Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

В.Ш. Бурд

**МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ
И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ**

Ярославль, 2013

УДК 517.928
ББК В 161.6
Б 91

Рецензенты:

кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника» ЯГТУ;
кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ П.А. Корнилов

Б 91

Бурд В.Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний / Научный редактор П.Н. Нестеров. — Ярославль: ЯрГУ, 2013 — 420 с.
ISBN 978-5-8397-0934-8

Одним из наиболее важных асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений с малым параметром является так называемый метод усреднения. Эта книга посвящена изложению теории метода усреднения на бесконечном интервале и приложениям метода к задачам теории колебаний.

Книга адресована широкой аудитории математиков, физиков и инженеров, которые интересуются асимптотическими методами теории нелинейных колебаний. Она доступна студентам старших курсов по физико-математическим направлениям подготовки.

Издание финансируется в рамках государственного задания высшим учебным заведениям на 2013 год (регистрационный номер: 8.7843.2013).

Рис. 11. Библиогр.: 188 назв.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

С.Д. Глызин, П.Н. Нестеров (научный редактор)

УДК 517.928
ББК В 161.6
Б 91

ISBN 978-5-8397-0934-8

© Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2013

© Бурд В.Ш., 2013

Оглавление

Предисловие	9
Часть I. Усреднение линейных уравнений	13
Глава 1. Периодические и почти периодические функции.	
Краткое введение	14
1.1. Периодические функции	14
1.2. Почти периодические функции	17
1.3. Векторно-матричные обозначения	22
Глава 2. Ограниченные решения	25
2.1. Однородная система уравнений с постоянными коэффициентами	25
2.2. Ограниченные решения неоднородных систем . . .	26
2.3. Лемма Боголюбова	32
Глава 3. Леммы о регулярности и устойчивости	36
3.1. Регулярные операторы	36
3.2. Лемма о регулярности	37
3.3. Регулярность периодических операторов	42
3.4. Лемма об устойчивости	44
Глава 4. Параметрический резонанс в линейных системах	51
4.1. Системы с одной степенью свободы. Случай гладкого параметрического возмущения .	51
4.2. Параметрический резонанс в линейных системах с одной степенью свободы. Системы с ударами . .	55
4.3. Параметрический резонанс в линейных системах с двумя степенями свободы. Простой и комбинационный резонансы	59
4.4. Параметрические колебания струны	63

Глава 5. Высшие приближения метода усреднения для линейных уравнений. Задача устойчивости. Метод И.З. Штокало	66
5.1. Постановка задачи	66
5.2. Преобразование основной системы	67
5.3. Замечание о периодическом случае	70
5.4. Устойчивость решений системы линейных дифференциальных уравнений с пп коэффициентами, близкими к постоянным . .	73
5.5. Пример. Обобщенное уравнение Хилла	76
5.6. Экспоненциальная дихотомия	80
5.7. Устойчивость решений систем с малым параметром и экспоненциальная дихотомия	83
5.8. Оценка обратного оператора	85
Глава 6. Линейные дифференциальные уравнения с быстрым и медленным временем	87
6.1. Обобщенные леммы о регулярности и устойчивости	87
6.2. Пример. Параметрический резонанс в уравнении Матье с медленно меняющимся коэффициентом .	92
6.3. Высшие приближения и задача устойчивости . . .	94
Глава 7. Асимптотическое интегрирование и метод усреднения	98
7.1. Постановка задачи	98
7.2. Преобразование основной системы	99
7.3. Асимптотическое интегрирование адиабатического осциллятора	104
Глава 8. Линейные сингулярно возмущенные уравнения с почти периодическими коэффициентами	110
Часть II. Усреднение нелинейных уравнений	117
Глава 9. Системы в стандартной форме с почти периодическими коэффициентами. Первое приближение	118
9.1. Постановка задачи	118
9.2. Теорема существования. Почти периодический случай	119

9.3. Теорема существования. Периодический случай . . .	123
9.4. Исследование устойчивости почти периодического решения	126
9.5. Более общая зависимость от параметра	132
9.6. Почти периодические решения квазилинейных систем со многими степенями свободы	134
9.7. Системы с быстрым и медленным временем	142
9.8. Принцип усреднения для одного класса сингулярно возмущенных систем	148
Глава 10. Системы в стандартной форме.	
Первые примеры	154
10.1. Динамика отбора генетической популяции в изменяющейся среде	154
10.2. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы и осциллятор Ван дер Поля	156
10.3. Резонансные периодические колебания квазилинейных систем с одной степенью свободы	164
10.4. Субгармонические решения	168
10.5. Слабонелинейное уравнение Дуффинга. Резонансные колебания	171
10.6. Уравнение Дуффинга. Вынужденные субгармонические колебания	179
10.7. Почти периодические решения вынужденного уравнения Дуффинга без демпфирования	184
10.8. Почти периодические решения возмущенного осциллятора Ван дер Поля. Нерезонансный случай	186
10.9. Вынужденные колебания осциллятора Ван дер Поля под действием почти периодической силы с медленно изменяющейся амплитудой	191
10.10. Резонансные колебания осциллятора Ван дер Поля	193
10.11. Два слабо связанных осциллятора Ван дер Поля	195
10.12. Возбуждение параметрических колебаний ударами в нелинейных системах	199
10.13. Вынужденные колебания уравнения Дуффинга. Двухчастотное воздействие	207

Глава 11. Маятниковые системы	
с колеблющимся подвесом	210
11.1. История и физические применения	210
11.2. Уравнение движения простого маятника с вибрирующим подвесом	213
11.3. Введение малого параметра и приведение уравнений к стандартной форме	215
11.4. Исследование устойчивости состояний равновесия	217
11.5. Устойчивость верхнего состояния равновесия стержня с распределенной массой	220
11.6. Плоские вибрации точки подвеса	222
11.7. Маятник с исчезающей во времени амплитудой колебаний точки подвеса	225
11.8. Многочастотные колебания подвеса маятника . .	229
11.9. Система маятник-шайба с вибрирующим основанием (маятник Челомея)	234
Глава 12. Высшие приближения метода усреднения	242
12.1. Формализм метода усреднения для систем в стандартной форме	242
12.2. Основная теорема о высших приближениях в периодическом случае	246
12.3. Теорема о высших приближениях в почти периодическом случае	250
12.4. Общая теорема о высших приближениях в почти периодическом случае	254
12.5. Высшие приближения для систем с быстрым и медленным временем	257
12.6. Поддержание вращательных режимов маятника с колеблющейся точкой подвеса	259
12.7. Устойчивость в критическом случае пары чисто мнимых корней для двумерной автономной системы	266
12.8. Бифуркация рождения цикла (бифуркация Андронова–Хопфа)	271
Глава 13. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и усреднение на неограниченном интервале	278
13.1. Основные обозначения и вспомогательные утверждения	278

13.2.	Теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях	281
13.3.	Интегральная сходимость и близость решений на неограниченном интервале	287
13.4.	Теоремы об усреднении	289
13.5.	Системы с быстрым и медленным временем	293
13.6.	Близость медленных переменных на бесконечном интервале в системах с быстро вращающейся фазой	296
Глава 14.	Системы с быстро вращающейся фазой	301
14.1.	Системы с одной степенью свободы, близкие к консервативным. Переменные действие–угол	301
14.2.	Переменные действие–угол для гамильтоновой системы с одной степенью свободы	305
14.3.	Автономные возмущения гамильтоновой системы с одной степенью свободы	307
14.4.	Переменные действие–угол для математического маятника	310
14.5.	Квазиконсервативный виброударный осциллятор	314
14.6.	Формальная схема усреднения для систем с быстрой фазой	318
Глава 15.	Резонансные периодические колебания в неавтономных системах с быстро вращающейся фазой	325
15.1.	Преобразование основной системы в окрестности невырожденного резонансного уровня	327
15.2.	Поведение решений основной системы в окрестности невырожденного резонансного уровня	329
15.3.	Вынужденные резонансные колебания и вращения математического маятника	331
15.4.	Резонансные колебания в системах с ударами	338
Глава 16.	Резонансные пп колебания в нелинейных двумерных системах с медленно меняющимися параметрами	346
16.1.	Постановка задачи и преобразование основной системы	346
16.2.	Существование и устойчивость пп решений	349

16.3. Вынужденные колебания и вращения математического маятника под действием двухчастотного возмущения с близкими частотами	360
Часть III. Приложения	365
Приложение А. Почти периодические функции	366
Приложение Б. Устойчивость решений дифференциальных уравнений	377
Б.1. Основные определения	377
Б.2. Теоремы об устойчивости по первому приближению	381
Б.3. Функции Ляпунова	385
Приложение В. Некоторые сведения из функционального анализа	389
В.1. Банаховы пространства	389
В.2. Линейные операторы	391
В.3. Принцип сжатых отображений	398
Литература	401

Предисловие

В обзоре книг о методе усреднения Дж. Мардок [158, р. 337] написал: “Предмет усреднения обширен и возможно прочитать четыре или пять книг, целиком посвященных усреднению, и найти очень небольшое пересечение в материале, который они покрывают”.

Еще одна книга по усреднению предлагается читателю. Она имеет не много общего с другими книгами, посвященными этому предмету.

Небольшая книга Н.Н. Боголюбова [17] заложила основы теории усреднения на бесконечном интервале. Дальнейшее развитие теории содержится в книгах Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [19] и И.Г. Малкина [58].

В последующие годы было получено много новых результатов, упрощены доказательства известных теорем и найдены новые применения метода усреднения.

В этой книге автор попытался изложить строго теорию метода усреднения на бесконечном интервале в современной форме и обеспечить лучшее понимание некоторых результатов в приложениях теории.

Книга состоит из двух частей. Каждая часть состоит из глав. Главы разбиты на параграфы (пункты).

Первая часть посвящена теории усреднения линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами.

Излагается теория устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, близкими к постоянным. Описывается метод Штокало в более точной и модернизированной форме. Рассматривается применение теории к задаче параметрического резонанса. Отдельная глава посвящена применению идей метода усреднения к построению асимптотик для линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. В последней главе первой части рассматриваются некоторые свойства решений линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами.

В то же время в первой части заложены основы для построения нелинейной теории.

Вторая часть посвящена нелинейным уравнениям.

В первых четырех главах второй части рассматриваются системы в стандартной форме. Этот термин был введен Боголюбовым и относится к системам, правая часть которых пропорциональна малому параметру. Первая глава посвящена построению теории усреднения на бесконечном интервале в первом порядке усреднения. В частности, излагаются некоторые результаты, полученные в последние годы. Во второй главе мы описываем первые применения теорем об усреднении на бесконечном интервале. Большинство рассмотренных здесь прикладных задач традиционно. Использование метода усреднения позволяет дать строгое обоснование всех результатов о существовании и устойчивости периодических и почти периодических решений. В третьей главе второй части метод усреднения применяется для исследования устойчивости состояний равновесия различных маятниковых систем с колеблющимся подвесом. Излагается история исследований, относящихся к проблеме стабилизации верхнего состояния равновесия маятника с колеблющимся подвесом. Затем исследуется устойчивость состояний равновесия маятника с почти периодически колеблющимся подвесом. Излагаются некоторые результаты, полученные в последние годы. Например, рассматриваются проблемы стабилизации в верхнем положении маятника Челомея и маятника с медленно убывающими осцилляциями подвеса. В четвертой главе строятся высшие приближения метода усреднения и устанавливаются условия их справедливости на бесконечном интервале в периодическом и почти периодическом случае. Изучается вопрос о существовании и устойчивости вращательных режимов маятника с колеблющимся подвесом. Здесь же рассматривается критический случай устойчивости в случае пары чисто мнимых корней для автономной системы и его связь с бифуркацией Андронова – Хопфа. В пятой главе доказываются теоремы, которые аналогичны теореме Банфи (равномерная асимптотическая устойчивость решений усредненного уравнения влечет близость решений точных и усредненных уравнений с близкими начальными условиями на бесконечном интервале). Развивается подход к этим проблемам, предложенный автором. Этот подход основывается на специальных теоремах об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Последние три главы посвящены системам с быстро вращающейся фазой. Здесь рассматриваются проблемы близости решений точных и усредненных уравнений на бесконечном интервале, существо-

вание и устойчивость резонансных периодических решений в двумерных системах с быстро вращающейся фазой, существование и устойчивость почти периодических решений в двумерных системах с быстро вращающейся фазой и медленно меняющимися коэффициентами.

Книга содержит некоторое количество упражнений. Упражнения расположены в главах, посвященных применению метода усреднения на бесконечном интервале к задачам теории колебаний. Эти упражнения должны помочь развить технику применения метода усреднения для исследования прикладных задач.

Книга содержит три приложения. Первое приложение посвящено почти периодическим функциям. Этот класс функций является основным в книге. Во втором приложении излагаются некоторые факты теории устойчивости движений в той форме, в которой они используются в книге. Третье приложение содержит описание некоторых фактов функционального анализа.

Книга адресована широкой аудитории математиков, физиков и инженеров, которые интересуются асимптотическими методами теории нелинейных колебаний. Она доступна студентам старших курсов.

П.Н. Нестеров выполнил рисунки к книге и провел научное редактирование, способствующее значительному улучшению текста. Выражаю П.Н. Нестерову глубокую благодарность.

Часть I

**Усреднение
линейных уравнений**

Глава 1

Периодические и почти периодические функции. Краткое введение

В этой главе описываются основные классы функций, которые мы в дальнейшем используем. Функции из этих классов определены при всех $t \in (-\infty, \infty)$ (будем писать $t \in \mathcal{R}$).

1.1. Периодические функции

Мы будем каждой периодической функции $f(t)$ с периодом T (не обязательно непрерывной) сопоставлять ряд Фурье

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt,$$

который часто удобно записывать в комплексной форме. Представляя $\cos \frac{2\pi}{T} kt$ и $\sin \frac{2\pi}{T} kt$ в комплексной форме и полагая $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, получим

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T} kt},$$

где $c_0 = a_0$. Число a_0 определяется формулой

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

и называется средним значением периодической функции. Для нас в дальнейшем понятие среднего значения играет первостепенную роль. Отметим следующее свойство периодической функции. Неопределенный интеграл от периодической функции $f(t)$ представим в виде (с точностью до постоянной)

$$\int f(t)dt = a_0t + g(t),$$

где $g(t)$ — периодическая функция. Ряд Фурье функции $g(t)$ получается почленным интегрированием ряда Фурье функции $f(t)$.

Непрерывные периодические функции образуют полное линейное нормированное пространство (банахово пространство), если ввести норму

$$\|f(t)\| = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|.$$

Мы обозначим его через P_T .

Наряду с непрерывными периодическими функциями мы будем также рассматривать периодические функции, которые имеют конечное число точек разрыва первого рода (конечных скачков) на периоде. Нас будут интересовать ряды Фурье произведения таких функций (см., например, [89]). Если $f(t)$ и $g(t)$ — две периодические функции, которые интегрируемы с квадратом на периоде с рядами Фурье

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{int},$$

то ряд Фурье произведения таких функций имеет вид

$$f(t)g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{int},$$

где $\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k d_{n-k}$. Отметим, что формула для коэффициентов Фурье произведения функций получается путем формального перемножения рядов Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$ и объединением подобных членов. В частности, можно вычислить ряд Фурье функции $f^2(t)$. В качестве примера рассмотрим ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)}{2k-1}.$$

Он является рядом Фурье функции, получающейся в результате периодического продолжения функции, определяемой на периоде 2π соотношениями

$$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < t < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Ряд Фурье функции $f^2(t)$ сходится абсолютно, и среднее значение этой функции равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{16}.$$

Будем рассматривать также обобщенные периодические функции (см., например, [2, 102]), которые являются обобщенными производными периодических функций с конечным числом скачков на периоде. Такие функции называются обобщенными функциями первого порядка, и их можно выразить через комбинации δ -функций Дирака сдвинутого аргумента и обычные периодические функции. Для обобщенной периодической функции с периодом 2π существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$. Поэтому обобщенной периодической функции можно сопоставить тригонометрический ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

который сходится в обобщенном смысле к $f(t)$. В качестве примера рассмотрим обобщенную периодическую функцию

$$\delta_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n\pi),$$

где $\delta(t)$ — δ -функция Дирака. Коэффициенты Фурье функции $\delta_{2\pi}(t)$ определяются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{2\pi}(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi}$$

и, аналогично,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \sin 0 = 0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) dt = \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\delta_{2\pi}(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt \right).$$

Для обобщенной периодической функции

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kl)$$

с периодом $2l$ ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik\pi t}{l}},$$

а в вещественной форме имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi t}{l}.$$

Над обобщенными рядами Фурье можно выполнять различные операции анализа.

1.2. Почти периодические функции

Тригонометрическим многочленом будем называть выражение

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad (1.1)$$

где a_k, b_k, ω_k — вещественные числа. Выражение (1.1) удобно записывать в комплексной форме

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k t},$$

где λ_k — вещественные числа.

Существуют тригонометрические многочлены, которые не являются периодическими функциями. Действительно, возьмем многочлен $f(t) = e^{it} + e^{i\pi t}$. Предположим, что $f(t)$ — периодическая функция с некоторым периодом ω . Тождество $f(t + \omega) = f(t)$ имеет вид

$$(e^{i\omega} - 1)e^{it} + (e^{i\pi\omega} - 1)e^{i\pi t} \equiv 0.$$

Так как функции e^{it} и $e^{i\pi t}$ линейно независимы, то

$$e^{i\omega} - 1 = 0, \quad e^{i\pi\omega} - 1 = 0.$$

Следовательно, $\omega = 2k\pi$ и $\pi\omega = 2h\pi$, где k и h — целые числа. Одновременное выполнение этих равенств невозможно.

Определение 1.1. Функцию $f(t)$, определенную при $t \in \mathcal{R}$, будем называть почти периодической, если она является пределом в смысле равномерной сходимости на всей вещественной оси последовательности $T_n(t)$ тригонометрических многочленов вида (1.1), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N , что при $n > N$

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - T_n(t)| < \varepsilon.$$

Очевидно, любая непрерывная периодическая функция будет почти периодической в смысле определения 1.1. Опишем свойства почти периодических функций (сокращенно пп функций), которые необходимы в дальнейшем.

1) Каждая пп функция равномерно непрерывна и ограничена на всей вещественной оси.

2) Если $f(t)$ — пп функция и c — постоянная, то $cf(t)$, $f(t + c)$, $f(ct)$ — пп функции.

3) Если $f(t)$ и $g(t)$ — пп функции, то $f(t) \pm g(t)$ и $f(t) \cdot g(t)$ — пп функции.

Из свойства 3) вытекает, что, если $P(z_1, z_2, \dots, z_k)$ — многочлен от переменных $z_1, z_2, \dots, z_k$, и $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ — пп функции, то функция $F(t) = P(f_1, f_2, \dots, f_k)$ будет пп функцией.

4) Если $f(t)$ и $g(t)$ — пп функции и $\sup_{-\infty < t < \infty} |g(t)| > 0$, то $\frac{f(t)}{g(t)}$ — пп функция.

5) Предел равномерно сходящейся последовательности, составленной из пп функций, является пп функцией.

Пусть $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — функция равномерно непрерывная на замкнутом ограниченном множестве Π n -мерного пространства. Пусть

$f_1(t), \dots, f_n(t)$ — пп функции и $(f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \Pi$ при $t \in \mathcal{R}$. Тогда из свойства 5) следует, что $F(t) = \Phi(f_1(t), \dots, f_n(t))$ — пп функция.

Следующее свойство пп функции для нас особенно важно.

6) Для пп функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \langle f(t) \rangle$$

равномерно по a . Число $\langle f(t) \rangle$ не зависит от выбора a и называется средним значением пп функции $f(t)$.

Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом ω . Представим вещественное число T в виде $T = n\omega + \alpha_n$, где n — целое, а α_n удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \alpha_n \leq \omega.$$

Когда $T \rightarrow \infty$, то $n \rightarrow \infty$. Вычислим среднее значение функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\omega + \alpha_n} \int_0^{n\omega + \alpha_n} f(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\omega + \alpha_n} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\omega}^{(i+1)\omega} f(t) dt + \int_{n\omega}^{n\omega + \alpha_n} f(t) dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\omega + \alpha_n} \left\{ n \int_0^\omega f(t) dt + \int_0^{\alpha_n} f(t) dt \right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, для периодических функций введенное среднее значение совпадает с обычным средним значением периодической функции.

Существование среднего значения позволяет построить для пп функции ряд Фурье. Пусть $f(t)$ — пп функция. Так как при любом действительном λ функция $e^{i\lambda t}$ — периодическая, то произведение $f(t)e^{i\lambda t}$ — пп функция. Поэтому существует среднее значение

$$a(\lambda) = \langle f(t)e^{i\lambda t} \rangle.$$

Фундаментальное значение имеет тот факт, что функция $a(\lambda)$ может отличаться от нуля самое большее только для счетного множества

значений λ . Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ называются показателями Фурье, а числа $a_1, \dots, a_n, \dots$ — коэффициентами Фурье функции $f(t)$.

Итак, каждой пп функции $f(t)$ сопоставляется ряд Фурье:

$$f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}.$$

Над рядами Фурье можно производить формальные операции. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — пп функции и

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} = \sum_\lambda a(\lambda) e^{i\lambda t}, \\ g(t) &\sim \sum_n b_n e^{i\mu_n t} = \sum_\lambda b(\lambda) e^{i\lambda t}. \end{aligned}$$

Тогда:

- 1) $kf(t) \sim \sum_n k a_n e^{i\lambda_n t}$ (k — const),
- 2) $e^{i\lambda t} f(t) \sim \sum_n a_n e^{i(\lambda_n + \lambda)t}$,
- 3) $f(t + \alpha) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n \alpha} e^{i\lambda_n t}$ ($\alpha \in \mathcal{R}$),
- 4) $\bar{f}(t) \sim \sum_n \bar{a}_n e^{-i\lambda_n t}$,
- 5) $f(t) + g(t) \sim \sum_\lambda (a(\lambda) + b(\lambda)) e^{i\lambda t}$,
- 6) $f(t) \cdot g(t) \sim \sum_n c_n e^{i\nu_n t}$, где

$$c_n = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \nu_n} a_p b_q.$$

Если производная пп функции $f(t)$ является пп функцией, то ее ряд Фурье получается из ряда Фурье $f(t)$ почленным дифференцированием. Если неопределенный интеграл пп функции $f(t)$ является пп функцией, то

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt \sim c + \sum_n \frac{a_n}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n t} \quad (\lambda_n \neq 0).$$

Остановимся подробнее на интегрировании пп функций. Если $f(t)$ — периодическая функция с ненулевым средним значением, то для нее справедливо равенство

$$\int_0^t f(t) dt = \langle f \rangle t + g(t),$$

где $g(t)$ — периодическая функция. Для пп функций последнее равенство, вообще говоря, не имеет места. Существуют пп функции с нулевым средним значением, интеграл от которых неограничен и, следовательно, не является пп функцией. Например, функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{i\frac{1}{k^2}t}.$$

Мы будем называть пп функцию $f(t)$ **правильной**, если справедливо равенство

$$\int_0^t f(t) dt = \langle f \rangle t + g(t),$$

где $g(t)$ — пп функция. Функция $f(t)$ будет правильной, если она является тригонометрическим многочленом. Если показатели Фурье пп функции отделены от нуля $\lambda_n \geq \delta > 0$, то такая функция также будет правильной.

Если существует конечное множество чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ такое, что каждый показатель Фурье пп функции является линейной комбинацией этих чисел

$$\lambda_n = n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m,$$

где $n_1, \dots, n_m$ — целые числа, то эта пп функция называется квазипериодической. Квазипериодические функции можно получать из периодических функций многих переменных. Например, пусть $F(x, y)$ — функция периодическая по каждой из переменных с периодом 2π . Тогда $F(\omega_1 t, \omega_2 t)$ — квазипериодическая функция, если числа ω_1, ω_2 несоизмеримы.

Из изложенных свойств пп функций следует, что они образуют линейное пространство. Если в этом пространстве ввести норму

$$\|f(t)\| = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|,$$

то оно превращается в банахово пространство (полное линейное нормированное пространство). Это пространство обозначается через B . Легко видеть, что среднее значение — линейный непрерывный функционал на этом пространстве, т.е. среднее значение обладает следующими свойствами:

- 1) $\langle cf(t) \rangle = c\langle f(t) \rangle$ ($c = \text{const}$),
- 2) $\langle (f(t) + g(t)) \rangle = \langle f(t) \rangle + \langle g(t) \rangle$,

3) Если последовательность пп функций $f_1(t), \dots, f_n(t), \dots$ сходится равномерно при $t \in \mathcal{R}$ к пп функции $f(t)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(t) \rangle = \langle f(t) \rangle.$$

Мы определили почти периодическую функцию как равномерный предел на бесконечном промежутке последовательности тригонометрических многочленов. Такое определение принято за основу в книге Кордуняну (Corduneanu [124]). Исторически первым было определение Г. Бора, которое мы не будем здесь приводить. Часто удобным является определение С. Бохнера. Введем это определение.

Определение 1.2. Непрерывная на вещественной оси функция $f(t)$ называется почти периодической, если из каждой бесконечной последовательности функций

$$f(t + h_1), f(t + h_2), \dots, f(t + h_k), \dots$$

можно выбрать равномерно сходящуюся на всей вещественной оси подпоследовательность.

1.3. Векторно-матричные обозначения

В дальнейшем будем пользоваться векторно-матричными обозначениями. Через $y = (y_1, \dots, y_n)$ будем обозначать вектор, $y_1, \dots, y_n$ — компоненты вектора. Если компоненты — функции от переменной t , то получим вектор-функцию $y(t)$, которую часто будем называть просто функцией (функцией со значениями в n -мерном пространстве), если это не будет вызывать недоумений. Естественным образом определяются вектор-функции

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right), \int y(t) dt = \left(\int y_1(t) dt, \dots, \int y_n(t) dt \right).$$

В множестве n -мерных векторов введем норму формулой

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$$

или формулой

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Норма обладает следующими свойствами:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|cy\| = |c|\|y\| \quad (c = \text{const}).$$

Отметим еще часто используемое неравенство

$$\left\| \int_a^b y(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|y(t)\| dt.$$

В дальнейшем будем обозначать векторную норму через $|\cdot|$. Пусть A — квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij} . Норму матрицы введем формулой

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

Легко видеть, что

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|cA\| = |c| \cdot \|A\| \quad (c = \text{const}),$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad (x \text{ — вектор}),$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Естественным образом вводятся $\frac{dA}{dt}$ и $\int A(t)dt$. Справедливо неравенство

$$\left\| \int_a^b A(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|A(t)\| dt.$$

В дальнейшем норму матрицы будем обозначать через $|\cdot|$.

Вектор-функцию $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ будем называть почти периодической, если ее компоненты $f_i(t)$ — пп функции. Легко видеть, что почти периодические вектор-функции обладают всеми свойствами скалярных пп функций, описанными в предыдущем пункте. Почти периодические вектор-функции образуют банахово пространство, если норму ввести по формуле

$$\|f(t)\| = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|,$$

где $|f(t)|$ — норма вектора $f(t)$. Это пространство будем обозначать через B_n .

Периодические вектор-функции с периодом T образуют банахово пространство с нормой

$$\|f(t)\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|.$$

Это пространство обозначим через P_T .

Матрицу-функцию будем называть почти периодической, если ее элементы — пп функции. Наконец, вектор-функцию $T(t)$ будем называть тригонометрическим многочленом, если ее компоненты — тригонометрические многочлены.

Глава 2

Ограниченные решения

2.1. Однородная система уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.1)$$

где A — постоянная квадратная матрица порядка n . Напомним некоторые свойства системы (2.1), необходимые для дальнейшего. Общее решение системы (2.1) записывается в виде

$$x(t) = e^{tA}x(0),$$

где $x(0)$ — вектор начальных условий, матричная экспонента e^{tA} определяется матричным рядом

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!}.$$

Поведение решений системы (2.1) при $t \rightarrow \pm\infty$ целиком определяется расположением собственных значений матрицы A . Если все собственные значения матрицы A имеют ненулевые вещественные части, то система (2.1) не имеет ограниченных при всех $t \in \mathcal{R}$ решений, кроме нулевого. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то существуют постоянные $M > 0, \gamma > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$|e^{tA}| \leq Me^{-\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Если все собственные значения матрицы A имеют положительные вещественные части, то существуют постоянные $M, \gamma > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$|e^{tA}| \leq Me^{\gamma t}, \quad t \leq 0.$$

2.2. Ограниченные решения неоднородных систем

Рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad (2.2)$$

где A — постоянная квадратная матрица порядка n , $f(t)$ — ограниченная при всех t вектор-функция, т.е.

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)| \leq K < \infty.$$

Нас будет интересовать вопрос, когда система (2.2) имеет единственное ограниченное при $t \in \mathcal{R}$ решение $x(t)$. Очевидно, если система (2.2) имеет два ограниченных решения, то их разность является ограниченным решением однородного уравнения (2.1). Следовательно, необходимое условие существования единственного ограниченного решения системы (2.2) при ограниченной функции $f(t)$ состоит в том, что система (2.1) не имеет ограниченных решений, кроме тривиального. Поэтому будем предполагать, что матрица A не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью. Покажем, что при этом предположении система (2.2) имеет единственное ограниченное решение.

С помощью линейного преобразования

$$x = Py,$$

где P — постоянная обратимая матрица, система (2.2) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy + P^{-1}f(t). \quad (2.3)$$

Матрицу P можно выбрать таким образом, что матрица $P^{-1}AP$ имеет блочно-диагональный вид

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 — матрица порядка k , у которой все собственные значения имеют отрицательные вещественные части, а A_2 — матрица порядка $n - k$, у которой все собственные значения имеют положительные вещественные части. Очевидно, функция $P^{-1}f(t)$ ограничена. Задача об ограниченных решениях системы (2.2) эквивалентна задаче об ограниченных решениях системы (2.3). Поэтому сразу будем предполагать, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_1 x_1 + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= A_2 x_2 + f_2(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $x = (x_1, x_2)$, x_1 и x_2 — k -мерный и $n - k$ -мерный векторы соответственно, $f_1(t)$ — первые k компонент вектора $f(t)$, $f_2(t)$ — последние $n - k$ компонент вектора $f(t)$. Общее решение системы (2.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{tA_1} x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds, \\ x_2(t) &= e^{tA_2} x_2(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_2} f_2(s) ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как собственные значения матрицы A_1 имеют отрицательные вещественные части, то существуют постоянные $M_1, \gamma_1 > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$|e^{tA_1}| \leq M_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Обе части первого равенства системы (2.5) умножим на матрицу e^{-tA_1} . Тогда получим

$$e^{-tA_1} x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t e^{-sA_1} f_1(s) ds. \quad (2.7)$$

Предположим, что $x_1(t)$ — ограниченная функция. Тогда, переходя к пределу в равенстве (2.7) при $t \rightarrow -\infty$ и учитывая оценку (2.6),

получим

$$0 = x_1(0) + \int_0^{-\infty} e^{-sA_1} f_1(s) ds.$$

Следовательно, если $x_1(t)$ — ограниченная функция, то

$$x_1(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-sA_1} f_1(s) ds.$$

Таким образом, если $x_1(t)$ — ограниченная функция, то она определяется формулой

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{tA_1} x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds. \end{aligned}$$

Так как все собственные значения матрицы A_2 имеют положительные вещественные части, то существуют постоянные $M_2, \gamma_2 > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$|e^{tA_2}| \leq M_2 e^{\gamma_2 t}, \quad t \leq 0. \quad (2.8)$$

Умножая обе части второго равенства системы (2.5) на e^{-tA_2} , получаем

$$e^{-tA_2} x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t e^{-sA_2} f_2(s) ds.$$

Предполагая, что $x_2(t)$ — ограниченная функция, и переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, с учетом оценки (2.8), имеем

$$x_2(0) = - \int_0^{\infty} e^{-sA_2} f_2(s) ds.$$

Таким образом, если $x_2(t)$ — ограниченная функция, то

$$x_2(t) = - \int_0^{\infty} e^{(t-s)A_2} f_2(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)A_2} f_2(s) ds = - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A_2} f_2(s) ds.$$

Следовательно, если система (2.2) имеет ограниченное решение, то оно представляется формулами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds, \\ x_2(t) &= - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A_2} f_2(s) ds. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Покажем, что формулы (2.9) действительно определяют ограниченные функции. Из оценок (2.6) и (2.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq \int_{-\infty}^t |e^{(t-s)A_1}| |f_1(s)| ds \leq M_1 \int_{-\infty}^t e^{-\gamma_1(t-s)} ds \sup_{-\infty < t < \infty} |f_1(t)| = \\ &= \frac{M_1}{\gamma_1} \sup_{-\infty < t < \infty} |f_1(t)|, \\ |x_2(t)| &\leq \int_t^{\infty} |e^{(t-s)A_2}| |f_2(s)| ds \leq M_2 \int_t^{\infty} e^{\gamma_2(t-s)} ds \sup_{-\infty < t < \infty} |f_2(t)| = \\ &= \frac{M_2}{\gamma_2} \sup_{-\infty < t < \infty} |f_2(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, система (2.2) имеет единственное ограниченное решение

$$\begin{aligned} x(t) = (x_1(t), x_2(t)) &= \left(\int_{-\infty}^t e^{(t-s)A_1} f_1(s) ds, - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A_2} f_2(s) ds \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f(s) ds, \end{aligned}$$

где матрица-функция $G(t)$ определяется формулой

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{tA_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \geq 0, \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tA_2} \end{pmatrix}, & t < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Это решение удовлетворяет оценке

$$|x(t)| \leq M_3 \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|,$$

где $M_3 = \max\left(\frac{M_1}{\gamma_1}, \frac{M_2}{\gamma_2}\right)$.

Отметим, что матрица-функция $G(t)$ непрерывна всюду, кроме точки $t = 0$, в которой она терпит разрыв первого рода (скачок)

$$G(t+0) - G(t-0) = I,$$

где I — единичная матрица. Для $G(t)$ справедлива оценка

$$|G(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}, \quad t \in \mathcal{R}, \quad (2.11)$$

где M и $\gamma > 0$ — некоторые постоянные. $G(t)$ — дифференцируема при всех $t \neq 0$, а для матрицы $\frac{dG}{dt}$ справедлива оценка вида (2.10). Функцию $G(t)$ называют функцией Грина для задачи об ограниченных решениях или функцией Грина ограниченной краевой задачи.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2.1. Пусть у матрицы A все собственные значения имеют ненулевые вещественные части. Тогда для каждой ограниченной функции $f(t)$ существует единственное ограниченное решение системы (2.2), которое определяется формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)ds. \quad (2.12)$$

Следствие 2.1. Пусть $f(t)$ — пп функция. Тогда решение, определяемое формулой (2.12), является почти периодическим. Если $f(t)$ — периодическая функция, то соответствующее решение — периодическое.

Доказательство. Если $f(t)$ — тригонометрический многочлен, то легко проверить, что $x(t)$ — тригонометрический многочлен. Пусть теперь $f_n(t)$ — последовательность тригонометрических многочленов, которая сходится равномерно при всех $t \in \mathcal{R}$ к пп функции $f(t)$. Тогда последовательность $x_n(t)$ равномерно сходится при $t \in \mathcal{R}$ к функции $x(t)$. Это следует из неравенства

$$\begin{aligned} |x(t) - x_n(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)||f(s) - f_n(s)|ds \leq \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-s|} ds \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - f_n(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, $x(t)$ — пп функция. Если $f(t)$ — периодическая функция с периодом T , то легко видеть, что $x(t)$ — периодическая функция с периодом T . ■

Замечание 2.1. Если $f(t)$ — T -периодическая функция, то требование теоремы 2.1 об отсутствии собственных значений матрицы A с нулевой вещественной частью является излишним. Единственное T -периодическое решение системы (2.2) существует, если выполнено следующее условие.

Условие П: у матрицы A нет нулевого собственного значения и нет чисто мнимых собственных значений вида $i\frac{2\pi}{T}k$, где k — целое число.

В этом случае однородная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

не имеет T -периодических решений, кроме нулевого. Легко выписать функцию Грина T -периодической краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad x(0) = x(T).$$

Очевидно, если $x(t)$ — решение вышеуказанной неоднородной системы, то и функция $x(t + T)$ является ее решением. Поэтому условие периодичности решения $x(t + T) = x(t)$ вытекает из условия $x(0) = x(T)$ (решения $x(t)$ и $x(t + T)$ совпадают в начальный момент $t = 0$ и, следовательно, совпадают при всех t). Из формулы для общего решения неоднородной системы

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

получаем

$$x(T) = e^{TA}x(0) + \int_0^T e^{(T-s)A}f(s)ds = x(0).$$

Следовательно, начальное условие периодического решения имеет вид

$$x(0) = (I - e^{TA})^{-1} \int_0^T e^{(T-s)A}f(s)ds = (e^{-TA} - I)^{-1} \int_0^T e^{-sA}f(s)ds,$$

где I — единичная матрица. Обратимость матрицы $(e^{-TA} - I)$ вытекает из условия П. Подставляя значение $x(0)$ в формулу общего решения, получаем, что единственное T -периодическое решение определяется формулой

$$x(t) = \int_0^T G(t-s)f(s)ds, \quad (2.13)$$

где периодическая функция Грина имеет вид

$$G(t-s) = \begin{cases} \left((e^{-TA} - I)^{-1} + I \right) e^{(t-s)A}, & \text{если } s < t, \\ (e^{-TA} - I)^{-1} e^{(t-s)A}, & \text{если } s > t. \end{cases}$$

Иногда вместо представления T -периодического решения в виде (2.13) удобно записывать это представление в виде

$$x(t) = e^{tA} [e^{-TA} - I] \int_t^{t+T} e^{-sA} f(s) ds = \int_t^{t+T} \{ e^{uA} [e^{-TA} - I] e^{-tA} \}^{-1} f(u) du.$$

Из последней формулы вытекает, что для единственного периодического решения $x(t)$ системы (2.2) справедливо неравенство

$$|x(t)| \leq K \int_0^T |f(u)| du,$$

где

$$K = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{t \leq \tau \leq t+T} |\{ e^{\tau A} [e^{-TA} - I] e^{-tA} \}^{-1}|$$

— постоянная, не зависящая от $f(t)$ и зависящая только от T и e^{tA} . Наконец, отметим еще одно представление T -периодического решения неоднородной системы

$$x(t) = \int_0^T (e^{-TA} - I)^{-1} e^{-uA} f(t+u) du. \quad (2.14)$$

2.3. Лемма Боголюбова

Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (2.15)$$

где $f(t)$ — пп функция, $\varepsilon > 0$ — скалярный малый параметр. Пусть у матрицы A все собственные значения имеют ненулевые вещественные части. Тогда система (2.15) при каждом ε в силу следствия 2.1 имеет единственное пп решение $x(t, \varepsilon)$. Нас будут интересовать условия, при которых $|x(t, \varepsilon)|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю равномерно по $t \in \mathcal{R}$. Такие условия дает следующая лемма, принадлежащая Н.Н. Боголюбову. Нам удобно сформулировать лемму в форме, которая отличается от формулировки в книгах Боголюбова [17], Боголюбова и Митропольского [19].

Лемма Боголюбова. Пусть среднее значение функции $f(t)$ равно нулю, т.е.

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds = 0. \quad (2.16)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{-\infty < t < \infty} |x(t, \varepsilon)| = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 2.1 решение $x(t, \varepsilon)$ системы (2.15) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = \int_{-\infty}^t G(t-s) f\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds + \int_t^{\infty} G(t-s) f\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds.$$

Сделаем замену переменных $s = t + u$. Тогда получим

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \int_{-\infty}^0 G(-u) f\left(\frac{t+u}{\varepsilon}\right) du + \int_0^{\infty} G(-u) f\left(\frac{t+u}{\varepsilon}\right) du = \\ &= \int_{-\infty}^0 G(-u) \frac{d}{du} \left(\int_t^{t+u} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right) d\sigma + \int_0^{\infty} G(-u) \frac{d}{du} \left(\int_t^{t+u} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям каждое слагаемое в правой части, получим

$$x(t, \varepsilon) = - \int_{-\infty}^0 \frac{dG(-u)}{du} \left(\int_t^{t+u} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right) du - \int_0^{\infty} \frac{dG(-u)}{du} \left(\int_t^{t+u} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right) du$$

При $u \neq 0$ из неравенства (2.11) следует оценка

$$\left| \frac{dG(-u)}{du} \right| \leq M_1 e^{-\gamma_1 |u|},$$

где M_1, γ_1 — положительные постоянные. Положим

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)| = M_2.$$

Тогда при произвольном $T > 0$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} |x(t, \varepsilon)| \leq & M_1 M_2 \int_{-\infty}^{-T} e^{-\gamma_1 |u|} |u| du + M_1 M_2 \int_T^{\infty} e^{-\gamma_1 |u|} |u| du + \\ & + M_1 \int_{-T}^T e^{-\gamma_1 |u|} \left| \int_t^{t+u} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right| du. \end{aligned}$$

Пусть $\eta > 0$. Из последнего неравенства, учитывая сходимость первых двух интегралов в правой части неравенства, вытекает существование такого $T > 0$, что

$$|x(t, \varepsilon)| < \frac{\eta}{2} + \frac{2M_1}{\gamma_1} \sup_{|\tau-s| \leq T} \left| \int_s^{\tau} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right|.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\tau-s| \leq T} \left| \int_s^{\tau} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right| = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sup_{|\tau-s| \leq T} \left| \int_s^{\tau} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right| &= \sup_{|\tau-s| \leq T} \left| \frac{\tau-s}{\varepsilon} \int_{\frac{s}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} f(u) du \right| \leq \\ &\leq T \sup_{|\tau-s| \leq T} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\frac{s}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} f(u) du \right|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ правая часть неравенства (2.17) стремится к нулю в силу того, что выполнено условие (2.16) и у пп функции существует равномерное среднее значение. Следовательно, при достаточно малых ε

$$\frac{2M_1}{\gamma_1} \sup_{|\tau-s| \leq T} \left| \int_s^{\tau} f\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma \right| < \frac{\eta}{2}$$

и

$$|x(t, \varepsilon)| < \eta, \quad t \in \mathcal{R}.$$

Лемма доказана. ■

Замечание 2.2. Сделаем в системе (2.15) замену времени $\tau = \varepsilon t$. Тогда получим систему

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon Ax + \varepsilon f(\tau).$$

Лемму Боголюбова можно было сформулировать для этой системы.

Глава 3

Леммы о регулярности и устойчивости

3.1. Регулярные операторы

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)x,$$

где $A(t)$ — квадратная матрица порядка n , составленная из пп функций. Оператор L определен на множестве дифференцируемых пп вектор-функций пространства B_n .

Определение 3.1. Оператор L будем называть регулярным, если для любой пп функции $f(t)$ система дифференциальных уравнений

$$Lx = f(t)$$

имеет единственное пп решение $x(t)$.

Из регулярности оператора L вытекает в силу теоремы Банаха об обратном операторе (см., напр. [95]), что оператор L имеет в пространстве пп вектор-функций B_n непрерывный обратный оператор L^{-1} :

$$x(t) = L^{-1}f(t).$$

Теорема 2.1 утверждает, что система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

имеет единственное решение $x(t) \in B_n$ при любой $f(t) \in B_n$, если у матрицы A все собственные значения имеют ненулевые вещественные части. Таким образом, при этом условии на матрицу A оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} - Ax$$

является регулярным. Оператор L^{-1} определяется формулой

$$x(t) = L^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)ds.$$

Аналогично, можно определить регулярный оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)x,$$

где $A(t)$ — матрица, элементы которой — T -периодические функции. В этом случае нужно потребовать, чтобы для любой T -периодической вектор-функции $f(t)$ система

$$Lx = f(t)$$

имела единственное T -периодическое решение $x(t)$. Из замечания 2.1 следует, что оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} - Ax$$

будет регулярным, если выполняется условие Π — матрица A не имеет нулевого и чисто мнимых собственных значений вида $i\frac{2\pi}{T}k$, где k — целое число.

3.2. Лемма о регулярности

Будем рассматривать семейство дифференциальных операторов L_ε вида

$$L_\varepsilon x = \frac{dx}{dt} - A(t, \varepsilon)x,$$

зависящее от параметра ε .

Определение 3.2. Назовем оператор L_ε равномерно регулярным, если для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ он регулярен и существует такая постоянная

$K > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ норма оператора L_ε^{-1} как оператора, действующего в B_n , ограничена постоянной K , т.е.

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq K.$$

Рассмотрим теперь семейство операторов

$$L_\varepsilon x = \frac{dx}{dt} - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x, \quad (3.1)$$

зависящее от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Укажем признак равномерной регулярности оператора (3.1) при малых ε .

Лемма о регулярности. Пусть оператор

$$L_0 x = \frac{dx}{dt} - A_0 x, \quad (3.2)$$

где

$$A_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt,$$

регулярен. Тогда при достаточно малых ε оператор (3.1) равномерно регулярен.

Доказательство. Необходимо доказать, что для любой функции $f(t) \in B_n$ система

$$\frac{dx}{dt} - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x = f(t) \quad (3.3)$$

имеет единственное решение $x(t) \in B_n$ при достаточно малых ε . Введем в рассмотрение матрицу

$$H(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t-s) \left[A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A_0 \right] ds,$$

где $G_0(t-s)$ — функция Грина ограниченной краевой задачи для оператора L_0 , т.е. матрица-функция в формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t-s) f(s) ds,$$

где $x(t)$ — ограниченное при $t \in \mathcal{R}$ решение системы

$$\frac{dx}{dt} - A_0x = f(t).$$

Матрица $H(t, \varepsilon)$ — ограниченное при $t \in \mathcal{R}$ решение неоднородной системы

$$\frac{dH}{dt} = A_0H + \left[A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A_0 \right]. \quad (3.4)$$

Так как по матрица $A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A_0$ имеет нулевое среднее значение, то из леммы Боголюбова следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{-\infty < t < \infty} |H(t, \varepsilon)| = 0. \quad (3.5)$$

В системе (3.3) сделаем замену

$$x(t) = y(t) + H(t, \varepsilon)y(t). \quad (3.6)$$

Очевидно, при малых ε замена (3.6) обратима и при $y(t) \in B_n$ функция $x(t) \in B_n$. Простой подсчет с учетом (3.4) показывает, что $y(t)$ нужно определять как по решению системы

$$\frac{dy}{dt} - A_0y + D(t, \varepsilon)y = [I + H(t, \varepsilon)]^{-1}f(t), \quad (3.7)$$

где

$$D(t, \varepsilon) = -[I + H(t, \varepsilon)]^{-1} \left\{ -H(t, \varepsilon)A_0 + \left[A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A_0 \right] H(t, \varepsilon) \right\}. \quad (3.8)$$

Из предельного равенства (3.5) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{-\infty < t < \infty} |D(t, \varepsilon)| = 0. \quad (3.9)$$

Задача о существовании единственного по решению системы (3.3) при достаточно малых ε эквивалентна задаче о существовании единственного по решению системы (3.7). Последняя задача, в свою очередь, эквивалентна задаче существования единственного решения в пространстве B_n системы интегральных уравнений

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t-s)[-D(s, \varepsilon)y(s) + (I + H(t, \varepsilon))^{-1}f(s)]ds. \quad (3.10)$$

Оценим в пространстве B_n норму оператора $S(\varepsilon)$, определяемого формулой

$$S(\varepsilon)y = - \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t-s)D(s, \varepsilon)y(s)ds.$$

При этом напомним, что из свойств функции Грина $G_0(t)$ следует существование таких постоянных $M, \gamma > 0$, что

$$|G_0(t-s)| \leq Me^{-\gamma|t-s|}, \quad -\infty < t, s < \infty.$$

Получим

$$\begin{aligned} \|S(\varepsilon)\| &\leq \sup_{-\infty < t < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(t-s)| |D(s, \varepsilon)| |y(s)| ds \leq \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-s|} ds \sup_{-\infty < t < \infty} |D(t, \varepsilon)| \|y\| \leq \frac{M}{\gamma} \sup_{-\infty < t < \infty} |D(t, \varepsilon)| \|y\|. \end{aligned}$$

Из (3.9) следует, что

$$\|S(\varepsilon)y\| \leq \alpha(\varepsilon)\|y\|,$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0.$$

Отсюда вытекает, что при достаточно малых ε оператор $I - S(\varepsilon)$ (I — единичный оператор) имеет непрерывный обратный в B_n , представимый в виде ряда Неймана (см. Приложение 3)

$$(I - S(\varepsilon))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k(\varepsilon).$$

Систему (3.10) можно записать в виде неоднородного операторного уравнения в пространстве B_n :

$$[I - S(\varepsilon)]y = g(t),$$

где пп функция $g(t)$ определяется следующим выражением:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t-s)[I + H(s, \varepsilon)]^{-1} f(s) ds.$$

Следовательно, система (3.10) имеет при достаточно малых ε единственное решение $y(t) \in B_n$. Таким образом, при достаточно малых ε операторы L_ε регулярен. Для завершения доказательства леммы осталось показать, что нормы операторов L_ε^{-1} равномерно ограничены при малых ε , т.е. существуют постоянные K и ε_1 , такие, что

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq K, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1. \quad (3.11)$$

Действительно,

$$L_\varepsilon^{-1} = [L_\varepsilon - L_0 + L_0]^{-1} = L_0^{-1}[(L_\varepsilon - L_0)L_0^{-1} + I]^{-1}.$$

Оператор $L_\varepsilon - L_0$ имеет вид

$$L_\varepsilon - L_0 = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A_0.$$

Поэтому операторы $D_\varepsilon = (L_\varepsilon - L_0)L_0^{-1}$ равномерно ограничены, а, следовательно, справедливо неравенство (3.11). ■

Замечание 3.1. В процессе доказательства леммы нам необходимо было установить, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x = f(t) \quad (3.12)$$

имеет при достаточно малых ε единственное пп решение $x(t)$ для любой пп функции $f(t)$. В (3.12) введем новое время $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Получим систему

$$\frac{dx}{d\tau} - \varepsilon A(\tau)x = \varepsilon f(\varepsilon\tau). \quad (3.13)$$

Таким образом, лемма о регулярности следует из утверждения о том, что система (3.13) для любой пп функции $f(\tau)$ имеет единственное пп решение.

Воспользуемся этим замечанием, чтобы доказать лемму о регулярности, предполагая, что элементы матрицы $A(\tau)$ — правильные пп функции. В этом случае нам не понадобится лемма Боголюбова. В системе (3.13) сделаем замену

$$x = y + \varepsilon Y(\tau)y, \quad (3.14)$$

где пп матрицу $Y(\tau)$ определим позднее. Подставляя (3.14) в (3.13), получим

$$(I + \varepsilon Y(\tau))\frac{dy}{d\tau} + \varepsilon \frac{dY}{d\tau}y = \varepsilon A(\tau)y + \varepsilon^2 A(\tau)Y(\tau)y + \varepsilon f(\varepsilon\tau). \quad (3.15)$$