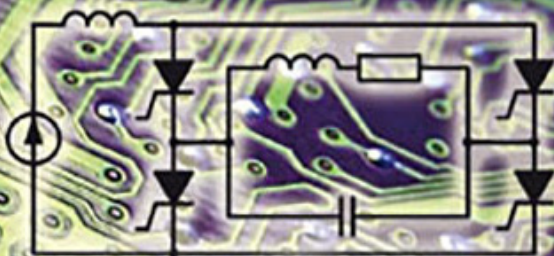


А.Б.ШЕИН, Н.М. ЛАЗАРЕВА

Методы проектирования



$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

электронных устройств



«Инфра-Инженерия»

УДК 621.396.6.049.77: 681.3.06

ББК 32.973.2

Ш39

Рецензенты:

- зав. кафедрой автоматики и системотехники Тихоокеанского государственного университета, доктор технических наук, профессор Чье Ен Ун;

- главный научный сотрудник ОАО "ВНИИР", доктор технических наук, профессор А.Г. Иванов.

Научный редактор:

кандидат технических наук, доцент Г.В. Малинин

Шеин А.Б.

Ш 39 Методы проектирования электронных устройств / А.Б. Шеин, Н.М. Лазарева. - Москва: Инфра-Инженерия, 2011. - 456 с.

ISBN 978-5-9729-0041-1

В книге изложены 25 новых методов проектирования электронных устройств, которые отличаются от известных своей простотой, универсальностью и общностью подходов к решению задач. Для всех методов, вошедших в книгу, выполнены специальные математические проверки, подтверждающие их правильность и правомерность. Кроме того, работа каждого метода поясняется различными примерами его реализации.

В издании на примерах схем устройств силовой электроники рассматривается решение задач анализа и параметрического синтеза аналитическими и численными методами, так как именно эти методы являются основными в теории схемотехнического проектирования.

Книга предназначена для научных работников, инженеров и аспирантов, занимающихся схемотехническим проектированием электронных устройств.

© ШЕИН А.Б., ЛАЗАРЕВА Н.М., авторы, 2011

© Издательство «Инфра-Инженерия», 2011

ISBN 978-5-9729-0041-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.....	6
2. АНАЛИЗ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ ПО МЕТОДУ СОПРЯЖЕННЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД	41
3. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВАХ.....	68
3.1. Методы решения ОДУ на основе операторного метода..	88
4. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГОЧЛЕНОВ. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ.....	104
5. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ	148
5.1. Обобщенное описание метода	159
5.1.1. Формирование уравнений состояния электронных устройств с сосредоточенными параметрами компонентов.....	173
5.1.2. Формирование уравнений состояния электронных устройств с переменными по времени параметрами компонентов.....	188
6. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА К НЕОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ N -ГО ПОРЯДКА. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА.....	195
6.1. Метод приведения систем дифференциальных уравнений первого порядка к неоднородным дифференциальным уравнениям n -го порядка.....	238
7. ПРИВЕДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИ- АЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ N -ГО ПОРЯДКА К СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА	251

8. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ В ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ	256
8.1. Точное решение уравнений состояния электронных устройств	264
8.2. Численное решение уравнений состояния электронных устройств на основе ряда Тейлора	273
8.3. Полиномиальная аппроксимация уравнений состояния электронных устройств	280
8.4. Метод решения неоднородных дифференциальных уравнений n -го порядка	293
8.5. Полиномиальная аппроксимация неоднородных дифференциальных уравнений	301
8.6. Численное решение уравнений состояния электронных устройств с повышенной точностью на основе формул низкого порядка точности	309
8.7. Решение уравнений состояния электронных устройств на основе свойства ортогональности базисных функций	329
8.8. Численный метод решения уравнений состояния электронных устройств на основе обнуления невязки в узлах сетки решения	337
8.9. Численный метод решения уравнений состояния электронных устройств на основе обнуления интегральной невязки в узлах сетки решения	340
8.10. Численное решение уравнений состояния электронных устройств на основе интегрального метода наименьших квадратов	342
9. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ	348
9.1. Ускоренный расчет установившегося режима работы электронных устройств периодического действия	348
9.1.1. Метод ускоренного расчета установившегося режима работы электронных устройств периодического действия	353

9.1.2. Метод ускоренного расчета установившегося режима работы электронных устройств на основе формул точного решения уравнений состояния	356
10. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДУ	360
11. СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ.....	363
11.1. Синтез параметров компонентов схем электронных устройств	365
11.1.1. Параметрический синтез электронных устройств на основе метода решения уравнений состояния с использованием свойств ортогональности базисных функций	390
11.1.2. Параметрический синтез электронных устройств на основе формул точного решения уравнений состояния	414
11.1.2.1. Метод решения систем алгебраических уравнений	429
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	440
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	442
ПРИЛОЖЕНИЯ	445

ВВЕДЕНИЕ

"Нет ничего более практичного, чем хорошая теория". Эти слова выдающегося физика Л. Больцмана очень точно и емко характеризуют то огромное значение, которое общие теоретические подходы имеют для эффективного решения многообразных прикладных задач, в частности задач схемотехнического проектирования электронных устройств.

Содержание понятия "схемотехническое проектирование" сформировалось, когда компонентную базу электронных устройств составляли так называемые "дискретные" компоненты – резисторы, конденсаторы, катушки индуктивностей, трансформаторы, корпусированные транзисторы и диоды, а основной технологией производства схем был навесной монтаж. В этих условиях схемотехническое проектирование сводилось к расчету и анализу электромагнитных процессов в линейных и нелинейных цепях с сосредоточенными параметрами [1].

В настоящее время понятие "схемотехническое проектирование" существенно расширилось. Инженерам-проектировщикам электронных устройств необходимо рассчитывать электромагнитные процессы в схемах этих устройств с учетом электрических схем замещения активных компонентов, отражающих физику их работы в реальном устройстве. Это резко повышает сложность принципиальных схем устройств, а следовательно, и сложность математических моделей описания процессов, возникающих при работе устройства. Для составления математической модели схемы электронного устройства обычно используются законы Кирхгофа.

Наилучшим образом зарекомендовали себя математические модели схем электронных устройств в виде нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и неоднородных дифференциальных уравнений для переменных состояния схемы.

Для получения математической модели схемы в виде нормальной системы ОДУ в теории схемотехнического проектирования был разработан специальный метод переменных состояния. Это – пример влияния вычислительной математики на теорию схемотехнического проектирования. Однако довольно быстро выяснилось, что в силу специфики ряда электронных схем, состоящей в большом разбросе постоянных времени отдельных цепей, явные методы мало-

пригодны для расчета переходных процессов. Это стимулировало в вычислительной математике быстрое развитие теории неявных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, что является примером влияния теории схемотехнического проектирования на вычислительную математику [2].

В широком понимании схемотехническое проектирование означает проектирование схем электронных устройств согласно техническому заданию на проектирование и включает решение задач расчета, анализа, оптимизации и синтеза [1, 2]. Эти задачи называются проектными процедурами и имеют следующее содержание [1].

Расчет – определение выходных параметров и характеристик устройства при неизменных значениях его внутренних параметров и постоянной структуре.

Анализ – определение изменения выходных параметров и характеристик устройства в зависимости от изменения его внутренних и входных параметров. В случае применения ЭВМ задача расчета называется *одновариантным* анализом, а задача анализа – *многовариантным* анализом.

Оптимизация – определение наилучших значений выходных параметров и характеристик путем целенаправленного изменения внутренних параметров устройства (при *параметрической оптимизации*) или структуры устройства (при *структурной оптимизации*).

Наиболее сложными являются задачи параметрического и структурного синтеза. В общем случае синтезом называется генерация исходного варианта устройства, включая его структуру (*структурный синтез*) и значение внутренних параметров (*параметрический синтез*).

При этом параметры компонентов, из которых состоит проектируемое устройство, называются *внутренними*, параметры устройства, по которым оценивается его качество, – *выходными*, параметры действующих на устройство внешних информационных сигналов – *входными*, а параметры окружающей среды – *внешними*.

В книге на примерах схем устройств силовой электроники рассматривается решение задач анализа и параметрического синтеза аналитическими и численными методами, так как именно эти методы являются основными в теории схемотехнического проектирования.

При написании настоящего издания соблюдалась преемственность между главами. Так, материалы главы "Интерполирование и экстраполирование функций" были использованы для разработки почти всех методов, вошедших в главу "Методы моделирования работы электронных устройств в переходных режимах". В свою очередь, основные формулы методов анализа переходных процессов в схеме были использованы при написании главы "Синтез электронных устройств" и т.д.

Для оценки значения методов, изложенных в книге, уместно привести известное высказывание В.И. Ленина из его работы "Материализм и эмпириокритицизм": "Единство природы обнаруживается в поразительной аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений". В связи с этим, учитывая общность математических методов описания разнородных физических явлений и процессов как проявление материального единства мира, можно сказать, что многие методы схемотехнического проектирования электронных устройств, например интерполирование и экстраполирование функций, заданных таблично, нахождение корней многочленов, решение систем алгебраических уравнений и другие, могут с успехом использоваться в авиационной, станкостроительной, приборостроительной и других отраслях промышленности.

1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

При решении многих задач анализа работы электронных устройств возникает необходимость вместо функции действительной переменной $f(t)$, принадлежащей некоторому широкому классу функций A , рассматривать функцию $\varphi(t)$, принадлежащую более узкому классу функций B и в известном смысле представляющую функцию $f(t)$ на некотором промежутке времени t . Например, классом A может быть множество непрерывных функций, описывающих характеристики нелинейных или переменных по времени компонентов схем электронных устройств, а класс B могут составлять алгебраические или тригонометрические многочлены, которые широко применяются в качестве приближающих функций. При этом для расчетов на ЭВМ кривые характеристик компонентов устройства задаются опорными точками, а остальные точки определяются *методом интерполяции*.

Из общего курса математического анализа известно много способов приближения функций, например, с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа, Ньютона, Эрмита – Маркова, интерполяционных формул Стирлинга и Бесселя и т.д. [3], включая приближение с помощью трансцендентных функций ($\sin(t)$, $\ln(t)$ и т.д.). Тем не менее практический интерес к задаче не ослабевает, так как для решения инженерных и научно-исследовательских задач настоятельно требуются простые, быстрые, удобные и надежные способы интерполяции.

Потребуем, чтобы приближающая функция $\varphi(t)$ совпадала с функцией $f(t)$ в $(n+1)$ точках временного промежутка, т.е. выполнялись равенства $f(t_i) = \varphi(t_i)$ ($i = \overline{0, n}$). Если $\varphi(t)$ – многочлен степени n , тогда рассматриваемый процесс приближения называется *полиномиальным интерполированием*, или *процессом построения интерполяционного многочлена*.

При интерполяции кривой $f(t)$ многочленами высоких степеней полиномиальная функция $\varphi(t)$ может значительно отклоняться от моделируемой кривой по мере приближения к границам интер-

вала вычислений $[t_0; t_n]$. Рост ошибки интерполяции с увеличением порядка полинома (ростом числа точек) не является недостатком алгоритма или следствием естественных погрешностей при операциях с вещественными числами. Это фундаментальное свойство интерполяционного полинома – проходя через все заданные точки, он будет сильно осциллировать в интервалах между ними. Последнее объясняется тем, что *многочлен n -й степени имеет $n - 1$ стационарную точку – точки экстремумов (минимумов или максимумов) или перегибов*. Чем выше степень многочлена, тем больше количество экстремумов и точек перегибов. Поэтому при интерполяции целесообразно выбирать многочлен с невысокими степенями, например многочлен третьей степени [3-5].

Пусть задано $n + 1$ значение функции действительного переменного $x = f(t)$ в $n + 1$ различных точках t_0, t_1, \dots, t_n , называемых *узлами интерполяции*: $x_0 = f(t_0)$, $x_1 = f(t_1)$, \dots , $x_n = f(t_n)$.

Требуется построить *интерполант* – многочлен степени не выше n : $\varphi(t) = P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$, значения которого в узлах интерполирования были бы равны значениям функции $f(t)$ в тех же узлах, т.е. должны выполняться равенства:

[illegible]

Из уравнений системы (1.1) надо определить неизвестные a_0, a_1, \dots, a_n .

Известно (теорема Кронекера – Капелли), что если ранг матрицы системы равенств (1.1) равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. По нашему предположению, все x_i ($i = \overline{0, n}$) различны. В этом случае определитель системы уравнений (1.1)

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{vmatrix},$$

называемый *определителем Вандермонда*, отличен от нуля и система равенств (1.1) имеет единственное решение, т.е. коэффициенты многочлена $P_n(t)$ могут быть найдены и причем единственным образом. Следовательно, рассматриваемая задача может быть сформулирована и так: найти многочлен $P_n(t)$, график которого проходил бы через $(n+1)$ заданные точки $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$, лежащие на графике функции $f(t)$.

Самым простым видом интерполяции является *линейная интерполяция*, при которой два соседних узла интерполяции соединяются друг с другом прямой линией (рис. 1.1), а промежуточные точки определяются из уравнения этой прямой.

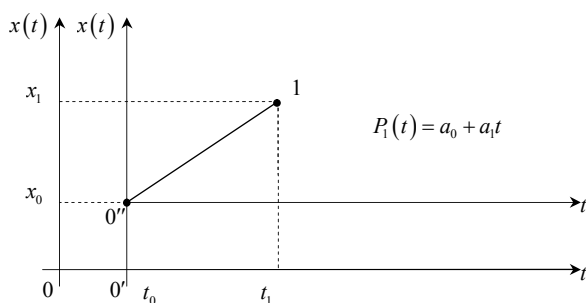


Рис. 1.1

В этом случае согласно системе равенств (1.1) можно записать матрично-векторное уравнение вида

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_x, \quad (1.2)$$

где $t_{00} = 1$, $t_{01} = t_0$, $t_{10} = 1$, $t_{11} = t_1$. Первая цифра двузначного индекса при t означает номер момента времени, для которого представлено значение x_i ($i = \overline{0, n}$), а вторая – показывает степень соответствующего момента времени.

В общем случае решение матрично-векторного уравнения $Ta = x$, развернутая форма записи которого имеет вид

$$\begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & \dots & t_{0n} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

относительно коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n может быть получено по правилу Крамера [4]:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} T_{00} & T_{10} & \dots & T_{n0} \\ T_{01} & T_{11} & \dots & T_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{0n} & T_{1n} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

или

$$a_i = \frac{1}{\det T} (T_{0i}x_0 + T_{1i}x_1 + \dots + T_{ni}x_n) = \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} t_{00} & \dots & x_0 & \dots & t_{0n} \\ t_{10} & \dots & x_1 & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n0} & \dots & x_n & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i}{D}, \quad (1.4)$$

где определитель D_i , стоящий в числителе, получается из определителя $D = \det T =$

$$\begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & \dots & t_{0n} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix}, \text{ заменой } i\text{-го столбца на стол-}$$

бец x ; T_{ik} – алгебраические дополнения к элементам t_{ik} :

$$T_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{0,k-1} & t_{0,k+1} & \dots & t_{0n} \\ t_{10} & t_{11} & t_{1,k-1} & t_{1,k+1} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{i-1,0} & t_{i-1,1} & \dots & \dots & \dots & t_{i-1,n} \\ t_{i+1,0} & t_{i+1,1} & \dots & \dots & \dots & t_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n,0} & t_{n,1} & t_{n,k-1} & t_{n,k+1} & \dots & t_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, для $n \times n$ системы линейных уравнений $Ta = x$ такой, что $D = \det T \neq 0$, получим единственное решение $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i = D_i / D$, $(i = \overline{0, n})$.

Решение матрично-векторного уравнения (1.2) по формуле (1.4) позволяет найти коэффициенты a_0 и a_1 . Так как

$$a_i = \frac{1}{\det T} (T_{0i}x_0 + T_{1i}x_1), \quad (i = 0, 1),$$

где $\det T = t_{00}t_{11} - t_{01}t_{10} = t_1 - t_0$, $T_{00} = t_{11} = t_1$, $T_{10} = -t_{01} = -t_0$, $T_{01} = -t_{10} = -1$, $T_{11} = t_{00} = 1$, тогда

$$a_0 = \frac{1}{\det T} (T_{00}x_0 + T_{10}x_1) = \frac{t_1x_0 - t_0x_1}{t_1 - t_0},$$

$$a_1 = \frac{1}{\det T} (T_{01}x_0 + T_{11}x_1) = \frac{-x_0 + x_1}{t_1 - t_0} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$

Следовательно, по известной информации о x_0 и x_1 для моментов времени t_0 и t_1 могут быть найдены коэффициенты линейного многочлена $P_1(t) = a_0 + a_1t$:

$$a_0 = \frac{t_1x_0 - t_0x_1}{t_1 - t_0}, \quad a_1 = \frac{-x_0 + x_1}{t_1 - t_0}. \quad (1.5)$$

При этом величина рассматриваемого интервала времени $t_1 - t_0$ может быть любой.

Для *квадратичной интерполяции* (рис. 1.2) имеем систему равенств вида

$$\begin{aligned} a_0 + t_0a_1 + t_0^2a_2 &= x_0, \\ a_0 + t_1a_1 + t_1^2a_2 &= x_1, \\ a_0 + t_2a_1 + t_2^2a_2 &= x_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

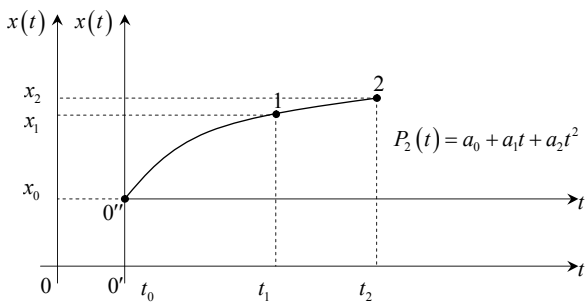


Рис. 1.2

Или в матрично-векторной форме записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Решение матрично-векторного уравнения (1.7) относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2 находим по правилу Крамера, используя для этих целей запись уравнения (1.7) в виде матрично-векторного уравнения (1.3) и формулу для его решения (1.4). При этом решение по формуле (1.4) может быть найдено двумя способами.

1-й способ заключается в реализации первой "независимой части" формулы (1.4):

$$1) \quad \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где $t_{00}=1$; $t_{01}=t_0$; $t_{02}=t_0^2$; $t_{10}=1$; $t_{11}=t_1$; $t_{12}=t_1^2$; $t_{20}=1$; $t_{21}=t_2$; $t_{22}=t_2^2$;

$$\begin{aligned} 2) \quad D = \det T &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{00}t_{11}t_{22} + t_{01}t_{12}t_{20} + \\ &+ t_{02}t_{10}t_{21} - t_{02}t_{11}t_{20} - t_{01}t_{10}t_{22} - t_{00}t_{12}t_{21} = \\ &= 1 \cdot t_1 t_2^2 + t_0 t_1^2 \cdot 1 + t_0^2 \cdot 1 \cdot t_2 - t_0^2 t_1 \cdot 1 - t_0 \cdot 1 \cdot t_2^2 - 1 \cdot t_1^2 t_2 = \\ &= t_2^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_2) + t_0^2 (t_2 - t_1); \end{aligned}$$

$$3) \quad a_0 = \frac{1}{\det T} (T_{00}x_0 + T_{10}x_1 + T_{20}x_2),$$

$$\text{где } T_{00} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = t_1 t_2^2 - t_1^2 t_2 = t_1 t_2 (t_2 - t_1),$$

$$T_{01} = - \begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = -(t_{01}t_{22} - t_{02}t_{21}) = -(t_0 t_2^2 - t_0^2 t_2) = -t_0 t_2^2 + t_0^2 t_2 = t_0 t_2 (t_0 - t_2),$$

$$T_{20} = \begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} \\ t_{11} & t_{12} \end{vmatrix} = t_{01}t_{12} - t_{02}t_{11} = t_0 t_1^2 - t_0^2 t_1 = t_0 t_1 (t_1 - t_0),$$

$$a_0 = \frac{t_1 t_2 (t_2 - t_1) x_0 + t_0 t_2 (t_0 - t_2) x_1 + t_0 t_1 (t_1 - t_0) x_2}{t_2^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_2) + t_0^2 (t_2 - t_1)}; \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
4) \quad a_1 &= \frac{1}{\det T} (T_{01}x_0 + T_{11}x_1 + T_{21}x_2), \\
\text{где } T_{01} &= - \begin{vmatrix} t_{10} & t_{12} \\ t_{20} & t_{22} \end{vmatrix} = -(t_{10}t_{22} - t_{12}t_{20}) = -(1 \cdot t_2^2 - t_1^2 \cdot 1) = t_1^2 - t_2^2, \\
T_{11} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} \\ t_{20} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{00}t_{22} - t_{02}t_{20} = 1 \cdot t_2^2 - t_0^2 \cdot 1 = t_2^2 - t_0^2, \\
T_{21} &= - \begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} \\ t_{10} & t_{12} \end{vmatrix} = -(t_{00}t_{12} - t_{02}t_{10}) = -(1 \cdot t_1^2 - t_0^2 \cdot 1) = t_0^2 - t_1^2, \\
a_1 &= \frac{(t_1^2 - t_2^2)x_0 + (t_2^2 - t_0^2)x_1 + (t_0^2 - t_1^2)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}, \tag{1.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad a_2 &= \frac{1}{\det T} (T_{02}x_0 + T_{12}x_1 + T_{22}x_2), \\
\text{где } T_{02} &= \begin{vmatrix} t_{10} & t_{11} \\ t_{20} & t_{21} \end{vmatrix} = t_{10}t_{21} - t_{11}t_{20} = 1 \cdot t_2 - t_1 \cdot 1 = t_2 - t_1, \\
T_{12} &= - \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{20} & t_{21} \end{vmatrix} = -(t_{00}t_{21} - t_{01}t_{20}) = -(1 \cdot t_2 - t_0 \cdot 1) = t_0 - t_2, \\
T_{22} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{vmatrix} = t_{00}t_{11} - t_{01}t_{10} = 1 \cdot t_1 - t_0 \cdot 1 = t_1 - t_0, \\
a_2 &= \frac{(t_2 - t_1)x_0 + (t_0 - t_2)x_1 + (t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}. \tag{1.10}
\end{aligned}$$

2-й способ: для нахождения коэффициентов используется вторая "независимая часть" формулы (1.4):

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} x_0 & t_{01} & t_{02} \\ x_1 & t_{11} & t_{12} \\ x_2 & t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det T} (t_{11}t_{22}x_0 + t_{01}t_{12}x_2 + t_{02}t_{21}x_1 - t_{02}t_{11}x_2 - t_{01}t_{22}x_1 - t_{12}t_{21}x_0) = \\
&= \frac{1}{\det T} [(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})x_0 + (t_{02}t_{21} - t_{01}t_{22})x_1 + (t_{01}t_{12} - t_{02}t_{11})x_2] = \\
&= \frac{(t_1t_2^2 - t_1^2t_2)x_0 + (t_0^2t_2 - t_0t_2^2)x_1 + (t_0t_1^2 - t_0^2t_1)x_2}{\det T} = \\
&= \frac{t_1t_2(t_2 - t_1)x_0 + t_0t_2(t_0 - t_2)x_1 + t_0t_1(t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} t_{00} & x_0 & t_{02} \\ t_{10} & x_1 & t_{12} \\ t_{20} & x_2 & t_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det T} (t_{00}t_{22}x_1 + t_{12}t_{20}x_0 + t_{02}t_{10}x_2 - \\
&\quad - t_{02}t_{20}x_1 - t_{10}t_{22}x_0 - t_{00}t_{12}x_2) = \\
&= \frac{1}{\det T} [(t_{12}t_{20} - t_{10}t_{22})x_0 + (t_{00}t_{22} - t_{02}t_{20})x_1 + (t_{02}t_{10} - t_{00}t_{12})x_2] = \\
&= \frac{(t_1^2 \cdot 1 - 1 \cdot t_2^2)x_0 + (1 \cdot t_2^2 - t_0^2 \cdot 1)x_1 + (t_0^2 \cdot 1 - 1 \cdot t_1^2)x_2}{\det T} = \\
&= \frac{(t_1^2 - t_2^2)x_0 + (t_2^2 - t_0^2)x_1 + (t_0^2 - t_1^2)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}, \\
a_2 &= \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & x_0 \\ t_{10} & t_{11} & x_1 \\ t_{20} & t_{21} & x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\det T} (t_{00}t_{11}x_2 + t_{01}t_{20}x_1 + t_{10}t_{21}x_0 - \\
&\quad - t_{11}t_{20}x_0 - t_{01}t_{10}x_2 - t_{00}t_{21}x_1) = \\
&= \frac{1}{\det T} [(t_{10}t_{21} - t_{11}t_{20})x_0 + (t_{01}t_{20} - t_{00}t_{21})x_1 + (t_{00}t_{11} - t_{01}t_{10})x_2] = \\
&= \frac{(1 \cdot t_2 - t_1 \cdot 1)x_0 + (t_0 \cdot 1 - 1 \cdot t_2)x_1 + (1 \cdot t_1 - t_0 \cdot 1)x_2}{\det T} = \\
&= \frac{(t_2 - t_1)x_0 + (t_0 - t_2)x_1 + (t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}.
\end{aligned}$$

Результаты, полученные обоими способами, совпадают. При этом видно, что применение 2-го способа позволяет найти коэффициенты a_i ($i = 0, 1, 2$) за меньшее количество необходимых для этого математических операций, но при этом приходится работать с матрицами большего размера, чем в случае решения системы уравнений по 1-му способу. Поэтому для *кубичной интерполяции* (рис. 1.3) используем 1-й способ.

Для интерполяционного многочлена $P_3(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ имеем: $P_3(t) = x_0$ при $t = t_0$, $P_3(t) = x_1$ при $t = t_1$, $P_3(t) = x_2$ при $t = t_2$, $P_3(t) = x_3$ при $t = t_3$. Следовательно, можно записать систему равенств вида

$$\begin{aligned}
t_0^0 a_0 + t_0^1 a_1 + t_0^2 a_2 + t_0^3 a_3 &= x_0, \\
t_1^0 a_0 + t_1^1 a_1 + t_1^2 a_2 + t_1^3 a_3 &= x_1, \\
t_2^0 a_0 + t_2^1 a_1 + t_2^2 a_2 + t_2^3 a_3 &= x_2, \\
t_3^0 a_0 + t_3^1 a_1 + t_3^2 a_2 + t_3^3 a_3 &= x_3
\end{aligned}$$

или

$$\begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & t_{03} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

где $t_{00} = 1$; $t_{01} = t_0$; $t_{02} = t_0^2$; $t_{03} = t_0^3$; $t_{10} = 1$; $t_{11} = t_1$; $t_{12} = t_1^2$; $t_{13} = t_1^3$; $t_{20} = 1$; $t_{21} = t_2$; $t_{22} = t_2^2$; $t_{23} = t_2^3$; $t_{30} = 1$; $t_{31} = t_3$; $t_{32} = t_3^2$; $t_{33} = t_3^3$,
решение которой выполним по формуле (1.4).

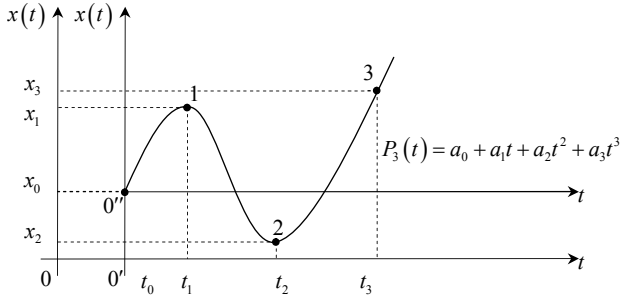


Рис. 1.3

Так как $a_0 = \frac{1}{\det T} (T_{00}x_0 + T_{10}x_1 + T_{20}x_2 + T_{30}x_3)$, то находим

$$\begin{aligned}
\det T &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & t_{03} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \\
&= t_{00} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} - t_{01} \begin{vmatrix} t_{10} & t_{12} & t_{13} \\ t_{20} & t_{22} & t_{23} \\ t_{30} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + t_{02} \begin{vmatrix} t_{10} & t_{11} & t_{13} \\ t_{20} & t_{21} & t_{23} \\ t_{30} & t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} - t_{03} \begin{vmatrix} t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t_{00} (t_{11}t_{22}t_{33} + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{13}t_{21}t_{32} - t_{13}t_{22}t_{31} - t_{12}t_{21}t_{33} - t_{11}t_{23}t_{32}) - \\
&- t_{01} (t_{10}t_{22}t_{33} + t_{12}t_{23}t_{30} + t_{13}t_{20}t_{32} - t_{13}t_{22}t_{30} - t_{12}t_{20}t_{33} - t_{10}t_{23}t_{32}) + \\
&+ t_{02} (t_{10}t_{21}t_{33} + t_{11}t_{23}t_{30} + t_{13}t_{20}t_{31} - t_{13}t_{21}t_{30} - t_{11}t_{20}t_{33} - t_{10}t_{23}t_{31}) - \\
&- t_{03} (t_{10}t_{21}t_{32} + t_{11}t_{22}t_{30} + t_{12}t_{20}t_{31} - t_{12}t_{21}t_{30} - t_{11}t_{20}t_{32} - t_{10}t_{22}t_{31}) = \\
&= t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right] - \\
&- t_0 \left[t_3^3 (t_2^2 - t_1^2) + t_2^3 (t_1^2 - t_3^2) + t_1^3 (t_3^2 - t_2^2) \right] + \\
&+ t_0^2 \left[t_3^3 (t_2 - t_1) + t_2^3 (t_1 - t_3) + t_1^3 (t_3 - t_2) \right] - \\
&- t_0^3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22}t_{33} + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{13}t_{21}t_{32} - t_{13}t_{22}t_{31} - \\
&- t_{12}t_{21}t_{33} - t_{11}t_{23}t_{32} = t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right], \\
T_{10} &= - \begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} & t_{03} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = - (t_{01}t_{22}t_{33} + t_{02}t_{23}t_{31} + t_{03}t_{21}t_{32} - t_{03}t_{22}t_{31} - \\
&- t_{02}t_{21}t_{33} - t_{01}t_{23}t_{32}) = - t_0 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_0) + t_2^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_2) \right], \\
T_{20} &= \begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} & t_{03} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = t_{01}t_{12}t_{33} + t_{02}t_{13}t_{31} + t_{03}t_{11}t_{32} - t_{03}t_{12}t_{31} - \\
&- t_{02}t_{11}t_{33} - t_{01}t_{13}t_{32} = t_0 t_1 t_3 \left[t_3^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_1) \right], \\
T_{30} &= - \begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} & t_{03} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{vmatrix} = - (t_{01}t_{12}t_{23} + t_{02}t_{13}t_{21} + t_{03}t_{11}t_{22} - t_{03}t_{12}t_{21} - \\
&- t_{02}t_{11}t_{23} - t_{01}t_{13}t_{22}) = - t_0 t_1 t_2 \left[t_2^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_2) + t_0^2 (t_2 - t_1) \right].
\end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент a_0 интерполяционного многочлена $P_3(t)$ можно определить по формуле

$$a_0 = \frac{t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right] x_0 - t_0 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_0) + t_2^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_2) \right] x_1 + t_0 t_1 t_3 \left[t_3^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_1) \right] x_2 - t_0 t_1 t_2 \left[t_2^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_2) + t_0^2 (t_2 - t_1) \right] x_3}{t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right] - t_0 \left[t_3^3 (t_2^2 - t_1^2) + t_2^3 (t_1^2 - t_3^2) + t_1^3 (t_3^2 - t_2^2) \right] + t_0^2 \left[t_3^3 (t_2 - t_1) + t_2^3 (t_1 - t_3) + t_1^3 (t_3 - t_2) \right] + t_0^3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right]} \cdot \quad (1.11)$$

Для определения коэффициента

$$a_1 = \frac{1}{\det T} (T_{01} x_0 + T_{11} x_1 + T_{21} x_2 + T_{31} x_3),$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} T_{01} &= - \begin{vmatrix} t_{10} & t_{12} & t_{13} \\ t_{20} & t_{22} & t_{23} \\ t_{30} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = - (t_{10} t_{22} t_{33} + t_{12} t_{23} t_{30} + t_{13} t_{20} t_{32} - t_{13} t_{22} t_{30} - \\ &\quad - t_{12} t_{20} t_{33} - t_{10} t_{23} t_{32}) = - \left[t_3^2 (t_2^2 - t_1^2) + t_2^3 (t_1^2 - t_3^2) + t_1^3 (t_3^2 - t_2^2) \right], \\ T_{11} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} & t_{03} \\ t_{20} & t_{22} & t_{23} \\ t_{30} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = t_{00} t_{22} t_{33} + t_{02} t_{23} t_{30} + t_{03} t_{20} t_{32} - t_{03} t_{22} t_{30} - \\ &\quad - t_{02} t_{20} t_{33} - t_{00} t_{23} t_{32} = t_3^2 (t_2^2 - t_0^2) + t_2^3 (t_0^2 - t_3^2) + t_0^3 (t_3^2 - t_2^2), \\ T_{21} &= - \begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} & t_{03} \\ t_{10} & t_{12} & t_{13} \\ t_{30} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = - (t_{00} t_{12} t_{33} + t_{02} t_{13} t_{30} + t_{03} t_{10} t_{32} - t_{03} t_{12} t_{30} - \\ &\quad - t_{02} t_{10} t_{33} - t_{00} t_{13} t_{32}) = - \left[t_3^3 (t_1^2 - t_0^2) + t_1^3 (t_0^2 - t_3^2) + t_0^3 (t_3^2 - t_1^2) \right], \\ T_{31} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} & t_{03} \\ t_{10} & t_{12} & t_{13} \\ t_{20} & t_{22} & t_{23} \end{vmatrix} = t_{00} t_{12} t_{23} + t_{02} t_{13} t_{20} + t_{03} t_{10} t_{22} - t_{03} t_{12} t_{20} - \\ &\quad - t_{02} t_{10} t_{23} - t_{00} t_{13} t_{22} = t_2^3 (t_1^2 - t_0^2) + t_1^3 (t_0^2 - t_2^2) + t_0^3 (t_2^2 - t_1^2), \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{\begin{aligned} & -\left[t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2)\right]x_0 + \\ & +\left[t_3^3(t_2^2 - t_0^2) + t_2^3(t_0^2 - t_3^2) + t_0^3(t_3^2 - t_2^2)\right]x_1 - \\ & -\left[t_3^3(t_1^2 - t_0^2) + t_1^3(t_0^2 - t_3^2) + t_0^3(t_3^2 - t_1^2)\right]x_2 + \\ & +\left[t_2^3(t_1^2 - t_0^2) + t_1^3(t_0^2 - t_2^2) + t_0^3(t_2^2 - t_1^2)\right]x_3 \\ & -t_1t_2t_3\left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)\right] - \\ & -t_0\left[t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2)\right] + \\ & +t_0^2\left[t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2)\right] - \\ & -t_0^3\left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)\right] \end{aligned}}{t_1t_2t_3\left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)\right] - t_0\left[t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2)\right] + t_0^2\left[t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2)\right] - t_0^3\left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)\right]}. \quad (1.12)$$

Коэффициент $a_2 = \frac{1}{\det T}(T_{02}x_0 + T_{12}x_1 + T_{22}x_2 + T_{32}x_3)$, определим,

используя алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} T_{02} &= \begin{vmatrix} t_{10} & t_{11} & t_{13} \\ t_{20} & t_{21} & t_{23} \\ t_{30} & t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} = t_{10}t_{21}t_{33} + t_{11}t_{23}t_{30} + t_{13}t_{20}t_{31} - t_{13}t_{21}t_{30} - \\ & -t_{11}t_{20}t_{33} - t_{10}t_{23}t_{31} = t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2), \\ T_{12} &= -\begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{03} \\ t_{20} & t_{21} & t_{23} \\ t_{30} & t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} = -(t_{00}t_{21}t_{33} + t_{01}t_{23}t_{30} + t_{03}t_{20}t_{31} - t_{03}t_{21}t_{30} - \\ & -t_{01}t_{20}t_{33} - t_{00}t_{23}t_{31}) = -\left[t_3^3(t_2 - t_0) + t_2^3(t_0 - t_3) + t_0^3(t_3 - t_2)\right], \\ T_{22} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{03} \\ t_{10} & t_{11} & t_{13} \\ t_{30} & t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} = t_{00}t_{11}t_{33} + t_{01}t_{13}t_{30} + t_{03}t_{10}t_{31} - t_{03}t_{11}t_{30} - \\ & -t_{01}t_{10}t_{33} - t_{00}t_{13}t_{31} = t_3^3(t_1 - t_0) + t_1^3(t_0 - t_3) + t_0^3(t_3 - t_1), \\ T_{32} &= -\begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{03} \\ t_{10} & t_{11} & t_{13} \\ t_{20} & t_{21} & t_{23} \end{vmatrix} = -(t_{00}t_{11}t_{23} + t_{01}t_{13}t_{20} + t_{03}t_{10}t_{21} - t_{03}t_{11}t_{20} - \\ & -t_{01}t_{10}t_{23} - t_{00}t_{13}t_{21}) = -\left[t_2^3(t_1 - t_0) + t_1^3(t_0 - t_2) + t_0^3(t_2 - t_1)\right], \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{\begin{aligned} & \left[t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2) \right] x_0 - \\ & - \left[t_3^3(t_2 - t_0) + t_2^3(t_0 - t_3) + t_0^3(t_3 - t_2) \right] x_1 + \\ & + \left[t_3^3(t_1 - t_0) + t_1^3(t_0 - t_3) + t_0^3(t_3 - t_1) \right] x_2 - \\ & - \left[t_2^3(t_1 - t_0) + t_1^3(t_0 - t_2) + t_0^3(t_2 - t_1) \right] x_3 \end{aligned}}{t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right] - \\ - t_0 \left[t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2) \right] + \\ + t_0^2 \left[t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2) \right] - \\ - t_0^3 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right]}. \quad (1.13)$$

Для определения коэффициента

$$a_3 = \frac{1}{\det T} (T_{03}x_0 + T_{13}x_1 + T_{23}x_2 + T_{33}x_3),$$

находим

$$\begin{aligned} T_{03} &= - \begin{vmatrix} t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} = - (t_{10}t_{21}t_{32} + t_{11}t_{22}t_{30} + t_{12}t_{20}t_{31} - t_{12}t_{21}t_{30} - \\ & - t_{11}t_{20}t_{32} - t_{10}t_{22}t_{31}) = - \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right], \\ T_{13} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} = t_{00}t_{21}t_{32} + t_{01}t_{22}t_{30} + t_{02}t_{20}t_{31} - t_{02}t_{21}t_{30} - \\ & - t_{01}t_{20}t_{32} - t_{00}t_{22}t_{31} = t_3^2(t_2 - t_0) + t_2^2(t_0 - t_3) + t_0^2(t_3 - t_2), \\ T_{23} &= - \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} = - (t_{00}t_{11}t_{32} + t_{01}t_{12}t_{30} + t_{02}t_{10}t_{31} - t_{02}t_{11}t_{30} - \\ & - t_{01}t_{10}t_{32} - t_{00}t_{12}t_{31}) = - \left[t_3^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_3) + t_0^2(t_3 - t_1) \right], \\ T_{33} &= \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{00}t_{11}t_{22} + t_{01}t_{12}t_{20} + t_{02}t_{10}t_{21} - t_{02}t_{11}t_{20} - \\ & - t_{01}t_{10}t_{22} - t_{00}t_{12}t_{21} = t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{\begin{aligned} & -[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)]x_0 + \\ & + [t_3^2(t_2 - t_0) + t_2^2(t_0 - t_3) + t_0^2(t_3 - t_2)]x_1 - \\ & - [t_3^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_3) + t_0^2(t_3 - t_1)]x_2 + \\ & + [t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)]x_3 \\ & - t_1 t_2 t_3 [t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)] - \\ & - t_0 [t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2)] + \\ & + t_0^2 [t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2)] - \\ & - t_0^3 [t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)] \end{aligned}}{t_1 t_2 t_3 [t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)] - t_0 [t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2)] + t_0^2 [t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2)] - t_0^3 [t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)]}. \quad (1.14)$$

Подстановка полученных коэффициентов в соответствующие формулы для линейного, квадратичного и кубического интерполяционных многочленов дает возможность получить развернутую форму записи интерполантов. Так, для *линейного многочлена* $P_1(t) = a_0 + a_1 t$, имеем

$$P_1(t) = \frac{t_1 x_0 - t_0 x_1}{t_1 - t_0} + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} t = \frac{(t_1 - t)x_0 + (t - t_0)x_1}{t_1 - t_0} = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1, \quad (1.15)$$

где $\Phi_0 = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}$, $\Phi_1 = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$ – интерполяционные функции для ли-

нейного интерполирования на временном отрезке $t_1 - t_0$, каждая из которых снабжена нижним индексом для обозначения узла, к которому она относится. Функция Φ_0 в нулевом узле равна единице, в первом узле – нулю. Функция Φ_1 в нулевом узле равна нулю, в первом узле – единице.

Квадратичный многочлен $P_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ может быть представлен в виде

$$P_2(t) = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2, \quad (1.16)$$

где $\Phi_0 = \frac{t_1 t_2 - (t_1 + t_2)t + t^2}{t_0^2 - \frac{(t_2 - t_0)}{(t_2 - t_1)}t_1^2 + \frac{(t_1 - t_0)}{(t_2 - t_1)}t_2^2} = \frac{t_1 t_2 - (t_1 + t_2)t + t^2}{t_0 t_1 \frac{(t_1 - t_0)}{(t_2 - t_1)} - t_0 t_2 \frac{(t_2 - t_0)}{(t_2 - t_1)} + t_1 t_2};$

$$\Phi_1 = \frac{t_0 t_2 - (t_0 + t_2)t + t^2}{-\frac{(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_0)}t_0^2 + t_1^2 - \frac{(t_1 - t_0)}{(t_2 - t_0)}t_2^2} = \frac{t_0 t_2 - (t_0 + t_2)t + t^2}{-t_0 t_1 \frac{(t_1 - t_0)}{(t_2 - t_0)} + t_0 t_2 - t_1 t_2 \frac{(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_0)}};$$

$$\Phi_2 = \frac{t_0 t_1 - (t_0 + t_1)t + t^2}{\left(\frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_0}\right)t_0^2 - \left(\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0}\right)t_1^2 + t_2^2} = \frac{t_0 t_1 - (t_0 + t_1)t + t^2}{t_0 t_1 - t_0 t_2 \frac{(t_2 - t_0)}{(t_1 - t_0)} + t_1 t_2 \frac{(t_2 - t_1)}{(t_1 - t_0)}}.$$

Для кубического многочлена $P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ эквивалентной формой представления является следующая:

$$P_3(t) = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \Phi_3 x_3, \quad (1.17)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right] - t \left[t_3^3 (t_2^2 - t_1^2) + t_2^3 (t_1^2 - t_3^2) + t_1^3 (t_3^2 - t_2^2) \right] + t^2 \left[t_3^3 (t_2 - t_1) + t_2^3 (t_1 - t_3) + t_1^3 (t_3 - t_2) \right] - t^3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right]}{\det T};$$

$$\Phi_1 = \frac{-t_0 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_0) + t_2^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_2) \right] + t \left[t_3^3 (t_2^2 - t_0^2) + t_2^3 (t_0^2 - t_3^2) + t_0^3 (t_3^2 - t_2^2) \right] - t^2 \left[t_3^3 (t_2 - t_0) + t_2^3 (t_0 - t_3) + t_0^3 (t_3 - t_2) \right] + t^3 \left[t_3^2 (t_2 - t_0) + t_2^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_2) \right]}{\det T};$$

$$\Phi_2 = \frac{t_0 t_1 t_3 \left[t_3^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_1) \right] - t \left[t_3^3 (t_1^2 - t_0^2) + t_1^3 (t_0^2 - t_3^2) + t_0^3 (t_3^2 - t_1^2) \right] + t^2 \left[t_3^3 (t_1 - t_0) + t_1^3 (t_0 - t_3) + t_0^3 (t_3 - t_1) \right] - t^3 \left[t_3^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_3) + t_0^2 (t_3 - t_1) \right]}{\det T};$$

$$\Phi_3 = \frac{-t_0 t_1 t_2 \left[t_2^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_2) + t_0^2 (t_2 - t_1) \right] - t \left[t_2^3 (t_1^2 - t_0^2) + t_1^3 (t_0^2 - t_2^2) + t_0^3 (t_2^2 - t_1^2) \right] + t^2 \left[t_2^3 (t_1 - t_0) + t_1^3 (t_0 - t_2) + t_0^3 (t_2 - t_1) \right] - t^3 \left[t_2^2 (t_1 - t_0) + t_1^2 (t_0 - t_2) + t_0^2 (t_2 - t_1) \right]}{\det T}$$

$$\begin{aligned} \text{и } \det T = & t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right] - \\ & - t_0 \left[t_3^3 (t_2^2 - t_1^2) + t_2^3 (t_1^2 - t_3^2) + t_1^3 (t_3^2 - t_2^2) \right] + \\ & + t_0^2 \left[t_3^3 (t_2 - t_1) + t_2^3 (t_1 - t_3) + t_1^3 (t_3 - t_2) \right] - \\ & - t_0^3 \left[t_3^2 (t_2 - t_1) + t_2^2 (t_1 - t_3) + t_1^2 (t_3 - t_2) \right]. \end{aligned}$$

Интерполяционные уравнения (1.15), (1.16) и (1.17) должны моделировать и постоянные значения функции $x(t)$. Для случая линейной интерполяции $x_0 = x_1 = C$, тогда

$$P_1(t) = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 = (\Phi_0 + \Phi_1) C = \left(\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) C = \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t_0} C = C.$$

Нетрудно убедиться, что при $x_0 = x_1 = x_2 = (x_3) = C$ формулы (1.16) и (1.17), также дают значение постоянной величины C .

В общем случае выражение для $x(t)$ записывается как

$$x(t) = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \dots + \Phi_n x_n,$$

откуда при $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_n = C$ имеем

$$x(t) = (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n) C.$$

Следовательно, если моделируется постоянная величина C , то сумма значений интерполяционных функций должна равняться единице в каждой внутренней точке рассматриваемого промежутка времени, т.е. должно выполняться равенство $\sum_{j=0}^n \Phi_j = 1$. В противном

случае интерполяционный многочлен $P_n(t)$ не будет давать постоянных значений даже тогда, когда они должны быть.

Формулы (1.15), (1.16) и (1.17) позволяют выполнять соответственно линейную, квадратичную и кубическую интерполяцию предполагаемой кривой, заданной точками $(t_0, x_0), (t_1, x_1); (t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2); (t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), (t_3, x_3)$; в координатах $(x_0 t)$. Если приближение выполняется в координатах $(x_0' t)$, тогда $t_0 = 0$ и интерполяционные функции в формулах (1.15), (1.16) и (1.17) принимают вид:

а) для линейной интерполяции

$$\boxed{\Phi_0 = 1 - \frac{t}{t_1}, \quad \Phi_1 = \frac{t}{t_1};} \quad (1.18)$$

б) для квадратичной интерполяции

$$\Phi_0 = 1 - \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) t + \frac{1}{t_1 t_2} t^2, \quad \Phi_1 = \frac{(t_2 - t)}{t_1(t_2 - t_1)} t, \quad \Phi_2 = -\frac{(t_1 - t)}{t_2(t_2 - t_1)} t; \quad (1.19)$$

в) для кубической интерполяции

$$\begin{aligned} \Phi_0 = 1 - & \frac{\left[t_3^3(t_2^2 - t_1^2) + t_2^3(t_1^2 - t_3^2) + t_1^3(t_3^2 - t_2^2) \right]}{t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right]} t + \\ & + \frac{\left[t_3^3(t_2 - t_1) + t_2^3(t_1 - t_3) + t_1^3(t_3 - t_2) \right]}{t_1 t_2 t_3 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right]} t^2 - \frac{1}{t_1 t_2 t_3} t^3, \\ \Phi_1 = & \frac{(t_3 - t_2) \left[t_2 t_3 - (t_2 + t_3) t + t^2 \right]}{t_1 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right]} t, \\ \Phi_2 = & -\frac{(t_3 - t_1) \left[t_1 t_3 - (t_1 + t_3) t + t^2 \right]}{t_2 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right]} t, \\ \Phi_3 = & \frac{(t_2 - t_1) \left[t_1 t_2 - (t_1 + t_2) t + t^2 \right]}{t_3 \left[t_3^2(t_2 - t_1) + t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2) \right]} t. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Если интерполирование кривой выполняется в координатах $(x_0''t)$, тогда $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ и интерполирующие многочлены принимают вид:

- 1) $P_1(t) = \Phi_1 x_1 = \frac{t}{t_1} x_1$;
- 2) $P_2(t) = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2$, где Φ_1 и Φ_2 находятся по формулам (1.19);
- 3) $P_3(t) = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \Phi_3 x_3$, где Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 определяются по формулам (1.20).

Если кривая задана равномерно расположенными точками, т.е. с одинаковым временным шагом $h = t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = t_1 - t_0$, тогда интерполанты (1.15), (1.16) и (1.17) могут быть представлены в виде:

а) для линейной интерполяции

$$\Phi_0 = \frac{t_1 - t}{h}, \quad \Phi_1 = \frac{t - t_0}{h}; \quad (1.21)$$

б) для квадратичной интерполяции

$$\Phi_0 = \frac{t_1 t_2 - (t_1 + t_2)t + t^2}{2h^2}, \quad \Phi_1 = -\frac{t_0 t_2 - (t_0 + t_2)t + t^2}{h^2},$$

$$\Phi_2 = \frac{t_0 t_1 - (t_0 + t_1)t + t^2}{2h^2};$$
(1.22)

в) для кубической интерполяции

$$\Phi_0 = \frac{t_1 t_2 t_3 - (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)t + (t_1 + t_2 + t_3)t^2 - t^3}{6h^3},$$

$$\Phi_1 = -\frac{t_0 t_2 t_3 - (t_0 t_2 + t_0 t_3 + t_2 t_3)t + (t_0 + t_2 + t_3)t^2 - t^3}{2h^3},$$

$$\Phi_2 = \frac{t_0 t_1 t_3 - (t_0 t_1 + t_0 t_3 + t_1 t_3)t + (t_0 + t_1 + t_3)t^2 - t^3}{2h^3},$$

$$\Phi_3 = -\frac{t_0 t_1 t_2 - (t_0 t_1 + t_0 t_2 + t_1 t_2)t + (t_0 + t_1 + t_2)t^2 - t^3}{6h^3}.$$
(1.23)

В свою очередь, при $h = \text{const}$ коэффициенты интерполяционных многочленов, представленные формулами (1.5) (линейная интерполяция), (1.8), (1.9) и (1.10) (квадратичная интерполяция), (1.11), (1.12), (1.13) и (1.14) (кубическая интерполяция), могут быть приведены к виду:

а) для линейной интерполяции

$$a_0 = \frac{t_1}{h} x_0 - \frac{t_0}{h} x_1, \quad a_1 = -\frac{1}{h} x_0 + \frac{1}{h} x_1;$$
(1.24)

б) для квадратичной интерполяции

$$a_0 = \frac{t_1 t_2 x_0 - 2t_0 t_2 x_1 + t_0 t_1 x_2}{2h^2},$$

$$a_1 = -\frac{(t_1 + t_2)x_0 - 2(t_0 + t_2)x_1 + (t_0 + t_1)x_2}{2h^2}, \quad a_2 = \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{2h^2};$$
(1.25)

в) для кубической интерполяции

$$a_0 = \frac{t_1 t_2 t_3 x_0 - 3t_0 t_2 t_3 x_1 + 3t_0 t_1 t_3 x_2 - t_0 t_1 t_2 x_3}{6h^3},$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)x_0 - 3(t_0 t_2 + t_0 t_3 + t_2 t_3)x_1 + \\
&\quad + 3(t_0 t_1 + t_0 t_3 + t_1 t_3)x_2 - (t_0 t_1 + t_0 t_2 + t_1 t_2)x_3}{6h^3}, \\
a_2 &= \frac{(t_1 + t_2 + t_3)x_0 - 3(t_0 + t_2 + t_3)x_1 + 3(t_0 + t_1 + t_3)x_2 - (t_0 + t_1 + t_2)x_3}{6h^3}, \\
a_3 &= -\frac{x_0 - 3x_1 + 3x_2 - x_3}{6h^3}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Формулы (1.24), (1.25) и (1.26) значительно упрощаются, если интерполирование кривой выполняется в координатах $(x0't)$ или $(x0''t)$. В первом случае $t_0 = 0$, следовательно, имеем:

а) для линейной интерполяции

$$a_0 = \frac{t_1}{h}x_0, \quad a_1 = -\frac{1}{h}x_0 + \frac{1}{h}x_1; \tag{1.27}$$

б) для квадратичной интерполяции

$$a_0 = \frac{t_1 t_2 x_0}{2h^2}, \quad a_1 = -\frac{(t_1 + t_2)x_0 - 2t_2 x_1 + t_1 x_2}{2h^2}, \quad a_2 = \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{2h^2}; \tag{1.28}$$

в) для кубической интерполяции

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{t_1 t_2 t_3 x_0}{6h^3}, \\
a_1 &= -\frac{(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)x_0 - 3t_2 t_3 x_1 + 3t_1 t_3 x_2 - t_1 t_2 x_3}{6h^3}, \\
a_2 &= \frac{(t_1 + t_2 + t_3)x_0 - 3(t_2 + t_3)x_1 + 3(t_1 + t_3)x_2 - (t_1 + t_2)x_3}{6h^3}, \\
a_3 &= -\frac{x_0 - 3x_1 + 3x_2 - x_3}{6h^3}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Во втором случае $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, поэтому имеем:

а) для линейной интерполяции

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{h}x_1; \tag{1.30}$$

б) для квадратичной интерполяции

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{2t_2 x_1 - t_1 x_2}{2h^2}, \quad a_2 = \frac{-2x_1 + x_2}{2h^2}; \tag{1.31}$$

в) для кубической интерполяции

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = \frac{3t_2t_3x_1 - 3t_1t_3x_2 + t_1t_2x_3}{6h^3}, \\ a_2 &= \frac{-3(t_2 + t_3)x_1 + 3(t_1 + t_3)x_2 - (t_1 + t_2)x_3}{6h^3}, \\ a_3 &= \frac{3x_1 - 3x_2 + x_3}{6h^3}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Если интерполирование функции выполняется на большем временном промежутке или если функция имеет сложный вид, т.е. много экстремумов (точек перегибов), тогда интерполирование функции может быть реализовано по частям – кусочная интерполяция. Для этого можно использовать все рассмотренные виды интерполяции либо применять их в любом сочетании. Например, разбив сложную кривую на m временных отрезков и используя для каждого отрезка формулы для линейной интерполяции, можно выполнить последовательную кусочную интерполяцию кривой многочленами $P_{1j}(t) = a_{0j} + a_{1j}t$, где $a_{0j} = \frac{t_{1j}x_{0j} - t_{0j}x_{1j}}{t_{1j} - t_{0j}}$; $a_{1j} = \frac{x_{1j} - x_{0j}}{t_{1j} - t_{0j}}$; $j = \overline{1, m}$ – номер временного отрезка (рис. 1.4).

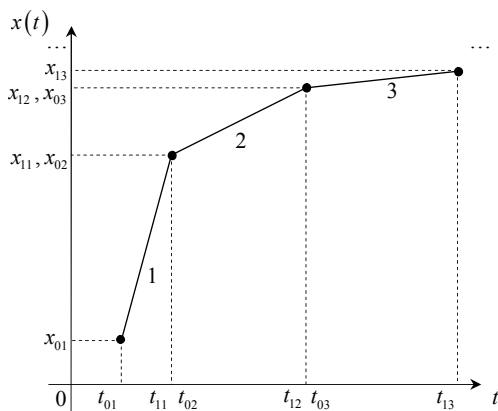


Рис. 1.4

Такой подход дает жесткое сопряжение многочленов-интерполантов в моменты времени $t_{1j} = t_{0(j+1)}$ и позволяет выполнять интерполяцию функций для любого временного отрезка с любой

точностью, которая определяется лишь величиной временного шага между узлами и порядком выбранных для этой цели многочленов*.

С помощью полученных интерполяционных многочленов, построенных для некоторого промежутка времени t , можно решать задачу *экстраполяции*, т.е. вычислять значения функции для значений аргумента, выходящих за пределы рассматриваемого промежутка. Задача экстраполирования обычно решается менее точно, чем задача интерполирования, и удовлетворительные результаты удастся получить только для точек, близких к основному промежутку.

Пример 1.1. Требуется найти интерполяционный многочлен $P_1(t) = a_0 + a_1 t$ по данным, приведенным в табл. 1.1.

Таблица 1.1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Пусть $t_0 = 4$, $x_0 = 5$, и $t_1 = 9$, $x_1 = 10$. Тогда, используя формулы для линейного интерполирования (1.5), находим

$$a_0 = \frac{t_1 x_0 - t_0 x_1}{t_1 - t_0} = \frac{9 \cdot 5 - 4 \cdot 10}{9 - 4} = \frac{45 - 40}{5} = \frac{5}{5} = 1, \quad a_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{10 - 5}{9 - 4} = \frac{5}{5} = 1.$$

Следовательно, имеем $\boxed{P_1(t) = 1 + t}$.

2. Найдем многочлен $P_1(t) = a_0 + a_1 t$, используя для этого формулу (1.15):

$$\begin{aligned} \boxed{P_1(t)} &= \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} x_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} x_1 = \frac{9 - t}{9 - 4} 5 + \frac{t - 4}{9 - 4} 10 = \\ &= \frac{(45 - 40) + (10 - 5)t}{5} = \frac{5 + 5t}{5} = \boxed{1 + t}. \end{aligned}$$

3. Пусть $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ и $t_1 = 9$, $x_1 = 10$. Так как приближение выполняется в координатах $(x_0' t)$, то используем интерполяционную формулу (1.18), согласно которой находим

$$\boxed{P_1(t)} = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) x_0 + \frac{t}{t_1} x_1 = \left(1 - \frac{t}{9}\right) \cdot 1 + \frac{t}{9} 10 = 1 - \frac{t}{9} + \frac{10t}{9} = \boxed{1 + t}.$$

По формуле (1.27) могут быть найдены коэффициенты многочлена $P_1(t) = a_0 + a_1 t$:

$$a_0 = \frac{t_1}{h} x_0 = \frac{9 \cdot 1}{9} = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{h} x_0 + \frac{1}{h} x_1 = -\frac{1}{9} + \frac{10}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

В результате имеем $\boxed{P_1(t) = 1 + t}$.

* При интерполировании функции на отрезках все величины, используемые в формулах, снабжаются вторым нижним индексом j , указывающим на принадлежность величины рассматриваемому отрезку.