

АЛЕКСАНДР БЕРЛИН

Математика рынка

ОБСЛУЖИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ
ПОТОКОВ

Александр Берлин

**Математика рынка.
Обслуживание
случайных потоков**

«Издательские решения»

Берлин А.

Математика рынка. Обслуживание случайных потоков /
А. Берлин — «Издательские решения»,

ISBN 978-5-44-852545-2

В книге предлагается новый подход к расчету экономических процессов. Такой подход позволяет получить очень интересные данные: определить универсальную математическую характеристику товара, представить математическую модель рынка; показано, что расчеты параметров рынка можно проводить по формулам теории массового обслуживания, в частности по формулам Эрланга, Энгсета и др; определить формулы, отражающие зависимость между спросом и предложением, а также величиной непроданных товаров.

ISBN 978-5-44-852545-2

© Берлин А.
© Издательские решения

Содержание

Список обозначений	6
Введение	8
Глава 1. Относительное потребление. Единица измерения величины предложения и спроса	10
1.1. Так что же такое товар?	10
1.2. Относительное потребление	12
1.3. Факторы, влияющие на относительное потребление	13
1.3.1. Максимальное потребление	14
1.3.2. Реальное потребление (спрос)	15
1.3.3. Зависимость величины относительного потребления от цены	16
1.3.4. Типы поставок (предложения)	18
1.4. Числовые характеристики потоков предложений	19
1.4.1. Интенсивность предложения товаров	20
1.5. Спрос и его колебания	23
1.5.1. Основные определения. Время наибольшего спроса	24
1.5.2. Основные параметры и расчет интенсивности спроса	25
1.5.3. Среднее число заявок от одного потребителя в единицу времени	26
1.5.4. Средняя длительность потребления t'	27
1.5.5. Характеристика качества обслуживания предложений товаров	28
1.5.6. Пропускная способность рынка	30
1.6. Контрольные вопросы к Главе 1	32
Конец ознакомительного фрагмента.	34

Математика рынка Обслуживание случайных потоков

Александр Берлин

© Александр Берлин, 2017

ISBN 978-5-4485-2545-2

Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

Список обозначений

- A**– относительное (удельное) потребление. Предложенная нагрузка
a – **интенсивность нагрузки, поступающей от одного источника**
 поступивших заявок
 – обслуженных заявок
 – потерянных заявок
 – средняя длина очереди или среднее число задержанных партий товаров
 среднее число заявок от одного потребителя в единицу времени
 от одной группы индивидуальных потребителей
 — среднее число заявок от одного потребителя в единицу времени
 от – посредников (например, агентства по покупке и продаже квартир)
 $E_{i, \nu}(A) = E_i(A)$ – вероятность того, что в произвольный момент
 времени стационарного режима в полностью доступной группе ёмкостью ν
 потребителей, на которую поступает интенсивность партий товаров A , создаваемая
 простейшим потоком товаров, занято i потребителей
 $E_{1, \nu}(A)$.– табличные числовые значения для первой формулы Эрланга $E_{2, \nu}(A)$.– таб-
 личные числовые значения для второй формулы Эрланга
 $p(\gamma > 0)$ – вероятность того, что время ожидания больше нуля – то есть вероятность
 очереди
 $p_{\text{задер.}}(\gamma > t)$ – вероятность ожидания задержанного товара
 свыше времени t
 $p(R > r)$ – вероятность того, что длина очереди превышает заданную величину r
 $R_{\text{макс}}$ –максимальное потребление
 $R_{\text{реал}}$ – реальное потребление.
 – потери по числу поступивших заявок на поставку товара
 – потери по объёму товара
 P_t – потери по времени реализации
 .
 – средняя длительность потребления.
 – **средняя длина очереди**
 поступившего товара
 – обслуженного товара
 – потерянного товара
 $A_{\text{обсл.}}(t_1, t_2) =$ – обслуженное предложение.
 $a_{06}(t_1, t_2)$ – обслуженный рынком спрос за промежуток времени (t_1, t_2) $Y_{\text{пост.}}(t_1, t_2)$ —
 поступающее предложение товаров за промежуток времени (t_1, t_2)
 $a_{\text{пост.}}(t_1, t_2)$ – поступающий на рынок спрос за промежуток времени
 (t_1, t_2)
 $a_{\text{потер.}}(t_1, t_2)$ – потерянный рынком спрос в течение промежутка времени (t_1, t_2)
 $a_{\text{внс.}}$ величина нагрузки за время наибольшей нагрузки (ВНС);
 $a_{\text{набл}}$ – величина нагрузки за время наблюдения
 α – параметр примитивного потока группы партий в свободном состоянии (формула
 Энгсета).
 β – параметр показательного закона распределения длительности потребления.
 η – пропускная способность групп потребителей

γ – текущее время ожидания

– среднее время ожидания по отношению ко всем поступившим вызовам

γ_z среднее время ожидания по отношению только к задержанным вызовам

$\lambda_s(t)$ параметр симметричного потока.

$\omega_0(z)$ – вероятность отсутствия товаров на промежутке времени длиной z (Поток Пальма).

Введение

Прежде чем начать составлять и преобразовывать формулы. Я хотел бы задать вопрос читателю.

Я хочу продать что-то новое или старое, красивое или безобразное – бриллианты, навоз, идеи, отремонтировать ваш дом. Почему я не могу сосчитать, сколько я смогу продать этого товара в течение месяца дня, года?

Почему возникают кризисы перепроизводства? И при этом, почему столько оптимистов или пессимистов говорят, что всё наладится или рухнет. И я скорее не доверяю им, чем доверяю. Развелось столько пророков в сети Интернет и в газетах. А как прекрасно, если бы все это можно было бы сосчитать рынок. Например, как в механике.

Представьте Вы хотите проехать из Санкт Петербурга в Москву (расстояние 600 км). Вы вспоминаете формулу равномерного движения, рассчитываете, что если вы будете ехать непрерывно и равномерно со скоростью 60 км в час, то это займёт 10 часов.

Давайте будем честными. Вы никогда не будете ехать равномерно и непрерывно. На одном участке Вы будете «лететь», а на другом ехать и никуда не спешить. Вы сделаете на втором часу перерыв в езде. Кроме того, получив этот результат, Вы полетите самолётом. А может, не тронетесь никуда. Так что математика не может за Вас принять решение.

Вывод отсюда парадоксальный, что экономика – это политика. А математика может только сказать, что будет при принятых Вами решениях.

Можно также сказать, что экономика – это психология. Например, известен «очевидный» экономический закон, который широко используется для анализа экономических процессов- это паника при ухудшении каких-то показателей рынка

Математика не даёт прогнозов. Она только отвечает на Ваши вопросы, что будет в заданных вами обстоятельствах. Один из великих инвесторов 21—22 века Уоррен Баффет, говорил: «Я не делаю прогнозы, я даю оценки. Оценка не то, что прогноз». [3.3., стр.21, стр.23].

Теперь вопрос! Нельзя ли разработать такие математические методы, которые также как в механике говорили, что будет в заданных обстоятельствах. И если эти обстоятельства возникли можно рассчитать своё поведение и поведение среды.

К какой области математики они должны принадлежать?

Очевидно, что к теории вероятностей.

Труды, которые рассматривают основные вопросы экономики (спрос, предложения, цены и прочее), в основном применяют методы детерминированной математики [Альфред Маршалл, Кейнс¹].

Экономика широко пользуется методами теории массового обслуживания. Например, для расчета числа кассовых аппаратов, очередей и т. п. При этом наиболее часто используется название «теория очередей».

В этой книге мы покажем, что применение теории случайных потоков к основным процессам на рынке – предложению и потреблению товаров, получению доходов позволяет ответить на большинство вопросов, которые возникают сегодня на практике.

Такой подход позволяет получить очень интересные результаты.

Перечислим эти результаты:

определена универсальная математическая характеристика товара – относительное потребление и потери (доля непроданных товаров);

¹ Кейнс был специалистом по теории вероятностей и написал диссертацию по этому вопросу, но в его основных работах такие методы отсутствуют

представлена математическая модель рынка;

на основе этой модели, показано, что расчеты параметров рынка можно проводить по формулам теории массового обслуживания в частности по формулам Эрланга, Энгсета и др;

согласно формуле Эрланга показана зависимость между спросом и предложением, а также величиной потерь (величиной не проданных товаров);

расчеты по формуле Эрланга показывают, что основное влияние на спрос оказывает предложение (величина поставки), при росте предложения увеличиваются потери (доля непроданных товаров), поэтому наращивания предложения становится нецелесообразным. И как следствие, в зависимости от себестоимости падают доходы;

цена товара влияет на спрос только на начальном этапе, а далее на этапе насыщенного рынка, она играет роль, фактора конкурентной борьбы.

Результаты позволяют:

- проводить оценку перспектив различных бизнесов,
- оценивать величину устанавливаемой цены,
- определять возможные моменты кризисов и их периодичность (циклы Кондратьева)

[3.7].

В заключение надо сказать, что в книге за основу изложения приняты результаты, полученные моим учителем Борисом Самойловичем Лившицем [2.1] и недавно скончавшимся его лучшим учеником Яковом Владимировичем Фидлиным. [2.2].

Их книга Лившиц Б. С., Фидлин Я. В., Харкевич А. Д. Теория телеграфных и телефонных сообщений. М.: Связь, 1971. до сих пор образец по содержанию и строгости и четкости математических доказательств.

Очень большие трудности вызывал у автора вопрос как подробно приводить математические доказательства. Как показал опыт – математические аспекты теории обслуживания случайных потоков известны далеко не всем. Поэтому в книгу включены сведения, позволяющие читателю получить необходимые сведения, не тратя массу времени на обращения к первоисточникам. Для корректности в книге есть много ссылок к первоисточникам.

Для тех, кто активно заинтересуется вопросам применения теории обслуживания случайных потоков, в приложении приведены отдельно книги по теории массового обслуживания на русском и английском языке.

Список литературы составлен по разделам:

Теория вероятностей.

Теория массового обслуживания

Экономика

.Справочные материалы из Интернета

Глава 1. Относительное потребление. Единица измерения величины предложения и спроса

1.1. Так что же такое товар?

Начнем с цитаты Кейнса [3.1]

«Трудности, которые больше всего мешали мне при написании этой книги, и я не мог четко сформулировать свои мысли;

«во-первых, выбор единиц измерения, пригодных для исследования экономической системы в целом;»

Далее Кейнс пишет;

«Тот факт, что единицы измерения, которыми обычно пользуются экономисты, неудовлетворительны, можно проиллюстрировать на следующем примере:

Концепции национального дохода, запаса реального капитала и обще совокупный объем, производимых обществом товаров и услуг представляет собой разнородный комплекс, который, строго говоря, не может быть измерен, за исключением некоторых специальных случаев, когда, например, все элементы одного набора производимых товаров и услуг содержатся в той же пропорции в другом наборе товаров и услуг этого уровня цен.»

В результате Кейнс выбрал в качестве единиц измерения деньги:

«Поэтому, рассматривая теорию занятости, я буду пользоваться только значением совокупных объемов: выраженной в деньгах суммой ценностей».

Для того чтобы дать свое определение единицы измерения товара мы используем очевидное утверждение.

Товар на рынке – это, то, что хотят продать и это то, что хотят купить. Попробуем выразить это в числах.

Обратимся к своему опыту.

Вы любите пирожные? Я Вам их продам. Вы их купите и захотите еще. Я буду продавать все больше и больше. Наконец вы начнёте съедать 10 пирожных в день. А я вам предлагаю еще. Вы говорите: «Хватит!»

Я предлагаю Вам бесплатно по 12 пирожных в день, а Вы неблагодарно твердите «Нет!». Более того, закупив пирожные, Вы еще некоторое время их потребляете, и при этом не покупаете новых.

Что это такое? Это перепроизводство!

Повторим вопрос: Сколько вы можете съесть в день пирожных 10, 12, 15?

Это для математики неважно, но в принципе есть какое-то максимальное количество товара, которое Вы можете потратить в определенный период (в сутки, в месяц в год).

попробуем найти индикатор. Назовём его относительное потребление. – $P_{отн}$

Если потребитель уже не способен покупать товар (насыщение) $P_{отн}=1$,

Если потребитель только начинает покупать товар $P_{отн}=0$.

Потому текущее состояние потребителя можно отразить значением относительного потребления

$$0 \leq P_{отн} \leq 1$$

Продолжим поиск математического определения относительного потребления.

Введем единицу (обозначим её a), которая нам позволит измерять спрос и предложение «относительный потребление».

Это отношение реального потребления $P_{\text{реал}}$ к максимально возможному $P_{\text{макс}}$.

$$P_{\text{отн.}} = P_{\text{реал.}} / P_{\text{макс.}} = a$$

Если с помощью этой единицы мы будем измерять спрос и предложение товара, одним потребителем или одной группой потребителей, то мы будем называть этот показатель – **УДЕЛЬНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОТРЕБЛЕНИЕМ**.

Если рассматриваться группа из n потребителей (групп потребителей), то применяется название **ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ**.

Оно будет равно

$$A = an$$

Будем считать, что никакие материальные (количество денег, цены) и внешние факторы (сезон, мода) Вас не ограничивают. Тогда максимальное потребление в заданный период будет равно $P_{\text{макс.}}$.

Реальное и максимальное потребление выражаются в единицах данного товара (штуках, пакетах, денежных [единицах]).

Поскольку относительное потребление это отношение, где числитель и знаменатель выражены в одинаковых единицах, то оно безразмерная величина.

1.2. Относительное потребление

Относительное потребление показывает возможности участия данного средства в потреблении (аналог удельной нагрузки в теории массового обслуживания). Оно указывает насколько потребитель готов к покупке товара. Если $a=1$, то потребитель в данный период не будет покупать товар, другие значения говорят, насколько удовлетворены запросы этого потребителя.

Например, из сайта на Интернете можно узнать, что Скандинавы потребляют по 8 литров молока в неделю, а европейцы 1 литр в неделю. Максимально физически человек может потребить 10 литров в неделю. Не проводя анализ на достоверность, примем эти цифры за истину.

Тогда относительное потребление будет равно для скандинавов $8/10$, а для европейцев $1/10$.

Для продажи молока эти цифры говорят о многом.

1. Склонность к потреблению молока в Скандинавии близка к насыщению. Как мы показали исследования, продажа товаров на насыщенном рынке приводит к большим потерям, которые тем выше, чем больше относительное потребление приближается к 1. Это означает, что потребности данного рынка полностью удовлетворены.

2. Судя величине относительного потребления перспективы продажи молока в Европе выше, поскольку рынок не насыщен.

Однако надо сделать оговорку. Кейнс делил склонность к потреблению на субъективную и объективную. Он писал [КНИГА ТРЕТЬЯ. СКЛОННОСТЬ К ПОТРЕБЛЕНИЮ. ГЛАВА 8],

«Для того, чтобы сделать наш анализ более четким, целесообразно расчленим эти мотивы на две большие группы: в первую из них мы будем включать субъективные, а во вторую – объективные факторы. Субъективные факторы, описывают те психологические особенности человеческого характера, а также те общественные привычки и институты, которые, хотя и не являются неизменными, все же едва ли подвержены существенным переменам в течение коротких промежутков времени (за исключением каких-либо выходящих из ряда вон обстоятельств или революционных потрясений)».

В нашем примере низкий уровень относительного потребления указывает на наличие в европейском поведении субъективного фактора, но в то же время указывает на перспективность его преодоления (реклама, разработка соответствующих европейским вкусам молочных продуктов).

3. Относительное потребление может служить для измерения уровня бедности и богатства.

Насыщенность населения жизненно важными товарами обычно исчисляют количеством потребления на человека за определённый период (месяц, год). Относительное потребление указывает степень насыщенности (отношение максимального потребления к реальному потреблению). Рассматриваемый пример не может служить таким показателем, поскольку в нем большая доля субъективных факторов.

Низкая величина относительного потребления указывает на бедность, если эта величина обусловлена отсутствием материальных средств.

Последнее, что следует указать, это роль относительного потребления продуктов питания. В большинстве случаев это величина может носить медицинскую оценку.

В этом случае относительное потребление указывает, на то, что какими-то продуктами, население не обеспечено для нормальной жизни, а какие-то товары потребляются избыточно для здоровья,

1.3. Факторы, влияющие на относительное потребление

1.3.1. Максимальное потребление

На основе статистических данных (или здравого смысла) определяется максимально возможное приобретение товара, (измеряемое в единицах, характерных для данного товара) ЗА ЗАДАННЫЙ ПЕРИОД ВРЕМЕНИ (неделю, месяц, год). Это количество мы будем называть **максимальное потребление** ($P_{\text{макс}}$)

При выборе величины максимального потребления следует учитывать два типа факторов.

ОБЪЕКТИВНОЕ ограничение и ФОРМАЛЬНОЕ ограничение.

Объективное ограничение максимального потребления – заключается в том, что оно ограничено физиологическими причинами (например, человек не может съесть больше 10 пирожных в день) или техническими причинами (данная марка автомобиля потребляет 25 литров (галлонов) бензина на километр (милю) пробега). Эти показатели можно выбрать так, что вероятность их смены за короткий промежуток времени будет мала.

Некоторые виды товаров ограничиваются естественными причинами. Например, максимум показателя товара – «парковка» автомобиля в период 1 час ограничивается одним часом.

Формальное ограничение максимального потребления – состоит в том, что его величина назначается исследователем произвольно или по согласованию (стандартизации) с другими заинтересованными сторонами (например, максимальное потребление пирожных одним человеком 100 пирожных в день). В дальнейшем рассмотрении можно будет убедиться, что назначение нереально высокой величины максимального потребления не влияет на получение основных результатов, не изменяет получаемых оценок, но усложняет расчеты, увеличивая или уменьшая значения обрабатываемых величин.

1.3.2. Реальное потребление (спрос)

Основные идеи заключаются в следующем:

Потребитель приобретает за некоторый период (неделю, месяц, год) определённое количество товара, измеряемое в единицах характерных для данного товара, с учетом своей потребности и цены данного товара. Это количество мы будем называть **реальное потребление ($P_{\text{реал}}$)**

После приобретения товара покупатель потребляет его в течение определенного **времени потребления**.

Причиной отказа от покупки может быть субъективные причины. Например, невозможность (или нежелание) есть каждый день котлеты, или объективные причины вместимость топливного бака (запас бака рассчитан на неделю).

ПОКА МЫ ИСКЛЮЧАЕМ ФАКТОР НАКОПЛЕНИЯ «ПРО ЗАПАС» (СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ).

Время потребления отличается от времени обладания товаром. Например, автомобиль, купленный 3 года назад, может использоваться владельцем, Но если владелец начал искать другой автомобиль, то время потребления равно 3 года.

Неценовые факторы, влияющие на реальное потребление (спрос) [https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_спроса_и_предложения]

Уровень доходов в обществе;

Размеры рынка;

Мода, сезонность;

Наличие товаров-субститутов (заменителей);

Инфляционные ожидания.

Итоги.

Итак, мы установили общие свойства понятия товар.

Несмотря, на большое разнообразие товаров. Мы свели количественные характеристики товара к двум показателям.

Максимально возможное потребление.

Реальное потребление.

1.3.3 Зависимость величины относительного потребления от цены

Мы определили относительное потребление как

$$P_{отн.} = P_{реал.} / P_{max.} = a$$

Мы будем предполагать, что цена единицы товара при реальном и максимальном потреблении одинакова, тогда удельное относительное потребление не зависит от цены.

В том случае если эти цены разные, то возможно введение постоянных или переменных коэффициентов.

Реальное удельное потребление составляет сумму удельных относительных потреблений отдельных групп потребителей. Аддитивность удельного потребления будет показана далее.

$$\text{Спрос} = \sum_{i=1}^n a_i$$

где n число групп потребителей.

Увеличение спроса может иметь три источника :

- увеличение потребления отдельным источником $P_{реал.}$
- увеличение потребления за счет увеличения числа групп потребителей.
- или увеличение обоих факторов.

При *повышении* цены реальное потребление *снижается*, что приводит к снижению относительного потребления и для сохранения показателей рынка требует увеличения покупателей- n .

Например, для сохранения величины входного потока нужно сохранение числа покупаемых товаров, а при снижении единичного потребления это можно только сделать увеличением числа покупателей, либо с помощью рекламы, либо за счет расширения территории продаж.

При снижении цены реальное потребление увеличивается и при том же числе покупателей увеличивается число покупок. Пределом является $P_{max.}$

На этапе, когда рынок не насыщен товарами, рассматриваемые ценовые факторы сохранения входного потока действуют.

При насыщении рынка (этап перепроизводства) реальное потребление $P_{реал.}$ прекращает свой рост (каждый потребитель получает товар близко к максимальному потреблению). А количество групп потребления на этапе насыщения, в большинстве случаев перестаёт расти. За время производства товаров их предпочтение определенных фирм и влияние других факторов для группы потребителей, например, география продаж, стабилизируется.

Поэтому производители при наращивании производства свыше определенной величины (как мы покажем далее) терпят убытки, особенно при уменьшении цены, которая не влияет на увеличение потребления.

В этом случае основным выходом является соглашение о снижении объема производства. Это соглашение относится к типу «равновесия по Нэшу» [3.4]. Это соглашение приносит всем сторонам убытки, но отказ от него приводит к еще большим убыткам. Такие соглашения достигаются с большим трудом. Это верно в целом для отрасли производящей товар.

Однако если рассмотреть отдельных участников рынка, то снижение цены отдельным участником (производителем) рынка может увеличить число групп потребителей его продукции за счет уменьшения числа, потребляющих продукцию участников другой группы производителей. Конкуренция по понижению цены между производителями ограничивается себестоимостью. Это состязание выигрывает участник, у которого меньше себестои-

мость или он может получить постороннюю поддержку (со стороны государства, банков и т.п.).

1.3.4. Типы поставок (предложения)

Теперь заметим, что поставки на рынок имеют двойственный характер. Ниже рассматриваются эти две стороны. Одна сторона – это сколько товара поставляется производителем на рынок, а вторая – сколько приобретается потребителем.

Поэтому в дальнейшем будем разделять предложение товаров, на поступающее предложение товаров и обслуженное предложение товаров.

Обслуженное предложение за промежуток времени (t_1, t_2) – это спрос, обозначаемый $A_{обсл.}(t_1, t_2)$, он представляет собой сумму партий товаров, приобретённую данной группой потребителей за период (t_1, t_2) .

Под **поступающим предложением** товаров за промежуток времени (t_1, t_2) понимают предложение товаров, которое было бы обслужено рынком, если бы каждому поступающему товару сразу же был предоставлен потребитель – $A_{пост.}(t_1, t_2)$. Иногда это предложение будем называть **потенциальным предложением**.

Разницу между поступающим и обслуженным предложением будем называть **потерянным предложением**¹:

$$A_{потер}(t_1, t_2) = A_{пост}(t_1, t_2) - A_{обсл}(t_1, t_2)$$

1.4. Числовые характеристики потоков предложений

1.4.1. Интенсивность предложения товаров

По аналогии с понятиями мгновенной и средней интенсивностей потоков товаров можно рассматривать мгновенную и среднюю интенсивности предложения товаров. Однако в теории и практике расчета пропускной способности рынка целесообразно использовать среднюю интенсивность предложения.

Под интенсивностью предложения понимается предложение товаров в единицу времени. За единицу измерения интенсивности предложения товаров принята величина $a=1$, т.е. предложение равное по величине максимальному ($P_{\text{реал}} = P_{\text{max}}$).

Приведенная ниже теорема облегчает определение интенсивности обслуженного предложения.

Она показывает, что эта величина обладает свойством эргодичности, которое заключается в том, что

Среднее по времени равно среднему по ансамблю.

В данном случае наблюдение за поступлением партий товаров по времени можно заменить наблюдением числа одновременно занятых групп потребителей.

Теорема о количественной оценке интенсивности обслуженного предложения:

интенсивность обслуженного предложения, выраженная в единицах удельного относительного потребления, количественно равна среднему числу одновременно занятых групп потребителей, обслуживающих эту нагрузку.

Пусть в течение T часов непрерывно регистрируется число одновременно занятых групп потребителей рынка, которым поступает стационарный поток предложений от групп потребителей. Пусть в результате наблюдений оказалось, что в течение времени t_1 было занято v_1 групп потребителей, в течение времени t_2 v_2 групп потребителей и т. д. (рис.1.1). В общем виде можно представить, что в течение времени t_i была занята v_i групп потребителей, причем.

$$\sum_{i=1}^n t_i = T$$

$$\sum_{i=1}^n t_i = T$$

где n – число значение, которое величины v_i принимала, в течение T часов

Суммарное время занятия всех потребителей рынка за время t_i выразится произведением $v_i t_i$. За промежуток времени T суммарное время занятия всех потребителей рынка выразится суммой. Эта сумма по определению является предложением, обслуженным всеми потребителями рынка за время T .

Предложение, обслуженное всеми потребителями рынка за единицу времени, будет равна:

$$A_{\text{обсл}} = (\sum_{i=1}^k v_i \# t_i) / T$$

С другой стороны, среднее число одновременно занятых групп потребителей за время T можно определить как среднее взвешенное по t_i :

$$v = (v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_n t_n) / (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = (1/T) (\sum_{i=1}^n v_i \cdot t_i)$$

,следовательно $A_{\text{обсл.}} = v$ »

Теорема о количественной оценке интенсивности поступающего предложения

Для количественной оценки интенсивности поступающего предложения товара можно воспользоваться следующей теоремой:

интенсивность поступающего предложения товара, выраженная в единицах относительного потребления, создаваемая простейшим потоком товаров, количественно равна математическому ожиданию числа предложений товаров ($\dot{c}$), поступающих за время, равное средней длительности одного потребления одной партии товаров ($t'_{\text{потреб}}$)

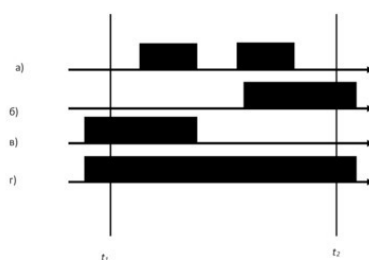


Рисунок 1.1. Моменты поступления товаров

Пусть на входы рынка поступает простейший поток товаров с интенсивностью μ . Будем считать, что длительность потребления T конечная случайная величина $0 \leq T \leq T_{\text{max}}$, не зависящая от типа потока поступающих товаров, со средним значением $\dot{t}$. Рассмотрим промежуток времени $[t_1, t_2]$ такой, что $t_2 - t_1 > T_{\text{max}}$. Математическое ожидание числа партий товаров, поступивших на рынок за промежуток времени

$$[t_1, t_2], \text{ как } \Lambda(t_1, t_2) = \mu(t_2 - t_1).$$

Часть этих предложений потребляется к моменту t_2 (рис. 1.1а), а другая часть не оканчивается (рис. 1.1б). Обозначим математическое ожидание числа товаров, поступивших за промежуток времени $[t_1, t_2]$ и не приобретенных к моменту t_2 , через ρ . Кроме товаров, поступающих на рынок за промежуток времени $[t_1, t_2]$, надо учитывать товары, которые поступили до момента t_1 и к моменту t_2 не приобретены. Обозначим математическое ожидание числа *предложений товаров*, которые начались до момента t_1 и окончились в промежуток времени $[t_1, t_2]$, через ε (рис. 1.1в), а математическое ожидание числа вызовов, которые начались до момента t_1 и окончились после момента t_2 , через ζ (рис. 1.2г). Так как $t_2 - t_1 > T_{\text{max}}$, то $\zeta = 0$. Для простейшего потока вызовов $\rho = \varepsilon$.

По определению математическое ожидание, поступающего на рынок предложения товаров за промежуток времени $[t_1, t_2]$,

$$a(t_1, t_2) = [\mu(t_2 - t_1) - \rho + \varepsilon] \cdot \dot{t} = \mu \dot{t}_{\text{потреб}}(t_2 - t_1)$$

а интенсивность поступающего предложения

$$a = [a(t_1, t_2)] / (t_2 - t_1) = \mu \dot{t}_{\text{потреб}}$$

Произведение $\mu \dot{t}_{\text{потреб}}$ представляет собой математическое ожидание числа *предложений товаров*, поступающих за среднюю длительность одного потребления. Теорема доказана.

Например, пусть за одни сутки (между $t_1=0$ и $t_2=24$ часами) поступает $N \cdot c = 100 \cdot 4 = 400$ предложений товаров.

Пусть средняя длительность одного потребления равна в сутки. Следовательно, за время $t_{\text{потреб}}$ поступит

$$400 \cdot (1/40) = 10 \text{ предложений товаров.}$$

В то же время число математическое ожидание числа предложений, поступающее в сутки, равно:

$$A = N \cdot c \cdot (T) \quad T = 400 \cdot (1/40) = 10 \text{ предложений в сутки}$$

1.5. Спрос и его колебания

1.5.1. Основные определения. Время наибольшего спроса

Под интенсивностью спроса понимается спрос товаров в единицу времени, для измерения величины спроса применяется относительное потребление. За единицу измерения интенсивности спроса товаров принята величина $a=1$, т.е. равное по величине максимальному потреблению ($P_{реал} = P_{max}$) в единицу времени.

Интенсивность спроса в общем случае различна по часам суток, дням недели и месяцам года. Наблюдениями установлено, что наряду со случайными колебаниями интенсивности спроса существуют и периодические, относительно регулярные колебания, которые необходимо учитывать при прогнозировании величины спроса.

Из регулярных колебаний интенсивности спроса на товары наиболее значительными являются колебания по сезонам.

На некоторые виды товаров спрос приходится на праздничные и предпраздничные дни (например, Новый Год).

В значительной степени они зависят от распорядка жизни в данной местности и структурного состава потребителей, которых обслуживает рынок.

Регулярные колебания спроса может зависеть от дней недели. В субботу и воскресенье спрос на товары массового потребления может быть выше, чем в рабочие дни недели. Регулярные колебания спроса наблюдаются и по месяцам года. Минимальная нагрузка на товары массового потребления, исключая курортные города, наблюдается в летние месяцы: июнь, июль, август. Наибольшая нагрузка на товары массового спроса имеет место в феврале, марте и ноябре, декабре, в эти месяцы и должны проводиться измерения спроса.

Для стратегических товаров, например, нефть, вооружение и т.п. играют роль политическая обстановка, мировые и локальные конфликты...

Для удовлетворительного качества обслуживания потребителей в любое время расчет предложения необходимо выполнять исходя из значения интенсивности спроса в то время, когда он является наибольшим.

Это время будем называть время наибольшего спроса – ВНС (по аналогии с часом наибольшей нагрузки для телефонной нагрузки – ЧНН).

Время наибольшего спроса – ВНС. это непрерывный интервал времени, в течение которого средняя интенсивность спроса является наибольшей. Степень концентрации спроса в ВНС оценивается коэффициентом концентрации нагрузки

$$k_{ВНС} = A_{ВНС} / A_{НАБЛ.}$$

Степень концентрации спроса в ВНС оценивается коэффициентом концентрации нагрузки $k_{ВНС} = A_{ВНС} / A_{НАБЛ.}$

где

$A_{ВНС}$ – величина спроса за ВНС

$A_{НАБЛ.}$ – величина спроса за время наблюдения

1.5.2. Основные параметры и расчет интенсивности спроса

Основными параметрами спроса являются:

число групп потребителей - n ;

среднее число заявок на товары, поступающих от одной группы потребителей в единицу времени c' ;

– средняя длительность потребления при обслуживании одной заявки- t' потреб.

Рассмотрим возможный состав потребителей,

которые различаются по среднему числу моментов и средней длительности потребления:

– индивидуальные потребители;

– посредники (например, агентства по покупке и продаже квартир);

– фирмы и государственные учреждения.

Кроме этого следует разделять потребителей, настроенных на определенную группу товаров.

Например,

– детские товары,

– товары для женщин.

При понижении цены на товар число потребителей может увеличиться. При длительном существовании товара на рынке число потребителей может стабилизироваться, и при изменении цены не изменяется или изменяется незначительно. Такая реакция на цену может быть при перепроизводстве, когда относительное потребление приближается к 1 (единице). Стабилизируется реальное потребление.

1.5.3. Среднее число заявок от одного потребителя в единицу времени

В соответствии с имеющимися категориями источников заявок среднее число заявок на товары в единицу времени соответственно:

- от одной группы индивидуальных потребителей $c_{\text{инд}}$
- от – посредников (например, агентства по покупке и продаже квартир) $c_{\text{поср}}$

– фирмы и государственные учреждения —

Обозначим в общем виде через c_i среднее число заявок от групп потребителей от источников i —й категории,

n_i – число источников i —й категории.

Тогда при k групп потребителей на рынке средневзвешенное число заявок от одной группы потребителей определится из выражения

$$c = \sum_{i=1}^k c_i \cdot n_i / \sum_{i=1}^k n_i$$

1.5.4. Средняя длительность потребления t'

Под длительностью одного потребления понимается промежуток времени с момента приобретения до момента начала поиска того же товара.

Время потребления всегда меньше времени обладания товаром.

Например, владелец автомобиля купил его 3 года назад. Если он начал искать новый автомобиль, не продав старый, время потребления будет 3 года.

Длительность потребления товаров питания определяется физическими потребностями человека и допустимыми сроками хранения.

Длительность потребления одежды определяется её износостойкостью, но в настоящее время в основном соответствию моде.

Длительность потребления управляющих автоматов, вычислительных машин автомобилей ограничивается их надежностью, основными показателями.

Следовательно, длительность потребления является случайной величиной, и ее среднее значение может быть определено только на основании результатов наблюдений действующих рынков и статистических исследований.

Влияние рекламы и управление поведением потребителя в данной книге не рассматривается.

Иногда следует учитывать особенности процесса покупки, которые сказываются на времени потребления.

Можно выделить

Непосредственная покупка, как начальный момент потребления.

Покупка возвращена или заменена

Дистанционная покупка (онлайн) с отсроченным временем потребления.

Заявка на покупку, которая не удовлетворена по причине отсутствия товара.

Заявка на покупку, которая не удовлетворена по причине отсутствия товара, устраивающего покупателя.

Заявка на покупку, которая не удовлетворена по причине окончания выпуска товара и т. д.

При определении параметров рынка следует учитывать, что значения среднего числа заявок на потребление, длительность потребления большинства товаров (кроме товаров первой необходимости) и число потребителей существенно влияет на этапе, когда рынок не насыщен зависят от цен

Например, при повышении цен на телевизоры – число заявок на потребление (покупок) уменьшается, срок потребления увеличивается (реже меняют старые модели).

Однако, как мы увидим дальше, при насыщении рынка спрос – рост числа заявок на потребление (покупок) останавливается независимо от цены.

1.5.5. Характеристика качества обслуживания предложений товаров

Качество обслуживания предложений, поступающих на рынок товаров, характеризуется количеством непроданных за определенное время товаров или длительностью ожидания продажи.

Различают два основных способа, две дисциплины обслуживания предложений поступающих на рынок товаров: явными потерями и условными с потерями.

Дисциплиной обслуживания с явными потерями называется такая дисциплина, при которой поступающий на рынок товар должен быть продан, и если все потребители заняты, он снимается с продажи и в дальнейшем не оказывает на рынок никакого влияния. Такая дисциплина называется дисциплиной обслуживания с явными потерями. При такой дисциплине обслуживания подразумевается, что производитель, получив отказ ввиду отсутствия спроса (все группы потребителей заняты), отказывается от дальнейших попыток продать товар (повторные попытки реализации рассматриваются, как особый случайный поток).

Для количественной оценки качества обслуживания с явными потерями рассчитываются следующие величины:

потери по числу поступивших заявок на поставку товара – $P_{заяв.}$;

потери по объему товара – $P_{тов.}$;

потери по времени реализации – P_t .

Потери по числу поступивших заявок на поставку товара на отрезке времени $[t_1, t_2]$ – это отношение числа потерянных (не обслуженных) за этот период (t_1, t_2) заявок к числу поступивших за то же время заявок.

$$P_{заяв}(t_1, t_2) = C_{пот}(t_1, t_2) / C(t_1, t_2)$$

Потери по объему товара на отрезке времени $[t_1, t_2]$ – это отношение потерянного (не проданного) количества за этот отрезок времени товара $a_n(t_1, t_2)$ к поступающей количеству за то же время $a(t_1, t_2)$.

$$P_{тов}(t_1, t_2) = a_{пот}(t_1, t_2) / a(t_1, t_2)$$

Потери по времени за отрезок времени $[t_1, t_2]$ – это доля времени, в течение которого все группы потребления, доступные группе производителей, заняты потреблением.

Если в выражения для потери по числу поступивших заявок на поставку товара, потери объем товара и потери по времени подставить математические ожидания соответствующих случайных величин, то можно говорить о вероятности потерь по этим величинам.

Дисциплиной обслуживания с ожиданием (условными потерями) называется такая дисциплина, при которой поступающий товар в момент отсутствия свободных групп потребителей не теряется, а поступает на хранение. (дисциплина обслуживания с ожиданием).

Для количественной оценки качества обслуживания с ожиданием рассчитываются следующие характеристики:

– вероятность того, что время ожидания больше нуля – то есть вероятность очереди – p ($\gamma > 0$);

– вероятность ожидания для любого поступившего товара свыше времени t – p ($\gamma > t$);
вероятность ожидания задержанного товара

свыше времени $t - p_3 (\gamma > t)$;

– среднее время ожидания по отношению ко всем поступившим вызовам – γ »

– среднее время ожидания по отношению только к задержанным вызовам – $\gamma'_{\text{задер}}$

– вероятность того, что длина очереди превышает заданную величину $r - p(R > r)$;

– средняя длина очереди – $\bar{r}$.

Основными характеристиками являются $p(\gamma > 0)$ и $p(\gamma > t)$.

1.5.6. Пропускная способность рынка

Одной из важнейших свойств рынка является его эффективность.

В качестве показателей эффективности рынка наряду с экономическими (ценами, себестоимостью товара и т. д.) можно использовать такую характеристику, как пропускную способность рынка.

Под пропускной способностью рынка понимается величина интенсивности обслуженного предложения (проданного товара за определенный промежуток времени) при определенной величине потерь (не проданного товара).

Пропускная способность рынка зависит от величины потерь, которые удовлетворяют участников рынка, числа групп потребителей, распределения длительности потребления и дисциплины обслуживания (явные потери или с ожиданием), от типа входного потока.

Величина потерь, которая характеризует состояние рынка, различна для различных категорий товаров.

Очевидно, что чем больше допустимая норма потерь, тем больше пропускная способность рынка и тем хуже качество обслуживания производителей, т.е. он может принять от производителей большую величину товара и большую часть терять или задерживать на хранении свыше заданного времени.

Поток поступления товаров (предложение) в математических моделях чаще всего принимается простейшим, потоком Пальма или примитивным. В этих случаях удастся относительно просто получить решение задачи аналитическим методом.

Реальные потоки товаров имеют более сложную структуру, и решение задач осуществляется обычно по данным полученным для простейшего потока в виде граничных оценок показателей (лучше простейшего потока или хуже).

Наиболее удобной функцией распределения длительности обслуживания с точки зрения аналитического описания и анализа пропускной рынка является показательное распределение, так как оно не обладает последствием.

Практическое применение находят применяемые вероятностные распределения – распределение плотности, распределение Эрланга и др.

Дисциплина обслуживания оказывает существенное влияние на математическую модель коммутационной системы, поэтому ее необходимо описывать самым детальным образом. Например, в системе с ожиданием накопленный товар может возвращаться со склада на рынок;

- в порядке поступления;
- в порядке обратном порядку поступления;
- в случайном порядке
- с различными видами приоритетов.

Пропускная способность групп потребителей оценивается отношением интенсивности обслуженного предложения $y_{об}$ к числу групп потребителей v —

$$\eta = y_{об} / v,$$

Величина η называется средней пропускной способностью, или средним использованием одной группы потребителей.

Например, в год человек максимально может приобрести 400 кг молока в год. При поставке на рынок молока в 1991 году было продано 347 кг молока на человека в год $\eta = (347/400=0.8675)$, а в 2014 продано 240 кг молока на человека в год ($\eta = 240/400=0.6$) [4.5]. Следовательно, пропускная способность молочного рынка упала на 26%/

Зависимость пропускной способности рынка можно анализировать с точки зрения поступающего предложения $\eta = f(y)$ или с точки зрения числа групп потребителей $\eta = f(v)$ при фиксированных значениях потерь.

Величина η при увеличении интенсивности поступающей

нагрузки асимптотически приближается к единице. Это объясняется уменьшением влияния временных колебаний величины спроса. Это свойство показывает полезность объединения групп потребителей (увеличению размеров рынка), что приводит к уменьшению указанных колебаний.

1.6. Контрольные вопросы к Главе 1

1. Интенсивность предложения – это _____
 - а. число вызовов в единицу времени
 - б. суммарная продолжительность вызовов в единицу времени
 - в. спрос товаров в единицу времени
 - г. сумма товаров, пропущенная системой

2. Обслуженное рынком предложение за промежуток времени (t_1, t_2) – это _____
 - а. количество товаров, проданное за время (t_1, t_2)
 - б. разность между поступающим и обслуженным предложением за рассматриваемый промежуток времени.
 - в. сумма партий товаров, обслуженную данной группой потребителей за период (t_1, t_2)
 - г. сумма требований на определенное количество товаров, обслуженная за время (t_1, t_2)

3. Единица измерения интенсивности спроса товаров принята _____
 - а. число покупок в час
 - б. величина относительного потребления при максимальном потреблении ($P_{реал} = P_{max}$) в единицу времени.
 - в. сумма поставленных товаров
 - г. величина поступающих заявок на товары

4. Время наибольшего спроса – ВНС _____
 - а. время сезона с максимальным спросом
 - б. время из выборки последовательных отрезков времени с максимальной нагрузкой
 - в. время максимального спроса за каждый месяц
 - г. непрерывный заданный отрезок времени, с максимальным значением интенсивности спроса

2. Основными параметрами спроса являются: _____
 - а. число групп потребителей - n ; среднее число заявок на товары, единицу времени $\bar{c}$; средняя длительность потребления обслуживания одной заявки $\bar{t}$

5. число групп потребителей - n ; среднее число заявок на товары – $\bar{c}$, цена за единицу времени; цена за единицу товара;
 - в. количество поступившего товара; среднее число заявок на товары – $\bar{c}$, цена за единицу времени; средняя длительность потребления обслуживания одной заявки $\bar{t}$.
 - г. число групп потребителей - n ; количество обслуженных заявок на товары – $\bar{c}$; средняя длительность потребления обслуживания одной заявки $\bar{t}$.

6. При перепроизводстве товаров понижении цены на товар число потребителей _____
 - а. увеличивается
 - б. уменьшается
 - в. стабилизируется

7. Среднее число заявок от одного потребителя в единицу времени от k групп потребителей определяется по _____,

- а. по группе с большим числом заявок
- б. по средневзвешенному числу
- в. по наиболее часто встречающемуся числу
- г. произвольно

8. Время потребления товара, может быть _____ времени обладания

- а. равно
- б. меньше
- в. больше
- г. в зависимости от условий хранения

9. Под пропускной способностью рынка понимается величина

а. интенсивности обслуженного предложения за определенный промежуток времени при определенной величине потерь

- б. интенсивности обслуженного предложения за определенный промежуток времени
- в. объема проданного товара за определенный промежуток времени
- г. числа заявок на определенный товар за определенный промежуток времени

10. Чем больше допустимая норма потерь, тем _____

а. меньше пропускная способность рынка и тем хуже качество обслуживания производителей зависит от типа нагрузки

б. больше пропускная способность рынка и тем хуже качество обслуживания производителей

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.