ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

Г. В. Сычёва, Н. Б. Гусева, В. А. Гусев

МАТЕМАТИКА

«УРАВНЕНИЯ»
«СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ»

9 класс

ЭКСПРЕСС-РЕПЕТИТОР для подготовки к ГИА

ЭКЗАМЕН В НОВОЙ ФОРМЕ

АСТРЕЛЬ

УДК 373:512
ББК 22.14я721
С95

Серия основана в 2009 году

Сычёва, Галина Владимировна

С95 Математика : «Уравнения», «Системы уравнений» : Экспресс-репетитор для подготовки к ГИА : 9-й класс / Г.В. Сычёва, Н.Б.Гусева, В.А. Гусев. — Москва : Астрель, 2013. — 126, [2] с. — (Государственная итоговая аттестация — экзамен в новой форме).

ISBN 278-5-271-45740-1 (ООО «Издательство Астрель»)

Данное пособие рассчитано на самостоятельную подготовку учащихся к ГИА.

В него входят задания, включающие темы «Уравнения», «Системы уравнений», а также текстовые задачи. Каждый раздел предваряется кратким теоретическим материалом и содержит большое количество примеров решения задач. Количество заданий в теме варьируется в зависимости от ее сложности, а также количества заданий в ГИА, посвященных данной теме.

Каждая тема включает в себя упражнения, которые позволяют учащимся самостоятельно повторить и закрепить изученное и успешно справиться с заданиями ГИА.

Чтобы проверить, усвоен ли материал, в конце книги приведены ответы ко всем упражнениям.

УДК 373:512
ББК 22.14я721

Подписано в печать 10.10.2012. Формат 84 × 108 1/32
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 3000 экз. Заказ №

ISBN 278-5-271-45740-1 (ООО «Издательство Астрель»)

СОДЕРЖАНИЕ

УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

Уравнением называется **равенство**, содержащее переменную (неизвестную) величину.

Областью допустимых значений переменной (ОДЗ уравнения) называется множество значений переменной, при которых все члены уравнения имеют смысл. Область допустимых значений переменной в уравнении называют еще областью определения уравнения.

Корнем уравнения называется значение переменной, входящее в ОДЗ и обращающее уравнение в верное числовое равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни (или доказать, что их нет). Если среди корней уравнения есть k равных между собой корней, то говорят о корне кратности k.

Если каждый корень уравнения A является корнем уравнения B, то уравнение B называется **следствием уравнения** A ($A \Rightarrow B$). Если каждое из двух уравнений A и B является следствием другого, то уравнения называются **равносильными** ($A \Leftrightarrow B$).

Из определения следует, что множества корней равносильных уравнений должны совпадать. При установлении равносильности уравнений кратность корней не учитывается. Например, уравнения $x - 3 = 0$ и $(x - 3)^2 = 0$ считаются равносильными. Если уравнения корней не имеют, то они тоже считаются равносильными.

Свойства уравнений

1. Если перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.

3. Если в какой-либо части уравнения (или в обеих частях) выполнить тождественное преобразование, *не изменяющее область определения уравнения*, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Укажите область определения уравнения.

а) $\frac{x-3}{5} - 7x = 4.$

Ответ: $x \in \boldsymbol{R}$.

б) $\frac{x^2+9}{x-2} + 8 = 6x.$

Ответ: $x \neq 2$.

в) $\frac{x-2}{x^2+9} + 8 = 6x.$

Ответ: $x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 2. При каких значениях p равносильны уравнения?

а) $9x + 4 = 22$ и $10x - 8 + p = 1 - p$;
б) $9x + 4 = 22$ и $9x + 4 + p = 22 + p$;
в) $9x + 4 = 22$ и $(9x + 4) \cdot p = 22 \cdot p$.

Решение. а) Применяя свойства уравнения, находим корень уравнения $9x + 4 = 22$; $9x = 22 - 4$; $9x = 18$; $x = 2$.

Решаем уравнение $10x - 8 + p = 1 - p$ относительно x, считая p буквенным коэффициентом (параметром): $10x = 1 - p + 8 - p$; $10x = 9 - 2p$; $x = \frac{9-2p}{10}$. По условию данные уравнения равносильны, т.е. имеют одинаковые корни. Тогда $\frac{9-2p}{10} = 2$; $9 - 2p = 20$; $2p = -11$; $p = -5{,}5$.

Ответ: $p = -5{,}5$.

б) Уравнения $9x + 4 = 22$ и $9x + 4 + p = 22 + p$ равносильны при любом значении p (по свойству 1).

Ответ: $p \in \boldsymbol{R}$.

в) Уравнения $9x + 4 = 22$ и $(9x + 4) \cdot p = 22 \cdot p$ равносильны при любом значении p, не равном нулю (по свойству 2).

Ответ: $p \neq 0$.

Пример 3. Равносильны ли уравнения $x - 5 = 0$, $(x - 5)^2 = 0$, $(x - 5)^3 = 0$?

Решение. $x - 5 = 0$, $x = 5$; $(x - 5)^2 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$; $(x - 5)^3 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5$.

При установлении равносильности уравнений кратность корней не учитывается. Значит, данные уравнения равносильны.

Ответ: равносильны.

Решение уравнения, чаще всего, состоит в том, что с помощью цепочки преобразований оно приводится к простейшему уравнению, то есть такому, корни которого можно найти по известной формуле. В ходе преобразований уравнения могут возникнуть две «неприятности»: потеря корней и появление посторонних для данного уравнения корней.

Причинами появления посторонних корней могут быть:

1. Расширение ОДЗ уравнения.

2. Умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной.

3. «Взятие» от обеих частей уравнения немонотонной функции.

Рассмотрим подробнее каждый случай.

1. Расширение ОДЗ в ходе преобразования уравнения

1) *Приведение подобных членов.* Если в результате приведения подобных членов какие-то члены уравнения «взаимно уничтожатся», то ОДЗ уравнения может расшириться и некоторые значения переменной могут быть получены в качестве корней, хотя ранее они не входили в область определения уравнения.

Пример 4. Решите уравнение $3x + \frac{5}{x-4} - 12 = \frac{5}{x-4}$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \neq 4$. После приведения подобных слагаемых получаем уравнение $3x = 12$, $x = 4$.

Но $x = 4$ не может быть корнем данного уравнения, так как не входит в ОДЗ уравнения.

Ответ: корней нет.

Причиной появления постороннего корня явилось расширение ОДЗ уравнения после взаимного уничтожения дробей. Уравнение $3x = 12$ имеет ОДЗ, включающее в себя все действительные числа ($x \in \boldsymbol{R}$).

Пример 5. Решите уравнение $5x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 10$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \geqslant 0$. $5x + \sqrt{x} - \sqrt{x} = -10$; $5x = -10$; $x = -2$. $x = -2$ не содержится в ОДЗ данного уравнения и не должно считаться его корнем.

Ответ: корней нет.

Пример 6. Решите уравнения:

а) $x^2 + \sqrt{2x} + 4x = \sqrt{2x}$;

б) $x^2 + \dfrac{1}{x} + 4x = \dfrac{1}{x}$;

в) $x^2 + \dfrac{1}{x(x+4)} + 4x = \dfrac{1}{x(x+4)}$.

Решение. а) $x^2 + \sqrt{2x} + 4x = \sqrt{2x}$. ОДЗ уравнения: $x \geqslant 0$. $x^2 + \sqrt{2x} + 4x - \sqrt{2x} = 0$; $x^2 + 4x = 0$; $x(x + 4) = 0$; $x = 0$ или $x = -4$. -4 — посторонний корень: $0 \in$ ОДЗ, а $-4 \notin$ ОДЗ.

Ответ: $x = 0$.

б) $x^2 + \dfrac{1}{x} + 4x = \dfrac{1}{x}$. ОДЗ уравнения: $x \neq 0$. $x^2 + \dfrac{1}{x} + 4x - \dfrac{1}{x} = 0$; $x^2 + 4x = 0$; $x(x + 4) = 0$; $x = 0$ ($0 \notin$ ОДЗ) или $x = -4$ ($-4 \in$ ОДЗ).

Ответ: $x = -4$.

в) $x^2 + \dfrac{1}{x(x+4)} + 4x = \dfrac{1}{x(x+4)}$. ОДЗ уравнения: $x \neq 0$, $x \neq -4$. $x^2 + \dfrac{1}{x(x+4)} + 4x - \dfrac{1}{x(x+4)} = 0$; $x^2 + 4x = 0$; $x(x + 4) = 0$; $x = 0$ ($0 \notin$ ОДЗ) или $x = -4$ ($-4 \notin$ ОДЗ).

Ответ: корней нет.

2) *Сокращение дроби на выражение, содержащее переменную.*

Пример 7. Решите уравнение $\frac{(x-3)^2}{x-3} + 7x = 21.$

Решение. ОДЗ уравнения: $x \neq 3$. Произведем сокращение дроби на $(x - 3)$:

$$x - 3 + 7x = 21; \quad 8x = 24; \quad x = 3.$$

Значение x, равное трем, не входит в ОДЗ уравнения и потому не может быть корнем. Сокращение дроби привело к расширению ОДЗ и появлению постороннего корня.

Ответ: корней нет.

3) *Применение в ходе упрощения уравнения формул, расширяющих ОДЗ уравнения.* Свойством расширять ОДЗ уравнения обладают некоторые формулы, связанные с понятием квадратного корня (корня с четным показателем).

1. $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$.

ОДЗ левой части определяется системой неравенств: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ ОДЗ правой части содержит значения x, для которых $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый знак.

2. $\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$.

ОДЗ левой части определяется системой неравенств: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ ОДЗ правой части содержит значения x, для которых $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый знак, при этом $g(x) \neq 0$.

3. $\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{|f(x)|} \cdot \sqrt{|g(x)|}$.

ОДЗ левой части содержит значения x, для которых $f(x)$ и $g(x)$ существуют и имеют одинаковый знак. ОДЗ правой части содержит все значения x, для которых $f(x)$ и $g(x)$ существуют.

4. $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\sqrt{|f(x)|}}{\sqrt{|g(x)|}}$.

ОДЗ левой части содержит значения x, для которых $f(x)$ и $g(x)$ существуют и имеют одинаковый знак, при этом $g(x) \neq 0$. ОДЗ правой части содержит значения x, для которых $f(x)$ и $g(x)$ существуют, причем $g(x) \neq 0$.

Замечание. Корни кубические и любые корни с нечетным показателем существуют при любых значениях подкоренных выражений, поэтому при использовании их свойств и правил действий над ними ОДЗ уравнения измениться не может.

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{8}$.

Решение. ОДЗ уравнения определяется системой $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant -2; \end{cases}$ $x \in [0; +\infty)$.

Умножив корни, стоящие в левой части уравнения, получим $\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{8}$. Так как значения корней равны, то равны и их подкоренные выражения. Приравняем подкоренные выражения $x^2 + 2x = 8$. Решим это уравнение: $x = -1 \pm 3$; $x = -4$ или $x = 2$. $2 \in$ ОДЗ, $-4 \notin$ ОДЗ. Почему в результате решения получился посторонний корень $x = -4$? Вспомним, что мы произведение корней заменили корнем из произведения $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x(x+2)}$. ОДЗ левой части этого равенства: $x \in [0; +\infty)$. ОДЗ правой части равенства содержит значения x, для которых $x(x+2) \geqslant 0$, то есть $x \leqslant -2$ или $x \geqslant 0$, $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. Произошло расширение ОДЗ уравнения. Значение $x = -4$ входит в расширенное ОДЗ, но не входит в ОДЗ данного уравнения и поэтому для исходного уравнения является посторонним корнем.

2. Другой причиной появления посторонних корней является умножение обеих частей уравнения $f(x) = g(x)$ на выражение, содержащее переменную $m(x)$. Посторонние корни могут появиться за счет тех значений x, которые входят в ОДЗ данного уравнения и при этом $m(x) = 0$. Посторонних корней не появится, если $m(x)$ не обращается в нуль ни при каких новых значениях x, входящих в ОДЗ данного уравнения.

Пример 9. Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-3} = 2$. ОДЗ уравнения: $x \geqslant 3$.

а) Умножение обеих частей уравнения

$$\sqrt{x-3} = 2 \qquad (1)$$

на выражение $(x - 6)$ приводит к уравнению $(x - 6) \times$ $\times \sqrt{x-3} = 2(x-6)$, которое имеет два корня $x = 7$ и $x = 6$. При этом только $x = 7$ является корнем уравнения (1). Посторонним для уравнения (1) оказался корень $x = 6$, при котором множитель $(x - 6)$ обращается в нуль.

б) Умножение обеих частей уравнения (1) $\sqrt{x-3} = 2$ на выражение $(x^2 + 6)$ приводит к уравнению $(x^2 + 6) \times$ $\times \sqrt{x-3} = 2(x^2 + 6)$, которое имеет тот же единственный корень $x = 7$, что и уравнение (1), и потому равносильно уравнению (1). Посторонних корней не появилось, так как множитель $(x^2 + 6)$ не обращается в нуль ни при каких действительных значениях x.

в) Умножение обеих частей уравнения (1) на выражение $(x - 1)$ приводит к уравнению $(x - 1) \cdot \sqrt{x-3} = 2(x-1)$, которое имеет ту же ОДЗ, что и уравнение (1), оно равносильно уравнению (1), так как $x = 1$ не входит в ОДЗ этих уравнений. Посторонних корней не появилось, так как множитель $(x - 1)$ не обращается в нуль ни при каких значениях x, входящих в ОДЗ данного уравнения (1).

3. Бывают случаи, когда уравнение решается путем возведения обеих его частей в квадрат. Однако, из равенства квадратов двух выражений не следует, что данные выражения равны (они могут быть и противоположными).

Пример 10. Рассмотрим два уравнения

$$(1) \quad \sqrt{x-1} = 3 - x \quad \text{и} \quad (2) \quad \sqrt{x-1} = x - 3.$$

Если возвести обе части каждого уравнения в квадрат (это необходимо, чтобы «избавиться» от знака корня в уравнении), то получим одно и то же уравнение

$$x - 1 = 9 - 6x + x^2. \tag{3}$$

Это значит, что полученное уравнение (3) содержит как корни уравнения (1), так и корни уравнения (2).

Решим уравнение (3): $x^2 - 7x + 10 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$; $x = \frac{7 \pm 3}{2}$; $x = 2$ или $x = 5$.

Значение $x = 2$ является корнем уравнения (1), т. к. $\sqrt{2-1} = 3 - 2$; $1 = 1$, но будет посторонним для уравнения (2), т. к. $\sqrt{2-1} \neq 2 - 3$.

Значение $x = 5$, наоборот, является корнем уравнения (2), т. к. $\sqrt{5-1} = 5 - 3$, $2 = 2$, но будет посторонним для уравнения (1), т. к. $\sqrt{5-1} \neq 3 - 5$.

Итак, возведение обеих частей уравнения в квадрат может приводить к появлению «посторонних» для данного уравнения корней. Чтобы «отсеять» лишние корни, необходимо все полученные значения x проверить на «звание корня» подстановкой в данное уравнение.

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt{5x+1} = 4$.

Решение. Возводим обе части уравнения в квадрат: $(\sqrt{5x+1})^2 = 4^2$; $5x + 1 = 16$; $5x = 15$; $x = 3$. Выполняем проверку корня $x = 3$; $\sqrt{5 \cdot 3 + 1} = 4$; $\sqrt{16} = 4$. Равенство верное, значит $x = 3$ — корень уравнения.

Ответ: 3.

Посторонних корней не появилось, так как обе части данного уравнения неотрицательны на ОДЗ уравнения. А из равенства квадратов двух неотрицательных чисел следует равенство этих чисел. Если $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^2(x) = g^2(x)$ равносильны на ОДЗ данного уравнения.

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{2x^2+1} = 1 - x$.

Решение. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим $(\sqrt{2x^2+1})^2 = (1-x)^2$, $2x^2 + 1 = 1 - 2x + x^2$; $x^2 + 2x = 0$; $x(x + 2) = 0$; $x = 0$ или $x = -2$.

Проверка. 1) $x = 0$; $(\sqrt{2 \cdot 0 + 1}) \stackrel{?}{=} 1 - 0$; $1 = 1$; $x = 0$ — корень уравнения.

2) $x = -2$; $(\sqrt{2 \cdot (-2)^2 + 1}) \stackrel{?}{=} 1 - (-2)$; $\sqrt{9} = 3$; $3 = 3$; $x = -2$ — корень уравнения.

Посторонних корней не появилось.

Ответ: -2; 0.

Легко заметить, что уравнение $\sqrt{2x^2+1} = x - 1$, отличающееся от предыдущего знаком правой части, корней не имеет: значения $x = -2$ и $x = 0$ являются для него посторонними корнями.

Пример 13. Решите уравнение $\sqrt{x^2-1} = x - 2$.

Решение. $(\sqrt{x^2-1})^2 = (x-2)^2$; $x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$; $4x = 5$; $x = \frac{5}{4}$.

П р о в е р к а. $\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \stackrel{?}{=} \frac{5}{4} - 2$; $\sqrt{\frac{9}{16}} \stackrel{?}{=} -\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} \ne -\frac{3}{4}$, $x = \frac{5}{4}$ — посторонний корень.

Ответ: корней нет.

Итак, при возведении в квадрат обеих частей уравнения могут появиться посторонние корни (но могут и не появиться).

При решении уравнений возможна еще более неприятная ситуация, когда в результате преобразований уравнения происходит потеря каких-то его корней.

Какими могут быть причины потери корней?

1. Сужение ОДЗ в ходе преобразования уравнения. Если какие-то корни данного уравнения оказываются за пределами ОДЗ преобразованного уравнения, то они не могут быть получены в ходе решения нового уравнения и для данного уравнения они будут потеряны.

Пример 14. Решите уравнение $\sqrt{x^2-1} = 0$.

Приведем один из возможных (хотя и не лучший) способов *решения*.

Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1} = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом существует. Поэтому имеем $\begin{cases} \sqrt{x+1} = 0, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0, \\ x + 1 \geqslant 0. \end{cases}$

Первая система решений не имеет, вторая имеет решение $x = 1$. Получили единственный корень уравнения $x = 1$. Однако очевидно, что $x = -1$ — тоже корень данного уравнения, т. к. $\sqrt{(-1)^2-1}=0$. В чем ошибка предложенного решения? Почему произошла потеря корня $x=-1$? Ошибка состоит в том, что использована формула $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, которая, безусловно, верна при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, но приводит к сужению ОДЗ, если отсутствуют ограничения на знаки a и b.

Правильное решение.

$$\sqrt{x^2-1}=0; \qquad \sqrt{|x+1|}\cdot\sqrt{|x-1|}=0;$$

$$\sqrt{|x+1|}=0, \quad \text{или} \quad \sqrt{|x-1|}=0,$$

$$|x+1|=0, \qquad |x-1|=0,$$

$$x+1=0, \qquad x-1=0,$$

$$x=-1, \quad \text{или} \quad x=1.$$

Существование множителей $\sqrt{|x+1|}=0$ и $\sqrt{|x-1|}=0$ обеспечивается тем, что модуль выражения не может быть отрицательным. Примененная формула $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$ приводит к расширению ОДЗ уравнения. Поэтому полученные корни $x=-1$ и $x=1$ необходимо проверить.

$x=-1$, $\sqrt{(-1)^2-1}=0$, $0=0$; $x=1$, $\sqrt{(1^2)-1}=0$, $0=0$.

Ответ: -1; 1.

Замечание. Предпочтительный вариант решения уравнения:

$$\sqrt{x^2-1}=0; \quad x^2-1=0; \quad x=-1 \text{ или } x=1.$$

Укажем две формулы, которые могут привести к сужению ОДЗ уравнения и, следовательно, потере корней.

1) $\sqrt{f(x)\cdot g(x)}=\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$.

2) $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$, $g(x)\neq 0$.

Выражения $\sqrt{f(x)\cdot g(x)}$ и $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$, $g(x)\neq 0$, существуют, если $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые знаки, а выражения $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$ и $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$, стоящие в правых частях формул, имеют смысл только при условии $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$