Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

Н.В. Никонова, Г.А. Никонова, Н.Н. Газизова

МАТЕМАТИКА
ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

Часть 1

Учебное пособие

Казань
Издательство КНИТУ
2013

УДК 51(075)

Никонова Н.В.

Математика. Практическое приложение для студентов вузов. Ч. 1 : учебное пособие / Н.В. Никонова, Г.А. Никонова, Н.Н. Газизова; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2013. – 100 с.

ISBN 978-5-7882-1470-2

Содержит теоретический материал, прикладные задачи, расчетные задания, типовые задачи с решениями, варианты контрольных работ по темам: линейная и векторная алгебра, дифференциальное исчисление функции одной переменной, основные понятия о функции нескольких переменных.

Предназначено для самостоятельной подготовки бакалавров и магистров очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Математика».

Подготовлено на кафедре высшей математики.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского национального исследовательского технологического университета

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики ИЭУиП *Д.В. Шевченко*
канд. физ.-мат. наук, доцент, каф. общей математики ПФУ *Н.П. Заботина*

ISBN 978-5-7882-1470-2

Цель настоящего пособия — помочь студентам КНИТУ первого и второго года обучения в самостоятельной работе над учебным материалом.

Для удобства изучения теоретическая часть материала иллюстрируется подробно разобранными примерами и задачами с применением выведенных формул. Для закрепления материала предложены *задачи для самопроверки* с *ответами*. Материал, приведенный мелким шрифтом, предназначен для углубленного изучения предмета. В конце каждого блока приводятся тестовые задания для контрольной проверки студентов.

ЧАСТЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1.1. Линейные системы двух уравнений с двумя неизвестными

⇒ О. Квадратной матрицей II-го порядка называется таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Принятые обозначения:

числа (a_{ij}), i,j=1,2, составляющие матрицу, называются ее элементами;

первый индекс - i- указывает номер строки, второй индекс j- номер столбца, на пересечении которых лежит этот элемент.

⇒ О. Определителем второго порядка (детерминантом), соответствующим квадратной матрице второго порядка, называется число

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

вычисляемое по правилу $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

♦ **Пример 1**. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ =3·7-(-2)·4=21+8= 29.

⇒ **О.** Линейной системой двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1.3)$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Принятые обозначения:

x_1,x_2- неизвестные; a_{ij}, i,j=1,2- коэффициенты при неизвестных;

b_1,b_2- свободные члены.

Коэффициенты при неизвестных составляют матрицу системы (1.1). Матрица

$$\left(A \setminus B\right)=\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \qquad (1.4)$$

называется расширенной матрицей системы.

Например, для системы $\begin{cases} 2x+3y-6 \\ 3x-5y=-9 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$-основная матрица системы.

$\left(A/B\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -5 & -9 \end{array}\right)$- расширенная матрица системы.

Для решения таких систем применяются: метод подстановки, изучаемый в школе, формулы Крамера, метод Гаусса и др.

Остановимся на формулах Крамера. Главным определителем системы (1.3) назовем число (1.2). Определителями неизвестных x_1, x_2 назовем

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12} \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \qquad (1.5)$$

Формулы Крамера. Если $\Delta\neq0$, то система (1.3) имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

(1.6)

♦**Пример 2.** Найдем решение приведенной выше системы

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 3x - 5y = -9 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3 \cdot 3 = -10 - 9 = -19;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} = (-6)(-5) - 3 \cdot (-9) = 30 + 27 = 57;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - (-6) \cdot 3 = -1 + 18 = 0;$$

$$x = \frac{57}{-19} = -3; \quad y = \frac{0}{-19} = 0.$$

♦**Пример 3**. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$.

По формулам Крамера имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1(-5) - 3 \cdot 4 = -17;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 11(-5) - 3(-7) = -55 + 21 = -34;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 1(-7) - 4 \cdot 11 = -7 - 44 = -51;$$

Тогда $x = \dfrac{-34}{-17} = 2$; $\quad y = \dfrac{-51}{-17} = 3$.

♦**Пример 4**. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7x + 4y = 18 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 18 \cdot 3 - 4 \cdot 13 = 54 - 52 = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 18 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 7 \cdot 13 - 5 \cdot 18 = 91 - 90 = 1;$$ x=2/1=2; y=1/1=1.

Метод Гаусса- метод последовательного исключения неизвестных- рассмотрим на примере.

♦ **Пример 5.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

1) разделим элементы первой строки на 3 (первый элемент первой строки). Делается это для того, чтобы получить на месте элемента a_{11} единицу.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

2) из второй строки вычтем первую строку умноженную на 2 (на первый элемент второй строки)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

3) вернемся к системе линейных уравнений, которую получим из расширенной матрицы. Так как первый столбец- это коэффициенты при x, а второй- при y, то

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -5y = 5 \end{cases}$ Из второго уравнения системы найдем y= $5/(-5) = -1$

Подставим найденный y в первое уравнение системы $x - 2y = 4$

x= $4 + 2y = 4 + 2(-1) = 2$.

Таким образом, получаем, что x=2, y=-1.

Задачи для самопроверки.

1.1 Вычислить определители.

а) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$.

1.2 Решить системы с помощью формул Крамера и метода Гаусса.

а) $\begin{cases} 7x-3y=4 \\ 3x+5y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1+x_2=4 \\ 5x_1-3x_2=-1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+y=7 \end{cases}$.

Ответы: 1.1.а) 32; 1.1.б) –3 1.1 в) 37; 1.2.а) x=1, y=1; 1.2. б) $x_1=1$, $x_2=2$; 1.2.в) x=2, y=1.

Тема 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

⇒ О. Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1.7)$$

где a_{ij}- коэффициенты при неизвестных (первый индекс указывает номер уравнения, второй- номер неизвестной), b_i- свободные члены, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

⇒О. Решением системы (1.7) называется совокупность n чисел $(\overline{x_1};\overline{x_2};...;\overline{x_n})$, которые при подстановке вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества.

⇒О. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если решений нет.

⇒О. Система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет больше одного решения.

$\Rightarrow$О. Система называется однородной, если все $b_i = 0$, $i = \overline{1, m}$. В противном случае система называется неоднородной.

Однородная система всегда совместна, т.к. имеет нулевое решение.

$\Rightarrow$О. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} -элементы матрицы, i-номер строки, j- номер столбца на пересечении которых лежит этот элемент. Если число строк матрицы совпадает с числом столбцов, то матрица называется квадратной.

Коэффициенты при неизвестных в системе (1.7) составляют матрицу системы, состоящую из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Матрица вида

$$\left(A/B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_3 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (1.9)$$

называется расширенной матрицей системы (1.7).

Выделим в матрице (1.9) любые k строк и любые k столбцов. Тогда определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пресечении выделенных строк и столбцов, называется минором k-го порядка матрицы A.

$\Rightarrow$О. Рангом матрицы А (обозначается rg A) называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от 0.

Если ранг матрицы одной матрицы равен рангу другой матрицы, то такие матрицы называются эквивалентными.

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над матрицей.

$\Rightarrow$О. Под элементарными преобразованиями понимают:

а) замену строк столбцами, а столбцы- соответствующими строками;

б) перестановку строк матрицы;

в) вычеркивание строки, все элементы которой равны 0;

г) умножение какой- либо строки на число, отличное от 0;

д) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

<u>Уровень 2.</u> ♦**Пример 6.** Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Используя элементарные преобразования, вычтем из элементов 4-го столбца элементы 3-го столбца, а затем вычеркнем 4-й столбец:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=24\neq 0$, то ранг матрицы равен 3.

Теорема. (Кронекера- Капелли). Система (1.7) совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы А (1.8) равен рангу ее расширенной матрицы (1.9).

<u>Уровень 2.</u> Доказательство.

1) Пусть система совместна, тогда

$$\alpha_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix},$$

т.е. столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы системы. Исходя из свойств определителя и определения ранга матрицы, приходим к выводу, что ранг матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы.

2) Пусть ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы А. В этом случае столбец свободных членов не может сводиться к линейной комбинации столбцов матрицы, т.е.

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}\neq\alpha_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Последнее означает, что система несовместна.

Тема 1.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса является одним из наиболее эффективных и универсальных методов решения линейных систем. Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе система (1.7) приводится к треугольному виду; на втором этапе идет последовательное определение неизвестных из полученной треугольной системы.

Применим данный метод для решения системы (1.7).

Пусть в системе (1.7) $a_{11}\neq 0$. Этого можно добиться несколькими способами, в числе которых перестановка уравнений местами, элементарные преобразования над строками. Все преобразования в дальнейшем будем проводить с расширенной матрицей. Нужно исключить все коэффициенты при x_1, т.е. обратить все элементы первого столбца, начиная со второй строки в 0. Разделим первую строку на a_{11}, т.е. преобразуем систему в равносильную так, чтобы $a_{11}=1$.