

В.П. Радин

Ю.Н. Самогин

В.П. Чирков

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ



В.П. Радин
Ю.Н. Самогин
В.П. Чирков

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 539.3

ББК 22.2

Р 15

Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. **Метод конечных элементов в динамических задачах сопротивления материалов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 316 с. — ISBN 978-5-9221-1485-1.

Излагается метод конечных элементов (МКЭ) и методика его применения в динамических расчетах стержневых систем при различных видах деформаций (растяжении–сжатии, кручении, изгибе), а также при сложных видах нагружения стержней: растяжении–сжатии с кручением, косом изгибе, косом изгибе в сочетании с растяжением–сжатием, косом изгибе с растяжением–сжатием и кручением. Подробно рассмотрено решение на основе МКЭ большого количества динамических задач сопротивления материалов. Приведены расчетные задания для самостоятельного решения.

Книга предназначена студентам, изучающим дисциплины «Сопротивление материалов» и «Механика материалов и конструкций». Она также может быть полезной инженерам машиностроительных и теплоэнергетических специальностей.

Рецензенты:

д.т.н., проф. А.Е. Белкин

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана);

д.т.н., проф. А.М. Белостоцкий

(Московский государственный строительный университет)

В оформлении обложки использована фотография с сайта www.laifgloge.net

© ФИЗМАТЛИТ, 2013

© В. П. Радин, Ю. Н. Самогин,
В. П. Чирков, 2013

ISBN 978-5-9221-1485-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Метод конечных элементов в динамических расчетах стержневых систем.	7
1.1. Краевая задача и ее вариационная трактовка	7
1.2. Учет граничных условий	14
1.3. Свободные колебания	14
1.4. Установившиеся вынужденные колебания	16
1.5. Неустановившиеся вынужденные колебания	18
1.6. Учет диссипации в уравнениях движения МКЭ.	20
Глава 2. Растяжение–сжатие	23
2.1. Описание конечного элемента	23
2.2. Матрицы инерции и жесткости элемента	26
2.3. Матрица жесткости псевдостержневого элемента «пружина».	27
2.4. Матрица инерции сосредоточенного тела	28
2.5. Вектор узловых нагрузок.	29
2.6. Переход к глобальной системе координат	29
2.7. Примеры	31
Глава 3. Поперечный изгиб	48
3.1. Типичные конечные элементы	48
3.2. Матрица инерции и матрица жесткости элемента	54
3.3. Матрица жесткости псевдостержневого элемента-пружины.	56
3.4. Матрица инерции присоединенного твердого тела	58
3.5. Вектор узловых нагрузок.	59
3.6. Переход от локальной системы координат к глобальной	62
3.7. Примеры	63
Глава 4. Кручение	119
4.1. Описание конечного элемента	119
4.2. Матрица инерции и матрица жесткости элемента	121
4.3. Вектор узловых нагрузок.	123
4.4. Примеры	123
Глава 5. Сложные виды нагружения стержней	141
5.1. Классификация видов нагружения стержней.	141
5.2. Растяжение–сжатие с кручением	142
5.3. Косой изгиб	163
5.4. Косой изгиб в сочетании с растяжением–сжатием	232
5.5. Общий случай нагружения стержня	258
Глава 6. Расчетные задания.	293
Задача № 1.	293
Задача № 2.	295
Задача № 3.	297
Задача № 4.	299
Задача № 5.	301
Задача № 6.	303
Задача № 7.	305
Задача № 8.	307
Список обозначений	309
Список литературы	313

ПРЕДИСЛОВИЕ

В подавляющем большинстве случаев прочностные расчеты сложных технических объектов в настоящее время проводятся с использованием мощных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов (МКЭ). Наиболее известные из них — Ansys, Cosmos, Stark и др. Использование этих комплексов не исключает творческого инженерного подхода к разработке расчетных схем, включающего схематизацию статических и динамических нагрузок, осмысленную подготовку исходных данных, грамотное истолкование полученных результатов. В связи с этим важным элементом в инженерной подготовке бакалавров и магистров направления «Прикладная механика» профиля «Динамика, прочность и надежность машин, приборов и аппаратуры» является знание не только фундаментальных основ статических и динамических расчетов конструкций на прочность, но и численная реализация этих расчетов с использованием современных вычислительных методов.

Если по дисциплине «Сопротивление материалов» или, как иногда называют эту техническую дисциплину «Механика материалов и конструкций», имеется выпущенная в разное время обширная литература [1–12], то по вопросам применения современных вычислительных методов и алгоритмизации прочностных расчетов, ориентированных на применение мощной компьютерной техники, наблюдается существенный пробел. Особая необходимость в подобного рода учебниках и учебных пособиях имеет место в области динамических расчетов механических систем. Цель данного учебного пособия — помочь студентам в освоении фундаментальных основ и практического приложения МКЭ для расчета конструкций при динамическом нагружении с иллюстрацией таких расчетов на большом количестве примеров при различных видах деформации стержней и стержневых систем.

Настоящее учебное пособие можно считать продолжением недавно вышедшей из печати книги «Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов», посвященной расчетам на прочность при статическом нагружении [5]; оно также основано на опыте преподавания этой дисциплины в НИУ МЭИ и, как уже отмечалось выше,

ориентировано на динамические расчеты строительных конструкций и деталей машин.

Книга состоит из 6 глав. Первая глава посвящена теоретическим основам метода конечных элементов в динамических расчетах стержневых систем. Дана вариационная трактовка МКЭ. Сформулированы основные понятия и этапы применения МКЭ: дискретизация стержневых систем; выбор основных узловых неизвестных; аппроксимация искомого решения и построение основных разрешающих уравнений МКЭ. Рассмотрены методические основы решения задач на собственные значения, установившиеся и неустановившиеся вынужденные колебания. В главах 2–4 подробно разобраны динамические задачи сопротивления материалов на базе МКЭ при растяжении–сжатии, поперечном изгибе, кручении; изучена зависимость собственных частот от схемы дискретизации и от способа аппроксимации распределенной массы; рассмотрено влияние жесткости упругих связей и их расположения на частотный спектр; проанализированы амплитудно-частотные характеристики. Проведены расчеты на прочность с учетом циклического изменения напряжений в балках; в безинерционном вале, несущем два диска, посаженных с эксцентриситетами. Проводится расчет балки на упругом основании, расчет здания на сейсмические воздействия; изучена реакция балки на импульсное воздействие. Изучены также вопросы прохождения системы через резонанс, установления вынужденных колебаний под влиянием полигармонического воздействия.

В главе 5 проводятся динамические расчеты на прочность стержневых систем при сложных видах нагружения: растяжении–сжатии с кручением, косом изгибе, косом изгибе в сочетании с растяжением–сжатием, косом изгибе с растяжением–сжатием и кручением. Показаны алгоритмы формирования матриц жесткости, вектора узловых нагрузок для сложных видов нагружения с использованием соответствующих результатов для простых видов нагружения. Рассмотрены вынужденные колебания промежуточного вала редуктора до и после наступления двухфазного короткого замыкания. Приведены расчеты критических частот вращения ротора. Показано влияние инерции поворота ротора, гироскопического эффекта на его собственные частоты и формы колебаний. Приведены расчеты наибольших динамических напряжений ротора, опирающегося на два одинаковых эллиптических подшипника, с учетом неконсервативных упругих сил, относительной пороговой мощности при рабочей скорости вращения; получены амплитуды колебаний сосредоточенной массы при установившихся вынужденных колебаниях под действием гармонической силы; построены амплитудно-частотные характеристики.

В главе 6 приведены типовые расчетные задания по сопротивлению материалов, предлагаемых студентам для освоения метода конечных

элементов. Сюда входят: расчет собственных частот и форм при продольных, крутильных и изгибных свободных колебаниях стержней с распределенными массовыми и жесткостными характеристиками; расчет ступенчатого стержня, нагруженного продольными периодическими сосредоточенными силами; расчет стальной балки с заданной формой поперечного сечения при установившихся вынужденных колебаниях под действием гармонических сил; расчет электродвигателя, установленного на двух стальных балках двутаврового профиля; установившиеся вынужденные колебания под действием полигармонического изменяющегося крутящего момента; сложные виды нагружения стержневых систем; расчет на прочность стержневой системы, нагруженной пространственной системой гармонических сил; расчет вращающегося вала на выносливость при посадке дисков с эксцентриситетами в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Авторы надеются, что настоящее учебное пособие будет полезно как студентам, осваивающим методы динамических расчетов конструкций, так и молодым специалистам, работающим в конструкторских и проектных организациях.

Глава 1

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1. Краевая задача и ее вариационная трактовка

Покажем эквивалентность вариационного принципа Гамильтона–Остроградского и краевой задачи на примере стержня, работающего на растяжение–сжатие. Рассмотрим закрепленный на одном конце стержень длиной a , погонной массой ρF и жесткостью на растяжение EF . Стержень находится под действием распределенной нагрузки $q(z, t)$ и силы P , приложенной к свободному концу стержня (рис. 1.1).

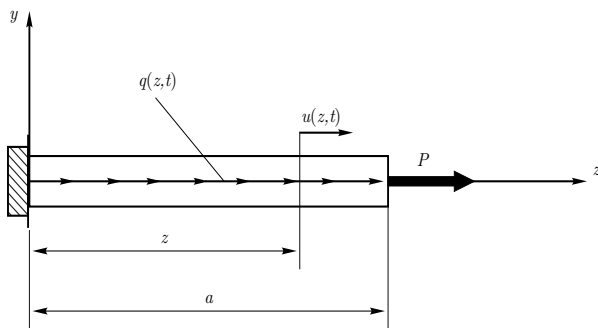


Рис. 1.1

Напомним формулировку принципа Гамильтона–Остроградского. Среди всех движений, совместимых со связями, достаточно близких к истинному и совпадающих с истинным в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени, истинное движение сообщает интегралу действия

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U + \Pi) dt$$

стационарное значение, т. е.

$$\delta I = 0. \quad (1.1)$$

В интеграле действия T (кинетическая энергия при продольных колебаниях стержня) определяется по следующей формуле:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \rho F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz.$$

Потенциальная энергия упругой деформации U ,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \sigma_z(z, t) \varepsilon_z(z, t) F dz = \frac{1}{2} \int_0^a E F \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz,$$

вычисляется с учетом того, что относительная деформация ε_z связана с продольным перемещением $u(z, t)$ соотношением Коши,

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z},$$

а напряжение σ_z в свою очередь связано с деформацией законом Гука,

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \frac{\partial u(z, t)}{\partial z},$$

и наконец, в выражении для интеграла действия Π (потенциальная энергия внешних сил) равна работе внешних сил с обратным знаком:

$$\Pi = - \int_0^a q u dz - P u(a, t) + \text{const}.$$

Запишем выражение для интеграла действия в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^a L dz - P u(a, t) \right) dt,$$

где через L обозначена линейная плотность лагранжиана:

$$L = \frac{1}{2} \rho F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E F \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - q u.$$

Вычислим вариацию квадратичного функционала (1.1), варьируя перемещения $u(z, t)$:

$$\tilde{u} = u + \delta u.$$

Здесь δu — вариации по Гамильтону: малые; совместимые со связями, изохронные (возможна перестановка операций дифференцирования и варьирования). В начале и в конце движения δu равны нулю:

$$\delta u(0, t) = 0, \quad \delta u(z, t_0) = 0, \quad \delta u(z, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \delta u.$$

Согласно правилам вычисления вариации функционала имеем

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^a \left[\frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right] dz - P \delta u(a, t) \right\} dt. \quad (1.2)$$

Преобразуем второй член этого выражения, используя правило вычисления производной от произведения и проводя интегрирование с учетом граничного условия при $z = 0$, $u(0, t) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) dz &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \delta u \right) dz - \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) \delta u dz = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \Big|_{z=a} \cdot \delta u(a, t) - \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) \delta u dz. \end{aligned}$$

Для третьего члена в выражении (1.2) применим правило интегрирования по частям по времени:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta u) dt &= \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) \delta u dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) \delta u dt, \end{aligned}$$

поскольку $\delta u(z, t_0) = \delta u(z, t_1) = 0$.

После проведенных преобразований выражение для вариации функционала δI примет вид

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^a \left[\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right] \delta u \right\} dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \Big|_{z=a} - P \right] \delta u(a, t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Из необходимого условия стационарности функционала $\delta I = 0$ в силу произвольности вариаций δu на основании основной леммы вариационного исчисления имеем уравнение Эйлера–Остроградского,

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = 0 \quad \text{при } 0 < z < a.$$

Естественное (силовое) граничное условие при $z = a$ будет

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} = P.$$

Учитывая выражения для линейной плотности лагранжиана L , получим уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(EF \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q. \quad (1.3)$$

Граничное условие при $z = a$ будет иметь вид

$$EF \frac{\partial u}{\partial z} = P. \quad (1.4)$$

Кроме того, краевая задача (1.3), (1.4) должна быть дополнена начальными условиями.

Таким образом, для определения функции $u(z, t)$ вместо рассмотрения краевой задачи (1.3), (1.4) можно воспользоваться условием стационарности интеграла действия (1.1). Существенное различие дифференциальной и интегральной формулировок заключается в том, что функционал $I[u(z, t)]$ содержит производные от функции до 1-го порядка вместо производных до 2-го порядка в краевой задаче.

На основании изложенного выше вариационного принципа получим уравнения метода конечных элементов, дополнив нагружение рассматриваемой системы (рис. 1.1) (кроме распределенной нагрузки $q(z, t)$ и силы P) еще сосредоточенными силами Q_i , приложенными в сечениях с координатами z_i .

В общем случае нагружения связь между компонентами вектора деформаций $\mathbf{\epsilon}$ и компонентами вектора перемещений $\mathbf{u}(z, t)$ дается соотношениями Коши. В матричной форме эта связь имеет вид

$$\mathbf{\epsilon}(z, t) = \mathbf{B} \mathbf{u}(z, t), \quad (1.5)$$

где матрица $\mathbf{B}$ называется матрицей деформаций. Элементы матрицы $\mathbf{B}$ составлены из операторов дифференцирования.

Для линейно-упругого материала вектор напряжений $\mathbf{\sigma}$ связан с вектором деформаций $\mathbf{\epsilon}$ законом Гука, который в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{\sigma}(z, t) = \mathbf{D} \mathbf{\epsilon}(z, t), \quad (1.6)$$

где матрица $\mathbf{D}$ называется матрицей упругости и зависит от упругих постоянных: E (модуля Юнга) и μ (коэффициента Пуассона). Подставляя (1.5) в (1.6), получим связь между вектором напряжений и вектором перемещений в виде

$$\boldsymbol{\sigma}(z, t) = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}(z, t). \quad (1.7)$$

Перепишем выражение для интеграла действия с учетом (1.5), (1.6) и (1.7) в матричной форме:

$$\begin{aligned} I[\mathbf{u}(z, t)] = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left(\frac{\partial \mathbf{u}(z, t)}{\partial t} \right)^T \rho F \left(\frac{\partial \mathbf{u}(z, t)}{\partial t} \right) dz dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \mathbf{u}^T(z, t) \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}(z, t) F dz dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \mathbf{u}^T(z, t) \mathbf{q}(z, t) dz dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \mathbf{u}^T(z_i, t) \mathbf{Q}_i(z_i, t) dt. \quad (1.8) \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс « T » означает операцию транспонирования вектора или матрицы.

Пусть стержневая конструкция разбита на p конечных элементов. В методе конечных элементов поле перемещений в каждом конечном элементе $\mathbf{u}_k(z, t)$, $k = 1, 2, \dots, p$, определяется вектором смещений узловых точек $\mathbf{f}_k$:

$$\mathbf{u}_k(z, t) = \mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{f}_k(t). \quad (1.9)$$

Здесь $\mathbf{H}_k(z)$ — матрица интерполирующих функций.

Суммируя кинетическую и потенциальную энергию по всей ансамблю конечных элементов, а также работу внешней нагрузки, с учетом (1.9) вместо выражения (1.8) приходим к следующему выражению для интеграла действия:

$$\begin{aligned} I[\mathbf{u}(z, t)] = & \sum_{k=1}^p I_k[\mathbf{u}_k(z, t)] = \sum_{k=1}^p I_k[\mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{f}_k(t)] = \\ = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{\partial \mathbf{f}_k^T}{\partial t} \mathbf{H}_k^T(z) \rho_k F_k \mathbf{H}_k(z) \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} dz dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{f}_k^T \mathbf{P}_k^T(z) \mathbf{D}_k \mathbf{P}_k(z) \mathbf{f}_k F_k dz dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{f}_k^T \mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{q}_k(z, t) dz dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \sum_i \mathbf{H}_k^T(z_i) \mathbf{Q}_i(z_i, t) dt.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь обозначено: $\mathbf{P}_k(z) = \mathbf{B}_k \mathbf{H}_k(z)$. Так как вектор $\mathbf{f}_k$ составлен из узловых неизвестных k -го конечного элемента, не зависящих от текущей координаты интегрирования z , то этот вектор можно вынести за знак интегрирования:

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{f}) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \frac{d\mathbf{f}_k^T}{dt} \left\{ \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{H}_k^T(z) \rho_k F_k \mathbf{H}_k(z) dz \right\} \frac{d\mathbf{f}_k}{dt} dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \left\{ \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{P}_k^T(z) \mathbf{D}_k \mathbf{P}_k(z) F_k dz \right\} \mathbf{f}_k dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}_k^T \left\{ \sum_{k=1}^p \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{q}_k(z, t) dz \right\} dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \sum_i \mathbf{H}_k^T(z_i) \mathbf{Q}_i(z_i, t) dt.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь символом $\mathbf{f}$ без индекса обозначен вектор, составленный из компонент векторов $\mathbf{f}_k$. Если ввести матрицы

$$\mathbf{M}_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{H}_k(z)^T \rho_k F_k \mathbf{H}_k(z) dz, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{K}_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{P}_k^T(z) \mathbf{D}_k \mathbf{P}_k(z) F_k dz, \tag{1.13}$$

которые, соответственно, называются матрицей инерции и матрицей жесткости конечного элемента, а также вектор внешних нагрузок, приведенных к узлам конечного элемента,

$$\mathbf{R}_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{q}_k(z, t) dz + \sum_i \mathbf{H}_k^T(z_i) \mathbf{Q}_i(z_i, t), \tag{1.14}$$

то выражение (1.1) приводится к виду

$$I(\mathbf{f}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{d\mathbf{f}_k^T}{dt} \mathbf{M}_k \frac{d\mathbf{f}_k}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{f}_k + \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \mathbf{R}_k \right\} dt. \quad (1.15)$$

Это выражение можно также записать в форме

$$I(\mathbf{f}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dt} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{R} \right\} dt. \quad (1.16)$$

Здесь матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ называются матрицами инерции и жесткости стержневой конструкции или глобальными матрицами. Их элементы составлены из элементов матриц $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{K}_k$ путем суммирования по общим узлам, принадлежащим соседним конечным элементам. Вектор $\mathbf{R}$ в (1.16) является вектором внешних нагрузок, приведенных к узлам конечных элементов, или глобальным вектором внешних нагрузок. Этот вектор формируется по тем же правилам, что и глобальные матрицы инерции и жесткости.

Условие стационарности интеграла действия (1.1) эквивалентно условию

$$\begin{aligned} \delta I(\mathbf{f}) &= \delta \left(\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dt} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{R} \right\} dt \right) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{f}^T \left\{ -\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} - \mathbf{K} \mathbf{f} + \mathbf{R} \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

На основании основной леммы вариационного исчисления выполнение условия (1.17) возможно, когда коэффициенты при вариациях $\delta \mathbf{f}$ обращаются в нуль, т. е.

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{f}(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{f}(t) = \mathbf{R}(t). \quad (1.18)$$

Решение данной системы разрешающих дифференциальных уравнений метода конечных элементов с начальными условиями

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_*(0), \quad \frac{d\mathbf{f}(0)}{dt} = \dot{\mathbf{f}}_*(0)$$

позволяет определить узловые неизвестные и, следовательно, с использованием формул (1.9), а также (1.5) и (1.6) найти деформации и напряжения.

1.2. Учет граничных условий

Основная система разрешающих уравнений (1.18) построена для незакрепленного ансамбля конечных элементов конструкции, поэтому необходимо учесть условия граничного закрепления. Пусть $\mathbf{f}_s$ — s -мерный вектор узловых перемещений, среди которых l узловых перемещений, образующих вектор $\mathbf{f}_l$, заданы и являются по существу граничными условиями. Перепишем матричное уравнение (1.18) в блочном виде ($r = s - l$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{rl} \\ \mathbf{M}_{lr} & \mathbf{M}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 \mathbf{f}_r}{dt^2} \\ \frac{d^2 \mathbf{f}_l}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rl} \\ \mathbf{K}_{lr} & \mathbf{K}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r \\ \mathbf{R}_l \end{bmatrix}.$$

При заданных перемещениях $\mathbf{f}_l$ имеют место уравнения

$$\mathbf{M}_{rr} \frac{d^2 \mathbf{f}_r}{dt^2} + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{f}_r = \mathbf{R}_r - \mathbf{M}_{rl} \frac{d^2 \mathbf{f}_l}{dt^2} - \mathbf{K}_{rl} \mathbf{f}_l, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{M}_{lr} \frac{d^2 \mathbf{f}_r}{dt^2} + \mathbf{M}_{ll} \frac{d^2 \mathbf{f}_l}{dt^2} + \mathbf{K}_{lr} \mathbf{f}_r + \mathbf{K}_{ll} \mathbf{f}_l. \quad (1.20)$$

Из уравнения (1.19) находится вектор узловых перемещений $\mathbf{f}_r$, а затем из уравнения (1.20) — неизвестный вектор узловых усилий $\mathbf{R}_l$. В частном случае, когда $\mathbf{f}_l = 0$, уравнения (1.19) и (1.20) упрощаются и имеют вид

$$\mathbf{M}_{rr} \frac{d^2 \mathbf{f}_r}{dt^2} + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{f}_r = \mathbf{R}_r, \quad \mathbf{R}_l = \mathbf{M}_{lr} \frac{d^2 \mathbf{f}_r}{dt^2} + \mathbf{K}_{lr} \mathbf{f}_r.$$

При этом матрицы $\mathbf{M}_{rr}$, $\mathbf{K}_{rr}$ можно получить путем вычеркивания столбцов и строк матриц $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, соответствующих компонентам вектора $\mathbf{f}_l = 0$.

1.3. Свободные колебания

Колебания называются свободными, если они происходят при отсутствии переменных внешних воздействий и без поступления энергии извне. Они происходят за счет первоначально накопленной энергии, величина которой определяется перемещениями и скоростями, заданными системе в некоторый начальный момент времени.

При исследовании свободных колебаний стержневых систем решение для узловых перемещений ищется в виде

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{W} e^{i\omega t}, \quad (1.21)$$

где $\mathbf{W}$ — вектор собственных форм, ω — частота. Положим в уравнении (1.18) $\mathbf{R}(t) = 0$. Тогда подстановка (1.21) приводит к системе

линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент вектора (матрица-столбец) $\mathbf{W}$:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (1.22)$$

что составляет обобщенную алгебраическую проблему на собственные значения. Система (1.22) имеет нетривиальное решение $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$, если ее определитель равен нулю, т.е. приходим к характеристическому (частотному) уравнению

$$\det [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0. \quad (1.23)$$

Раскрывая определитель (1.23), получим полином относительно ω^2 степени n , равной размерности вектора $\mathbf{f}(t)$ и составляющей число степеней свободы конечно-элементной модели. Положительные корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ уравнения (1.23) называют собственными частотами системы, а упорядоченную последовательность частот $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ — частотным спектром.

Собственные формы колебаний, характеризуемые вектором $\mathbf{W}^{(j)}$, которые соответствуют собственной частоте ω_j , находятся из системы уравнений (1.22) после подстановки $\omega = \omega_j$:

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \mathbf{W}^{(j)} = \mathbf{0}. \quad (1.24)$$

Так как ω_j является корнем уравнения (1.23), то алгебраическая система уравнений (1.24) является линейно зависимой. Например, если ω_j — простой (не кратный) корень характеристического уравнения (1.23), то ранг матрицы $(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M})$, который равен $n - 1$, определяет число линейно независимых уравнений системы (1.24). Тогда для определения компонент вектора собственных форм

$$(\mathbf{W}^{(j)})^T = \{W_1^{(j)}, W_2^{(j)}, \dots, W_{n-1}^{(j)}\}^T$$

имеем систему $n - 1$ уравнений:

$$\sum_{l=1}^{n-1} [\mathbf{K}_{rl} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{rl}] \mathbf{W}_l^{(j)} = - [\mathbf{K}_{rn} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{rn}] \mathbf{W}_n^{(j)}, \quad r = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (1.25)$$

которую можно решить с точностью до постоянного множителя $W_n^{(j)}$. Данную неопределенность можно устранить путем нормирования полученного вектора. Чаще всего в динамическом анализе используют условие нормирования по матрице инерции в виде

$$(\mathbf{W}^{(j)})^T \mathbf{M} \mathbf{W}^{(j)} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

Если собственная частота ω_j имеет кратность m , то ранг системы (1.24) равен $n - m$. В этом случае вектор собственных форм $\mathbf{W}^{(j)}$ определяется с точностью до m произвольных постоянных, которые могут быть выбраны так, чтобы получить n независимых собственных форм, соответствующих n -кратной собственной частоте ω_j . Для определения остальных компонент вектора $\mathbf{W}^{(j)}$ имеем систему $n - m$ уравнений

$$\sum_{l=1}^{n-m} [\mathbf{K}_{rl} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{rl}] \mathbf{W}_l^{(j)} = - \sum_{l=n-m+1}^n [\mathbf{K}_{rl} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{rl}] \mathbf{W}_l^{(j)},$$

$$r = 1, 2, \dots, n - m. \quad (1.27)$$

Собственные векторы, соответствующие различным собственным частотам, удовлетворяют условиям ортогональности по кинетической энергии,

$$(\mathbf{W}^{(j)})^T \mathbf{M} \mathbf{W}^{(l)} = 0, \quad j \neq l, \quad (1.28)$$

и по потенциальной энергии,

$$(\mathbf{W}^{(j)})^T \mathbf{K} \mathbf{W}^{(l)} = 0, \quad j \neq l. \quad (1.29)$$

В динамических расчетах задача на собственные значения (1.23) может формулироваться следующим образом:

- найти все собственные частоты и соответствующие им формы (полная проблема собственных значений);
- определить наименьшую (наибольшую) собственную частоту или несколько низших (высших) собственных частот и соответствующие им формы;
- вычислить собственные частоты и формы, принадлежащие заданному интервалу частот;
- найти несколько собственных частот, ближайших к заданным величинам, и соответствующие им формы.

В последних трех вариантах имеет место так называемая частичная проблема собственных значений.

1.4. Установившиеся вынужденные колебания

Пусть внешние силы $\mathbf{R}(t)$ в уравнении (1.18) изменяются по гармоническому закону,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \sin \vartheta t, \quad (1.30)$$

с амплитудами $\mathbf{R}_0$ и одинаковой частотой ϑ .

Рассмотрим два способа построения решения уравнения (1.18), описывающих колебания с частотой вынуждающей силы.

Первый способ основан на представлении вектора обобщенных координат в виде

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_0 \sin \vartheta t \quad (1.31)$$

Для нахождения вектора амплитуд колебаний $\mathbf{F}_0$ подставим вид решения (1.31) в уравнение (1.18). С учетом представления правой части в виде (1.30) приходим к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$[\mathbf{K} - \vartheta^2 \mathbf{M}] \mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0. \quad (1.32)$$

Решение уравнений (1.32) существует, если

$$\det [\mathbf{K} - \vartheta^2 \mathbf{M}] \neq 0.$$

Тогда

$$\mathbf{F}_0 = [\mathbf{K} - \vartheta^2 \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{R}_0. \quad (1.33)$$

Из (1.33) видно, что при совпадении частоты вынужденных колебаний ϑ с одной из собственных частот ω_j определитель (1.23) обращается в нуль, а амплитуды (1.33) неограниченно возрастают. Такое явление называется резонансом. Графики зависимостей $F_{k0}(\vartheta)$ имеют смысл амплитудно-частотных характеристик системы.

Второй способ представляет движение в виде разложения по собственным формам колебаний. Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{W} \mathbf{u}(t), \quad (1.34)$$

где $\mathbf{W}$ — матрица, составленная по столбцам из собственных форм колебаний,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1^{(1)} & \cdots & W_1^{(n)} \\ W_2^{(1)} & \cdots & W_2^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_n^{(1)} & \cdots & W_n^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

В скалярной форме разложение (1.34) имеет вид

$$f_k(t) = \sum_{j=1}^n W_k^{(j)} u_j(t). \quad (1.36)$$

Подстановка вида решения (1.34) в уравнение (1.18) после умножения слева на матрицу $\mathbf{W}^T$ приводит к разделяющейся системе уравнений

$$\frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} + \omega_j^2 u_j(t) = u_{j0} \sin \vartheta t, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.37)$$

При этом учтено, что

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} = \text{diag} \{ \omega_j^2 \}, \quad u_{j0} = \sum_{k=1}^n W_k^{(j)} R_{k0}.$$

Здесь u_{j0} — компоненты вектора $\mathbf{u}_0 = \mathbf{W}^T \mathbf{R}_0$, $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Решение каждого уравнения (1.37) имеет вид

$$u_j(t) = \frac{u_{j0}}{\omega_j^2 - \vartheta^2} \sin \vartheta t, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad \omega_j \neq \vartheta. \quad (1.38)$$

Для получения решения в исходных обобщенных координатах необходимо учесть преобразование (1.36):

$$f_k(t) = \sum_{j=1}^n W_k^{(j)} \frac{u_{j0}}{\omega_j^2 - \vartheta^2} \sin \vartheta t, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.39)$$

1.5. Неустановившиеся вынужденные колебания

Колебательный процесс носит неустановившийся характер, если внешняя нагрузка $\mathbf{R}(t)$ в уравнении (1.18) изменяется произвольным образом и (или) движение происходит из начального состояния

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_*, \quad \frac{d\mathbf{f}(0)}{dt} = \dot{\mathbf{f}}_*.$$

В этом случае неустановившиеся колебания описываются уравнением (1.18) с начальными условиями.

Общее решение $\mathbf{f}(t)$ представим в виде суммы решения $\xi_0(t)$ однородного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, и частного решения $\xi_*(t)$ неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях, т. е.

$$\mathbf{f}(t) = \xi_0(t) + \xi_*(t). \quad (1.40)$$

Решение $\xi_0(t)$ описывает свободные колебания, происходящие за счет начальных условий:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \xi_0(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \xi_0(t) = 0, \quad (1.41)$$

$$\xi_0(0) = \mathbf{f}_*, \quad \frac{d\xi_0(t)}{dt} = \dot{\mathbf{f}}_*. \quad (1.42)$$

Решение уравнения (1.41) будем искать в виде (1.34), т. е.

$$\xi_0(t) = \mathbf{W} \mathbf{u}_0(t). \quad (1.43)$$

После подстановки (1.43) в уравнение (1.41) и в начальные условия (1.42), умножения слева на $\mathbf{W}^T$ приходим к разделяющейся системе однородных уравнений

$$\frac{d^2 u_{j0}(t)}{dt^2} + \omega_j^2 u_{j0}(t) = 0 \quad (1.44)$$

с начальными условиями

$$u_{j0} = \sum_{k=1}^n W_k^{(j)} f_{*k}, \quad \vartheta_{j0} = \left. \frac{du_{j0}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^n W_k^{(j)} \dot{f}_{*k}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.45)$$

Каждое из уравнений (1.44) описывает колебания системы с одной степенью свободы. Решение (1.44) имеет вид

$$u_{j0}(t) = u_{j0} \cos \omega_j t + \frac{\vartheta_{j0}}{\omega_j} \sin \omega_j t, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.46)$$

В исходных координатах с учетом разложения (1.43) получим

$$\xi_{0k}(t) = \sum_{j=1}^n W_k^{(j)} \left\{ u_{j0} \cos \omega_j t + \frac{\vartheta_{j0}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.47)$$

Частное решение $\xi_*(t)$ описывает колебания, происходящие за счет действия внешней нагрузки $\mathbf{R}(t)$,

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \xi_*(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \xi_*(t) = \mathbf{R}(t), \quad (1.48)$$

при нулевых начальных условиях

$$\xi_*(0) = 0, \quad \left. \frac{d\xi_*(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (1.49)$$

Подставляя разложение

$$\xi_*(t) = \mathbf{W} \mathbf{u}_*(t)$$

в уравнение (1.48) и умножая слева на матрицу $\mathbf{W}^T$, получим

$$\frac{d^2 u_{j*}(t)}{dt^2} + \omega_j^2 u_{j*}(t) = r_{*j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.50)$$

где введено обозначение $r_{*j}(t)$ для компонент вектора

$$\mathbf{R}_*(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{R}(t).$$

Решение уравнений (1.50), имеющее вид

$$u_{j*}(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin \omega_j(t - \tau) r_{*j}(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (1.51)$$

носит имя интеграла Дюамеля. В исходных обобщенных координатах решение (1.51) запишется в виде

$$\xi_{*k}(t) = \sum_{j=1}^n W_k^{(j)} \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin \omega_j(t - \tau) r_{*j}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.52)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.18) есть сумма однородного решения (1.47), удовлетворяющего начальным условиям, и частного решения (1.52):

$$f_k(t) = \xi_{0k}(t) + \xi_{*k}(t) = \sum_{j=1}^n W_k^{(j)} \left\{ u_{j0} \cos \omega_j t + \frac{\dot{v}_{j0}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right\} + \\ + \sum_{j=1}^n W_k^{(j)} \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin \omega_j(t - \tau) r_{*j}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.53)$$

1.6. Учет диссипации в уравнениях движения МКЭ

Причины, приводящие к рассеянию энергии в упругих системах, можно условно разбить на три группы:

- 1) потери энергии в окружающую среду («внешнее» трение);
- 2) потери энергии, вызванные внутренними процессами в материале («внутреннее» трение);
- 3) потери энергии, связанные с трением в опорах, шарнирах, узлах конструкции.

Диссипацию в уравнениях движения (1.18) учитывают путем введения диссипативных сил, пропорциональных скоростям движения: $\mathbf{D} \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}$, где $\mathbf{D}$ — матрица демпфирования. В этом случае уравнение (1.18) может быть представлено в виде

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{f}(t)}{dt^2} + \mathbf{D} \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{f}(t) = \mathbf{R}(t) \quad (1.54)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_*(0), \quad \frac{d\mathbf{f}(0)}{dt} = \dot{\mathbf{f}}_*(0). \quad (1.55)$$

В практических расчетах матрицу демпфирования для каждого j -го конечного элемента представляют в виде линейной комбинации,

$$\mathbf{D}^{(j)} = \alpha_1^{(j)} \mathbf{M}^{(j)} + \alpha_2^{(j)} \mathbf{K}^{(j)}, \quad (1.56)$$

где $\alpha_1^{(j)}$, $\alpha_2^{(j)}$ — коэффициенты пропорциональности. Например, при $\alpha_1^{(j)} \neq 0$, $\alpha_2^{(j)} = 0$ матрица демпфирования пропорциональна матрице инерции («внешнее» трение); при $\alpha_1^{(j)} = 0$, $\alpha_2^{(j)} \neq 0$ матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости («внутреннее» трение).

Решение уравнения (1.54), как правило, представляют в виде разложения по собственным формам колебаний,

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{W} \mathbf{u}(t). \quad (1.57)$$

Подстановка этого разложения в уравнение и умножение слева на матрицу $\mathbf{W}^T$ приводит к разделяющейся системе уравнений

$$\frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} + 2\varepsilon_j \frac{du_j(t)}{dt} + \omega_j^2 u_j(t) = r_{j*}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.58)$$

с начальными условиями

$$u_{j0} = \sum_{k=1}^n W_k^{(j)} f_{*k}, \quad \vartheta_{j0} = \left. \frac{du_{j0}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^n W_k^{(j)} \dot{f}_{*k}(0), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} &= \mathbf{E}, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} = \text{diag} \{ \omega_j^2 \}, \\ \mathbf{W}^T \mathbf{D} \mathbf{W} &= \text{diag} \{ \alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)} \omega_j^2 \} = \text{diag} \{ 2\varepsilon_j \} \end{aligned} \quad (1.59)$$

и введены обозначения для компонент $r_{*j}(t)$ вектора

$$\mathbf{R}_*(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{R}(t)$$

и для коэффициентов демпфирования

$$2\varepsilon_j = \alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)} \omega_j^2.$$

Общее решение уравнения (1.58) складывается из решения $u_{j0}(t)$ однородного уравнения и частного решения $u_{j*}(t)$, неоднородного. Решение однородного уравнения дается формулой, аналогичной (1.47):

$$u_{j0}(t) = e^{-\varepsilon_j t} \left\{ u_{j0} \cos \omega_{j\varepsilon} t + \frac{u_{j0} \varepsilon_j + \vartheta_{j0}}{\omega_{j\varepsilon}} \sin \omega_{j\varepsilon} t \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.60)$$

Здесь $\omega_{j\varepsilon} = \sqrt{\omega_j^2 - \varepsilon_j^2}$ — собственная частота с поправкой на диссипацию.

Частное решение получим с использованием интеграла Дюамеля,

$$u_{*j}(t) = \frac{1}{\omega_{j\varepsilon}} \int_0^t e^{-\varepsilon_j(t-\tau)} r_{*j}(\tau) \sin \omega_{j\varepsilon}(t-\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.61)$$

Переход к искомому решению $\mathbf{f}(t)$ осуществляется преобразованием (1.57).

Для случая установившегося движения при гармонической внешней силе

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \cos \vartheta t$$

уравнение (1.58) запишется в виде

$$\frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} + 2\varepsilon_j \frac{du_j(t)}{dt} + \omega_j^2 u_j(t) = r_{j*} \cos \vartheta t, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.62)$$

Здесь r_{*j} — компоненты вектора $\mathbf{R}_* = \mathbf{W}^T \mathbf{R}_0$.

Решение уравнения (1.62) представим в виде

$$u_j(t) = A_{1j} \cos \vartheta t + A_{2j} \sin \vartheta t. \quad (1.63)$$

После подстановки (1.63) в уравнения (1.62) и приравнивания коэффициентов при гармониках $\cos \vartheta t$ и $\sin \vartheta t$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta t : (\omega_j^2 - \vartheta^2) A_{1j} - 2\varepsilon_j A_{2j} &= r_{*j}, \\ \sin \vartheta t : -2\varepsilon_j \vartheta A_{1j} + (\omega_j^2 - \vartheta^2) A_{2j} &= 0, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$.

Решение (1.64) относительно коэффициентов A_{1j} и A_{2j} имеет вид

$$\begin{aligned} A_{1j} &= \frac{\omega_j^2 - \vartheta^2}{\{\omega_j^2 - \vartheta^2\}^2 + 4\varepsilon_j^2 \vartheta^2} r_{*j}, \\ A_{2j} &= \frac{2\varepsilon_j \vartheta}{\{\omega_j^2 - \vartheta^2\}^2 + 4\varepsilon_j^2 \vartheta^2} r_{*j}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$.

Окончательно решение (1.63) примет вид

$$u_j(t) = \frac{r_{*j}}{(\omega_j^2 - \vartheta^2)^2 + 4\varepsilon_j^2 \vartheta^2} [(\omega_j^2 - \vartheta^2) \cos \vartheta t + 2\varepsilon_j \vartheta \sin \vartheta t]. \quad (1.66)$$

Переход к искомому решению $\mathbf{f}(t)$ осуществляется при помощи преобразования (1.57).

Глава 2

РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

2.1. Описание конечного элемента

На рис. 2.1 приведены характерные стержневые конструкции, работающие на растяжение–сжатие. В дальнейшем предполагается, что амплитудные значения сжимающих усилий в стержнях меньше критических и не вызывают потерю устойчивости.

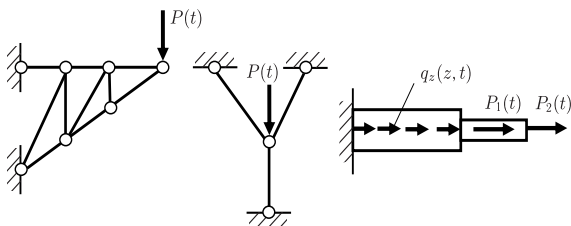


Рис. 2.1

Если в качестве конечных элементов принять отдельные стержни, то дискретная модель будет геометрической копией реальной конструкции. В качестве узловых неизвестных принимаем перемещения узловых точек. Типичный n -й конечный элемент, работающий на растяжение–сжатие показан на рис. 2.2. Длина элемента a_n , площадь поперечного сечения $F^{(n)}$, плотность материала ρ_n , модуль упругости $E^{(n)}$.

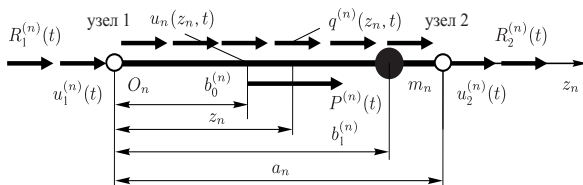


Рис. 2.2

Элемент нагружен усилиями взаимодействия со смежными элементами $R_1^{(n)}(t)$, $R_2^{(n)}(t)$, образующими вектор

$$\mathbf{R}_n(t) = \begin{bmatrix} R_1^{(n)}(t) \\ R_2^{(n)}(t) \end{bmatrix},$$

соответствующий распределенной вдоль оси стержня нагрузке интенсивностью $q^{(n)}(z_n, t)$, сосредоточенной силе $P^{(n)}(t)$, приложенной в сечении $z_n = b_0^{(n)}$. Для конечного элемента используется индивидуальная локальная нумерация и локальная система координат $O_n z_n$. При этом локальная нумерация делается по единому правилу: начало координат располагается в узле, номер которого соответствует меньшему из глобальных номеров данного элемента; локальная ось всегда направлена от узла с меньшим номером к узлу с большим. Ось $O_n z_n$ совпадает с осью стержня.

Положение конечного элемента однозначно определяется заданием двух независимых узловых перемещений $u_1^{(n)}(t)$ и $u_2^{(n)}(t)$ (две локальные степени свободы), которые образуют вектор

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

Положительные направления компонент вектора эквивалентных силовых факторов $\mathbf{R}_n(t)$ и вектора узловых перемещений $\mathbf{f}_n(t)$ элемента приведены на рис. 2.2. Аппроксимация искомой функции продольного смещения $u_n(z_n, t)$ в локальной системе координат может быть записана в виде

$$u_n(z_n, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)z_n. \quad (2.1)$$

Неизвестные параметры $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ определяются из краевых условий

$$\begin{aligned} u_n(0, t) &= u_1^{(n)}(t), \\ u_n(a_n, t) &= u_2^{(n)}(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя выражение (2.1) в формулы (2.2), находим

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= u_1^{(n)}(t), \\ \alpha_1(t) &= \frac{u_1^{(n)}(t) - u_2^{(n)}(t)}{a_n}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

откуда получим для интерполирующего полинома конечного элемента выражение

$$u_n(z_n, t) = u_1^{(n)}(t) + \frac{u_2^{(n)}(t) - u_1^{(n)}(t)}{a_n} z_n.$$

В матричной форме это выражение записывается в виде

$$\begin{aligned} u_n(z_n, t) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_n}{a_n} & \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} H_1^{(n)}(z_n) & H_2^{(n)}(z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H}_n(z_n) \mathbf{f}_n(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функции

$$H_1^{(n)}(z_n) = 1 - \frac{z_n}{a_n} \quad \text{и} \quad H_2^{(n)}(z_n) = \frac{z_n}{a_n},$$

образующие вектор-строку $\mathbf{H}_n(z_n)$, представляют собой функции формы и удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{aligned} H_1^{(n)}(0) &= 1, & H_1^{(n)}(a_n) &= 0, \\ H_2^{(n)}(0) &= 0, & H_2^{(n)}(a_n) &= 1. \end{aligned}$$

Связь между деформациями $\varepsilon_z^{(n)}(t)$ и продольными перемещениями $u_n(z_n, t)$ для n -го конечного элемента дается соотношением Коши,

$$\varepsilon_z^{(n)}(t) = \frac{\partial u_n(z_n, t)}{\partial z_n}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в (2.5), получим связь между узловыми перемещениями и деформациями в конечном элементе:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{(n)}(t) &= \frac{\partial}{\partial z_n} \begin{bmatrix} H_1^{(n)}(z_n) & H_2^{(n)}(z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dH_1^{(n)}(z_n)}{dz_n} & \frac{dH_2^{(n)}(z_n)}{dz_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d(1 - z_n/a_n)}{dz_n} & \frac{dz_n/a_n}{dz_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{B}_n \mathbf{f}_n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь введено обозначение для матрицы деформаций конечного элемента

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука,

$$\sigma_z^{(n)} = E^{(n)} \varepsilon_z^{(n)}. \quad (2.8)$$

С учетом (2.6) выражение (2.8) запишется в виде

$$\sigma_z^{(n)} = E^{(n)} \mathbf{B}_n \mathbf{f}_n = D_n \mathbf{B}_n \mathbf{f}_n. \quad (2.9)$$

Здесь $D_n = E^{(n)}$ — модуль упругости. Таким образом, если известны узловые перемещения n -го конечного элемента, деформации и напряжения могут быть вычислены через узловые перемещения по формулам (2.6) и (2.9).

2.2. Матрицы инерции и жесткости элемента

Матрицы инерции и жесткости n -го конечного стержневого элемента, имеющего длину a_n , плотность ρ_n и постоянную жесткость сечения $(EF)^{(n)}$, вычислим по формулам типа (1.12), (1.13) с учетом выражений (2.4), (2.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n &= \int_0^{a_n} \mathbf{H}_n(z)^T \rho_n F_n \mathbf{H}_n(z) dz_n = \\ &= \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_n}{a_n} \\ \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} \rho_n F_n \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{z_n}{a_n}\right) & \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} dz_n = \\ &= \rho_n F_n \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{z_n}{a_n}\right)^2 & \left(1 - \frac{z_n}{a_n}\right) \frac{z_n}{a_n} \\ \left(1 - \frac{z_n}{a_n}\right) \frac{z_n}{a_n} & \frac{z_n^2}{a_n^2} \end{bmatrix} dz_n = \frac{\rho_n F_n a_n}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \int_0^{a_n} \mathbf{B}_n^T D_n \mathbf{B}_n F^{(n)} dz_n = \\ &= \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} (EF)^{(n)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} dz_n = \\ &= \frac{(EF)^{(n)}}{a_n^2} \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dz_n = \frac{(EF)^{(n)}}{a_n} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Связь между узловыми усилиями

$$\mathbf{R}_n(t) = \begin{bmatrix} R_1^{(n)}(t) \\ R_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

и узловыми перемещениями

$$\mathbf{f}_n(t) = \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix},$$

определяемая соотношением $\mathbf{R}_n(t) = \mathbf{K}_n \mathbf{f}_n(t)$, запишется в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1^{(n)}(t) \\ R_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} &= \frac{(EF)^{(n)}}{a_n} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{(EF)^{(n)}}{a_n} \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(t) - u_2^{(n)}(t) \\ u_2^{(n)}(t) - u_1^{(n)}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3. Матрица жесткости псевдостержневого элемента «пружина»

Под псевдостержневым элементом «пружина» будем понимать упругий стержневой элемент жесткостью c_n , не обладающий массой.

Типичные конечные элементы «пружины», работающие на растяжение–сжатие, показаны на рис. 2.3.

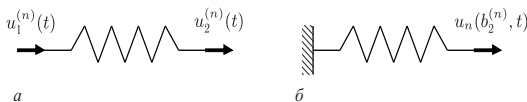


Рис. 2.3

Пружина работает на относительном смещении точек ее крепления. Потенциальная энергия пружины, изображенной на рис. 2.3, а, равна

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2} c_n \left[u_2^{(n)} - u_1^{(n)} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^{(n)} & u_2^{(n)} \end{bmatrix} c_n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{f}_n^T(t) \mathbf{K}_{*n} \mathbf{f}_n(t). \end{aligned}$$

Таким образом, данную пружину следует рассматривать как отдельный псевдостержневой конечный элемент с матрицей жесткости

$$\mathbf{K}_{*n} = c_n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть пружина, изображенная на рис. 2.3, б, присоединена к стержневому элементу в сечении $z_n = b_2^{(n)}$. Тогда потенциальная энергия n -го конечного элемента с учетом жесткости пружины запишется в виде

$$U_n = \frac{1}{2} \mathbf{f}_n^T(t) \mathbf{K}_n \mathbf{f}_n(t) + \frac{1}{2} c_n u_n^2(b_2^{(n)}, t). \quad (2.13)$$

Если воспользоваться выражением (2.4) для $u_n(z_n, t)$, то выражение (2.13) можно переписать в виде

$$U_n = \frac{1}{2} \mathbf{f}_n^T (\mathbf{K}_n + \mathbf{C}_{*n}) \mathbf{f}_n. \quad (2.14)$$

Таким образом, при учете жесткости пружины, присоединенной к конечному элементу в сечении $z_n = b_2^{(n)}$, основная матрица жесткости конечного элемента (2.11) дополняется матрицей жесткости псевдостержневого элемента пружины $\mathbf{C}_{*n}$, которая вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{*n} &= c_n \mathbf{H}_n^T(b_2^{(n)}) \mathbf{H}_n(b_2^{(n)}) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_2^{(n)}}{a_n} \\ \frac{b_2^{(n)}}{a_n} \end{bmatrix} c_n \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{b_2^{(n)}}{a_n}\right) & \frac{b_2^{(n)}}{a_n} \end{bmatrix} = \\ &= c_n \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{b_2^{(n)}}{a_n}\right)^2 & \frac{b_2^{(n)}}{a_n} \left(1 - \frac{b_2^{(n)}}{a_n}\right) \\ \frac{b_2^{(n)}}{a_n} \left(1 - \frac{b_2^{(n)}}{a_n}\right) & \frac{b_2^{(n)2}}{a_n^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.4. Матрица инерции сосредоточенного тела

Пусть сосредоточенная масса присоединена к стержневому конечному элементу в сечении $z_n = b_1^{(n)}$. Тогда кинетическая энергия n -го конечного элемента с учетом присоединенной сосредоточенной массы m_n запишется в виде

$$T_n = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{f}}_n^T(t) \mathbf{M}_n \dot{\mathbf{f}}_n(t) + \frac{1}{2} m_n \dot{u}_n^2(b_1^{(n)}, t). \quad (2.16)$$

Перепишем выражение (2.16) с учетом (2.4) в виде

$$T_n = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{f}}_n^T (\mathbf{M}_n + \mathbf{M}_{*n}) \dot{\mathbf{f}}_n.$$

Здесь $\mathbf{M}_n$ — матрица инерции конечного элемента (2.10); $\mathbf{M}_{*n}$ — матрица инерции сосредоточенного тела, которая вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{*n} &= m_n \mathbf{H}_n^T(b_1^{(n)}) \mathbf{H}_n(b_1^{(n)}) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_1^{(n)}}{a_n} \\ \frac{b_1^{(n)}}{a_n} \end{bmatrix} m_n \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{b_1^{(n)}}{a_n}\right) & \frac{b_1^{(n)}}{a_n} \end{bmatrix} = \\ &= m_n \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{b_1^{(n)}}{a_n}\right)^2 & \frac{b_1^{(n)}}{a_n} \left(1 - \frac{b_1^{(n)}}{a_n}\right) \\ \frac{b_1^{(n)}}{a_n} \left(1 - \frac{b_1^{(n)}}{a_n}\right) & \frac{b_1^{(n)2}}{a_n^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, при учете массы сосредоточенного тела, присоединенного к конечному элементу в сечении $z_n = b_1^{(n)}$, основная матрица инерции конечного элемента (2.10) дополняется матрицей инерции сосредоточенного тела (2.17).

2.5. Вектор узловых нагрузок

Для определения эквивалентных узловых усилий $\mathbf{R}_q^{(n)}(t)$ от действия распределенной нагрузки $q^{(n)}(z_n, t)$ используем формулу (1.14), которая для рассматриваемого случая примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_q^{(n)}(t) &= \begin{bmatrix} R_1^{(n)}(t) \\ R_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}_q = \int_0^{a_n} \mathbf{H}_n^T(z_n) q^{(n)}(z_n, t) dz_n = \\ &= \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_n}{a_n} \\ \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} q^{(n)}(z_n, t) dz_n. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для частного случая, когда интенсивность нагрузки постоянна вдоль оси и зависит только от времени,

$$q^{(n)}(z_n, t) = q_0^{(n)} \chi(t),$$

из (2.18) имеем

$$\begin{bmatrix} R_1^{(n)}(t) \\ R_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}_q = q_0^{(n)} \chi(t) \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} 1 - z_n/a_n \\ z_n/a_n \end{bmatrix} dz_n = \chi(t) \frac{q_0^{(n)} a_n}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Индекс q указывает на эквивалентные узловые усилия от распределенной вдоль оси стержня внешней нагрузки.

Вектор эквивалентных узловых усилий $\mathbf{R}_p^{(n)}$ от внеузловой сосредоточенной нагрузки $P^{(n)}(t)$ с координатой $b_0^{(n)}$ в локальной системе координат вычислим в соответствии со вторым слагаемым в (1.14):

$$\mathbf{R}_p^{(n)} = \begin{bmatrix} R_1^{(n)}(t) \\ R_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}_p = \mathbf{H}_n^T(b_0^{(n)}) P^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} 1 - b_0^{(n)}/a_n \\ b_0^{(n)}/a_n \end{bmatrix} P^{(n)}(t). \quad (2.20)$$

2.6. Переход к глобальной системе координат

Для ансамбля конечных элементов используют глобальную систему координат $Oxuz$, а для каждого конечного элемента — индивидуальную локальную систему координат $O_n z_n$. В практических расчетах может оказаться, что локальная система координат не совпадает с общей

(глобальной) системой координат. Поэтому возникает необходимость получения выражения для матриц инерции, жесткости и вектора эквивалентных узловых усилий конечного элемента не в локальной, а в общей системе координат. На рис. 2.4 показаны нумерация и положительные направления узловых перемещений в общей и в локальной системах координат.

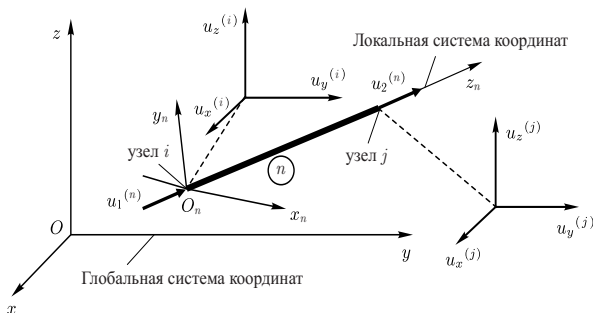


Рис. 2.4

Связь между векторами узловых перемещений в локальной и глобальной системах координат можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} u_x^{(i)} \\ u_y^{(i)} \\ u_z^{(i)} \\ u_x^{(j)} \\ u_y^{(j)} \\ u_z^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(z_n, x) & 0 \\ \cos(z_n, y) & 0 \\ \cos(z_n, z) & 0 \\ 0 & \cos(z_n, x) \\ 0 & \cos(z_n, y) \\ 0 & \cos(z_n, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{l}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{l}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_n^T \mathbf{f}_n, \quad (2.21)$$

где

$$\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{l}_n \end{bmatrix}$$

— матрица направляющих косинусов, составленная из блоков

$$\mathbf{l}_n = \begin{bmatrix} \cos(z_n, x) & \cos(z_n, y) & \cos(z_n, z) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$