, в книге не рассматриваются.

Изложение методов сопровождается многочисленными конкретными примерами и упражнениями, необходимыми для лучшего усвоения материала и получения практических навыков решения дифференциальных уравнений. Помимо нелинейных уравнений второго и более высоких порядков, для иллюстрации широкой области применимости описанных методов в качестве примеров и упражнений иногда используются также некоторые нелинейные уравнения первого порядка и линейные уравнения второго и более высоких порядков.

При отборе практического материала (примеров и упражнений) авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим двум важным типам уравнений:

- уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);
- уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют особый интерес для тестирования численных и приближенных методов).

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом.

Для удобства читателей в книгу включены также четыре вспомогательных главы: по уравнениям Пенлеве, по методам решения квазилинейных и нелинейных уравнений с частными производными первого порядка, по методам решения функциональных уравнений.

Книга представляет собой расширенный курс лекций по методам решения нелинейных уравнений математической физики и механики, читаемый студентам кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики,

* Здесь имеется в виду поиск точных решений уравнений Навье — Стокса и уравнений гидродинамического пограничного слоя.

теории управления и химической технологии. Основной материал книги и упражнения могут быть использованы для чтения спецкурсов и проведения практических занятий по нелинейным уравнениям математической физики для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов и технических вузов. Отдельные разделы книги могут быть включены в основные курсы по уравнениям математической физики.

Авторы

Некоторые обозначения и замечания

Латинские буквы

$C_1, C_2, \dots$ — произвольные постоянные;

r, φ, z — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;

r, θ, φ — сферические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$,
 $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$;

t — время ($t \geq 0$);

w — искомая функция (зависимая переменная);

x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);

$x_1, \dots, x_n$ — декартовы координаты в n -мерном пространстве.

Греческие буквы

Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ — в двумерном случае,}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — в трехмерном случае,}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{ — в } n\text{-мерном случае;}$$

$\Delta \Delta$ — бигармонический оператор, $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные:

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_t = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w_{xt} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad w_{tt} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad w_{xxx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \dots$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad f_x^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при } n \geq 5.$$

Краткие обозначения дифференциальных операторов

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_w = \frac{\partial}{\partial w};$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xt} \frac{\partial}{\partial w_t} + \dots;$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + w_t \frac{\partial}{\partial w} + w_{xt} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{tt} \frac{\partial}{\partial w_t} + \dots,$$

где $\partial_x, \partial_t, \partial_w$ — операторы дифференцирования по x, t, w , а D_x и D_t — операторы полного дифференцирования по x и t (считается, что $w = w(x, t)$).

ТАБЛИЦА
Наиболее распространенные типы точных решений (для уравнений
с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w)

№	Название решения	Структура решения (x и t можно помечать местами)
1	Решение типа бегущей волны*	$w = F(z), z = \alpha x + \beta t, \alpha\beta \neq 0$
2	Решение с аддитивным разделением переменных	$w = \varphi(x) + \psi(t)$
3	Решение с мультипликативным разделением переменных	$w = \varphi(x)\psi(t)$
4	Автомодельное решение**	$w = t^\alpha F(z), z = xt^\beta$
5	Обобщенное автомодельное решение	$w = \varphi(t)F(z), z = x\psi(t)$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$w = F(z), z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$w = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных	$w = F(z), z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе переменные могут играть роль пространственных координат.

** Иногда решения вида $w = \tilde{t}^\alpha F(z), z = \tilde{x}\tilde{t}^\beta$, где $\tilde{x} = x + C_1$ и $\tilde{t} = t + C_2$, также будут называться автомодельными решениями.

Замечания

1. В формулах, содержащих выражения типа $\frac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.

2. В книге обычно не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной переменной, которая входит в исходное уравнение.

3. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных типов точных решений, которая не связана с видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

🔍 Этим знаком помечены ссылки на литературные источники.

◆ Этим знаком помечены задачи и упражнения к разделам для самостоятельной работы читателя.

1. Классификация полулинейных уравнений с частными производными второго порядка

1.1. Типы уравнений. Уравнения характеристик

Рассмотрим полулинейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad (1)$$

где a, b, c — некоторые функции от x и y , имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Классификация полулинейных уравнений проводится аналогично классификации линейных уравнений; процедура приведения таких уравнений к каноническому виду определяется только левой частью уравнения.

Уравнение (1) в точке (x, y) принадлежит к

<i>параболическому типу,</i>	если $b^2 - ac = 0$;
<i>гиперболическому типу,</i>	если $b^2 - ac > 0$;
<i>эллиптическому типу,</i>	если $b^2 - ac < 0$.

Для того, чтобы привести уравнение (1) к каноническому виду, надо записать уравнение характеристик

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$a dy - (b + \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0, \quad (2)$$

$$a dy - (b - \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0, \quad (3)$$

и найти их общие интегралы.

1.2. Канонический вид уравнений параболического типа ($b^2 - ac = 0$)

Уравнения (2) и (3) в этом случае совпадают и имеют один общий интеграл

$$\varphi(x, y) = C.$$

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta = \eta(x, y)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию невырожденности якобиана $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ в рассматриваемой области, приведем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_1\left(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right). \quad (4)$$

В качестве функции η можно выбрать $\eta = x$ или $\eta = y$.

Видно, что преобразованное уравнение (4) имеет только один член со старшей производной (в частном случае $F_1 = w_\xi$ оно совпадает с линейным уравнением теплопроводности).

Замечание. В вырожденном случае, когда функция F_1 не зависит от производной w_ξ , уравнение (4) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной η , в котором ξ играет роль параметра.

1.3. Канонический вид уравнений гиперболического типа ($b^2 - ac > 0$)

Общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2$$

уравнений (2) и (3) являются вещественными и различными. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (1) к каноническому виду (первая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = F_2\left(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right).$$

Преобразование

$$\xi = t + z, \quad \eta = t - z$$

приводит полученное уравнение к другому каноническому виду (вторая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_3\left(t, z, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

где $F_3 = 4F_2$. В частном случае $F_3 = 0$ это уравнение совпадает с линейным уравнением колебаний струны.

1.4. Канонический вид уравнений эллиптического типа ($b^2 - ac < 0$)

Общие интегралы уравнений (2) и (3) в этом случае являются комплексно сопряженными и определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (2) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C, \quad i^2 = -1,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — вещественные функции.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_4\left(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right).$$

В частном случае $F_4 = 0$ это уравнение совпадает с уравнением Лапласа.

◆ Задачи и упражнения к главе 1

1. При каких значениях определяющих коэффициентов уравнение

$$a_1 w_{xx} + a_2 w_{xy} + a_3 w_{yy} + b_1 w_x + b_2 w_y = f(w)$$

приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$w''_{\xi\xi} + kw'_\xi = f(w)?$$

2. Каким условиям должны удовлетворять функциональные коэффициенты уравнения

$$f_1(x)w_{xx} + f_2(x)w_{xy} + f_3(x)w_{yy} + g_1(x)w_x + g_2(x)w_y = \Phi(w),$$

чтобы оно приводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению вида:

a) $w''_{\xi\xi} = \Phi(w),$

b) $w''_{\xi\xi} + aw'_\xi = \Phi(w),$

c) $h_1(\xi)w''_{\xi\xi} + h_2(\xi)w'_\xi = \Phi(w)?$

Указание. Преобразование искать в виде $\xi = y + \int \varphi(x) dx$, $\eta = y + \int \psi(x) dx$.

3. Каким условиям должны удовлетворять функциональные коэффициенты уравнения

$$f_1(x)w_{xx} + f_2(x)w_{xy} + f_3(x)w_{yy} + g_1(x)w_x + g_2(x)w_y = \Phi(w),$$

чтобы оно приводилось к каноническому виду:

a) $w_{\xi\eta} = \Phi(w),$

b) $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = \Phi(w)?$

◆ Литература к главе 1: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин, Г. И. Натансон (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), В. С. Владимиров (1985), А. Д. Полянин (2001 а).

2. Преобразования уравнений математической физики

2.1. Точечные преобразования

Пусть x, y — независимые переменные, а $w = w(x, y)$ — функция этих переменных. В общем случае точечное преобразование задается формулами

$$x = X(\xi, \eta, u), \quad y = Y(\xi, \eta, u), \quad w = W(\xi, \eta, u), \quad (1)$$

где ξ, η — новые независимые переменные, $u = u(\xi, \eta)$ — новая зависимая переменная, X, Y, W — некоторые (заданные или искомые) функции.

Точечные преобразования не только сохраняют порядок уравнения, к которому они применяются, но и не изменяют радикально структуру уравнения, так как старшие производные новых переменных линейно зависят от старших производных исходных переменных.

Преобразование (1) обратимо, если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2)$$

с помощью обратимого точечного преобразования (1) приводится к виду

$$G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0. \quad (3)$$

Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (3), то формулы (1) определяют соответствующее решение уравнения (2) в параметрическом виде.

Простейшие преобразования независимых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_0, \quad \eta = y - y_0 && \text{(преобразование сдвига),} \\ \xi &= k_1 x, \quad \eta = k_2 y && \text{(преобразование масштабирования).} \end{aligned}$$

Первое преобразование соответствует переносу начала координат в точку (x_0, y_0) , а второе — изменению масштабов (сжатию или растяжению) вдоль осей x и y .

Точечные преобразования используются для упрощения уравнений и приведения их к известным. Иногда они позволяют свести нелинейные уравнения к линейным.

Пример 1. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(w^m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + [xf(t) + g(t)] \frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w$$

с помощью точечного преобразования

$$w(x, t) = u(z, \tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t) dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t) dt,$$

где функции F и H определяются формулами

$$F(t) = \exp \left[\int f(t) dt \right], \quad H(t) = \exp \left[\int h(t) dt \right],$$

приводится к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left(u^m \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Пример 2. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + f(x, t)$$

заменой $u = \exp(aw)$ приводится к линейному уравнению для функции $u = u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + af(x, t)u.$$

♦ Задачи и упражнения к разд. 2.1

1. Найти преобразование, приводящее уравнение теплопроводности с нелинейным источником $w_t = aw_{xx} + bw^n$ к каноническому виду $u_\tau = u_{xx} + u^n$.
2. Найти преобразование, приводящее уравнение Бюргерса $w_t + aww_x = bw_{xx}$ к каноническому виду $u_\tau + uu_z = u_{zz}$.
3. Найти преобразование, приводящее уравнение Буссинеска $w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxx} = 0$ к каноническому виду $u_{\tau\tau} + (u_z)_z + u_{zzz} = 0$.
4. Найти точечные преобразования, приводящие нелинейные уравнения
 - a) $w_t = w_{xx} + aw_x^2$,
 - b) $w_t = w_{xx} + aww_x^2$,
 - c) $w_t = w_{xx} + f(w)w_x^2$

к линейному уравнению теплопроводности $u_t = u_{xx}$.

Указание. Преобразования ищутся в виде $u = F(w)$.

5. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + aw \ln w + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a \ln u$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t)u$, где $u = u(x, t)$.

6. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2 + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a(u_x)^2$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t) + u$, где $u = u(x, t)$.

7. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + a(w_x)^n + bw + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a(u_x)^n + bu$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t) + u$, где $u = u(x, t)$.

8. Показать, что уравнение Монжа — Ампера $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$ инвариантно относительно преобразования

$$\tilde{x} = a_1x + b_1y + c_1, \quad \tilde{y} = a_2x + b_2y + c_2, \quad \tilde{w} = kw + a_3x + b_3y + c_3$$

(т. е. приводится к уравнению такого же вида).

9. Найти преобразование вида

$$\tilde{t} = f(t), \quad \tilde{x} = g(t)x, \quad \tilde{w} = h(t)w + p(t)x,$$

связывающее цилиндрическое уравнение Кортевега — де Фриза

$$\tilde{w}_t = \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 6\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{x}} - \frac{\tilde{w}^3}{2\tilde{t}}$$

и обычное уравнение Кортевега — де Фриза

$$w_t = w_{xxx} + 6ww_x.$$

☞ *Литература к разд. 2.1:* А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyaniin, V. F. Zaitsev (2004).

2.2. Преобразование годографа

Для упрощения нелинейных уравнений и систем уравнений с частными производными иногда используется преобразование годографа.

2.2.1. Случай, когда одна из независимых переменных принимается за искомую величину

Для уравнения с двумя независимыми переменными x, t и искомой функцией $w = w(x, t)$ преобразование годографа заключается в том, что решение ищется в неявном виде (x и t можно поменять местами):

$$x = x(t, w), \quad (4)$$

т. е. t и w принимаются за независимые переменные, а x — за зависимую переменную. Преобразование годографа (4) не меняет порядок уравнения и является частным случаем точечного преобразования (его можно записать в эквивалентном виде: $x = \tilde{w}$, $t = \tilde{t}$, $w = \tilde{x}$).

Пример 3. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Ищем решение в неявном виде. Дифференцируя выражение (4) по обоим переменным как неявную функцию с учетом зависимости $w = w(x, t)$, получим:

$$\begin{aligned} 1 &= x_w w_x && (\text{дифференцирование по } x), \\ 0 &= x_w w_t + x_t && (\text{дифференцирование по } t), \\ 0 &= x_{ww} w_x^2 + x_w w_{xx} && (\text{дифференцирование по } x \text{ дважды}), \end{aligned}$$

где индексы снизу обозначают соответствующие частные производные. Из этих соотношений выразим «старые» производные через «новые»:

$$w_x = \frac{1}{x_w}, \quad w_t = -\frac{x_t}{x_w}, \quad w_{xx} = -\frac{w_x^2 x_{ww}}{x_w} = -\frac{x_{ww}}{x_w^3}.$$

Подставив эти выражения в (5), приходим к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}.$$

2.2.2. Использование эквивалентной системы уравнений

Для системы двух уравнений с двумя независимыми переменными x, y и зависимыми переменными $w = w(x, y)$, $v = v(x, y)$ преобразование годографа заключается в том, что w и v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, т. е. ищутся функции

$$x = x(w, v), \quad y = y(w, v). \quad (6)$$

Преобразование годографа применяется в газовой динамике и в теории струй для линеаризации соответствующих уравнений и решения некоторых краевых задач.

Для исследования отдельных уравнений иногда бывает полезно перейти к эквивалентной системе уравнений, а затем сделать преобразование годографа. Проиллюстрируем сказанное на примерах конкретных нелинейных уравнений.

Пример 4. Стационарное уравнение Хохлова—Заболоцкой (встречается в акустике и в нелинейной механике)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

представим в виде системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -aw \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

Используем преобразование годографа (6): примем w и v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные. Дифференцируя каждое выражение (6) по x и по y (как сложные функции) и исключая из полученных соотношений частные производные x_w, x_v, y_w, y_v , имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{где } J = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

Исключая из (8) с помощью (9) производные w_x, w_y, v_x, v_y , приходим к системе

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -aw \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \quad (10)$$

Почленно продифференцируем первое уравнение по w , а второе—по v , и исключим смешанную производную y_{wv} . В результате для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + aw \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \quad (11)$$

Аналогичным образом из системы (10) для функции $y = y(w, v)$ имеем другое линейное уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{aw} \frac{\partial y}{\partial w} \right) = 0. \quad (12)$$

Взяв некоторое частное решение $x = x(w, v)$ уравнения (11) и подставив его в систему (10), простым интегрированием можно найти $y = y(w, v)$. Исключив из равенств (8) переменную v , получим точное решение $w = w(x, y)$ нелинейного уравнения (7).

Замечание. Уравнение (11) при произвольном a имеет простое частное решение

$$x = C_1 w v + C_2 w + C_3 v + C_4, \quad (13)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 —произвольные постоянные. Подставив его в систему (10), получим

$$\frac{\partial y}{\partial v} = C_1 v + C_2, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -a(C_1 w + C_3)w. \quad (14)$$

Интегрируя первое уравнение (14), находим $y = \frac{1}{2} C_1 v^2 + C_2 v + \varphi(w)$. Подставив это решение во второе уравнение (14), определяем функцию $\varphi(w)$. В результате получим

$$y = \frac{1}{2} C_1 v^2 + C_2 v - \frac{1}{3} a C_1 w^3 - \frac{1}{2} a C_3 w^2 + C_5. \quad (15)$$

Формулы (13) и (15) определяют точное решение уравнения (7) в параметрической форме (v —параметр).

Аналогичным образом можно построить и другие точные решения уравнения (7).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Борна—Инфельда

$$\left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (16)$$

которое используется в нелинейной электродинамике (в теории поля).

Путем введения новых переменных

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad u = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

уравнение (16) можно записать в виде эквивалентной системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0, \\ v^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - (1 + 2uv) \frac{\partial u}{\partial \eta} + u^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Преобразование годографа (u, v принимаются за независимые переменные, а ξ, η — за зависимые переменные) приводит к линейной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u} &= 0, \\ v^2 \frac{\partial \eta}{\partial v} + (1 + 2uv) \frac{\partial \xi}{\partial v} + u^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а после исключения η — к линейному уравнению второго порядка

$$u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + (1 + 2uv) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + 2u \frac{\partial \xi}{\partial u} + 2v \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0.$$

Считая, что искомые решения находятся в гиперболической области, запишем уравнение характеристик (см. главу 1):

$$u^2 dv^2 - (1 + 2uv) du dv + v^2 du^2 = 0.$$

Интегралы этого уравнения имеют вид $r = C_1$, $s = C_2$, где

$$r = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}, \quad s = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2u}. \quad (18)$$

Переходя в (17) к новым переменным (18), получим

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} + s^2 \frac{\partial \eta}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Исключив переменную η , приходим к простейшему уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial s} = 0,$$

общим решением которого является сумма двух произвольных функций разных аргументов. Функция η определяется из системы (19).

♦ Задачи и упражнения к разд. 2.2

1. Используя преобразование годографа, найти общие решения модельных уравнений газовой динамики:

- $w_t + aww_x = 0$,
- $w_t + f(w)w_x = 0$.

Указание. Использовать преобразование годографа, описанное в примере 3.

2. Преобразовать нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = f(t, w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

в линейное уравнение.

Указание. Использовать преобразование годографа, описанное в примере 3.

3. Найти вид функции $f(u)$, для которой преобразование годографа оставляет инвариантным уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

4. Преобразовать нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование годографа из примера 4, в котором надо сделать переобозначения $x \rightarrow t, y \rightarrow x$.

5. Преобразовать нелинейное уравнение теплопроводности в анизотропной среде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(w) \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0$$

к линейному уравнению.

Указание. Перейти к системе уравнений, а затем использовать преобразование годографа, как в примере 4.

6. Преобразовать нелинейную систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p(\rho))}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

описывающую одномерные адиабатические течения идеального газа, к линейной системе. Здесь v и ρ — неизвестные величины, а $p = p(\rho)$ — заданная функция (для идеального политропического газа $p = A\rho^\gamma$).

Указание. Принять v и ρ за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные.

7. Преобразовать нелинейную систему газодинамического типа

$$\begin{aligned}f_1(w, v) \frac{\partial w}{\partial x} + f_2(w, v) \frac{\partial w}{\partial y} + f_3(w, v) \frac{\partial v}{\partial x} + f_4(w, v) \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ g_1(w, v) \frac{\partial w}{\partial x} + g_2(w, v) \frac{\partial w}{\partial y} + g_3(w, v) \frac{\partial v}{\partial x} + g_4(w, v) \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

в линейную систему.

Указание. Приняв w и v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, использовать формулы (9).

8. Используя преобразование годографа (см. пример 3), найти общее решение нелинейного уравнения
- $w_x w_{xt} - w_t w_{xx} = 0$
- .

❖ *Литература к разд. 2.2:* Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе (1963), Дж. Уизем (1977, стр. 588–590), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 33–34), Г. Г. Черный (1988, стр. 253–269), Р. Курант (1964, стр. 426), D. Zwilling (1989), P. A. Clarkson, A. S. Fokas, M. J. Ablowitz (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001b), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.3. Контактные преобразования. Преобразования Лежандра и Эйлера

2.3.1. Общий вид контактных преобразований

Будем рассматривать функции двух переменных $w = w(x, y)$. Общим свойством контактных преобразований является зависимость исходных переменных от новых переменных и их первых производных:

$$x = X\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad y = Y\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad w = W\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (20)$$

Функции X, Y, W не являются произвольными: они выбираются так, чтобы первые производные исходных переменных также зависели только от преобразованных переменных и их производных не выше первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = U\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = V\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (21)$$

Контактные преобразования (20)–(21) не повышают порядка уравнений, к которым они применяются.

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (22)$$

с помощью контактного преобразования (20)–(21) приводится к виду

$$G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0. \quad (23)$$

Иногда уравнение (23) бывает проще, чем уравнение (22). Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (23), то формулы (20) определяют соответствующее решение уравнения (22) в параметрическом виде.

Покажем, как найти функции U и V в (21) и соотношения, которым должны удовлетворять функции X, Y, W в (20). Продиференцируем по правилу дифференцирования неявных функций первое и второе выражения (20) по x и y , учитывая, что $u = u(\xi, \eta)$. В результате получим четыре соотношения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u} p + \frac{\partial X}{\partial p} p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q} p_\eta \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u} q + \frac{\partial X}{\partial p} q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q} q_\eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \\ & \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u} p + \frac{\partial Y}{\partial p} p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q} p_\eta \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u} q + \frac{\partial Y}{\partial p} q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q} q_\eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \\ & \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u} p + \frac{\partial X}{\partial p} p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q} p_\eta \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u} q + \frac{\partial X}{\partial p} q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q} q_\eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ & \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u} p + \frac{\partial Y}{\partial p} p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q} p_\eta \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u} q + \frac{\partial Y}{\partial p} q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q} q_\eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1, \end{aligned} \quad (24)$$

где использованы краткие обозначения $p = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, $q = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ ($p_\eta = q_\xi$); индексы ξ и η соответствуют частным производным. Первая пара равенств (24) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, вторая — относительно $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$. Решив эти системы, можно найти производные $\frac{\partial \xi}{\partial x} = A$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = B$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = C$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = D$, а затем, продиференцировав третье соотношение (20) по x и y , можно выразить величины $U = \frac{\partial w}{\partial x}$, $V = \frac{\partial w}{\partial y}$ через новые переменные:

$$\begin{aligned} U &= A \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u} p + \frac{\partial W}{\partial p} p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q} p_\eta \right) + B \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u} q + \frac{\partial W}{\partial p} q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q} q_\eta \right), \\ V &= C \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u} p + \frac{\partial W}{\partial p} p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q} p_\eta \right) + D \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u} q + \frac{\partial W}{\partial p} q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q} q_\eta \right). \end{aligned}$$

При этом следующие из (21) условия — отсутствие зависимости от вторых производных

$$\frac{\partial U}{\partial p_\xi} = \frac{\partial V}{\partial p_\xi} = \frac{\partial U}{\partial p_\eta} = \frac{\partial V}{\partial p_\eta} = \frac{\partial U}{\partial q_\eta} = \frac{\partial V}{\partial q_\eta} = 0 \quad (p_\eta \equiv q_\xi)$$

— задают дополнительные соотношения между функциями X, Y, W .

Замечание. Важно отметить, что контактные преобразования определяются независимо от вида конкретных уравнений.

2.3.2. Преобразование Лежандра

Важным частным случаем контактных преобразований является преобразование Лежандра, которое определяется соотношениями

$$w(x, y) + u(\xi, \eta) = x\xi + y\eta, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (25)$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные.

Из формул (25) получим первые производные (используются два следствия первого равенства, полученные путем его дифференцирования по x и y , с учетом двух других соотношений):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \eta. \quad (26)$$