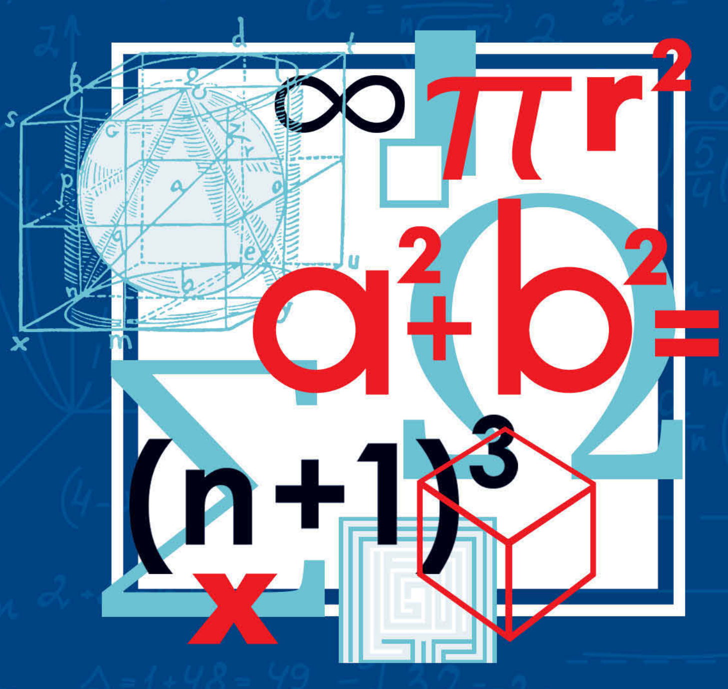
МАТЕМАТИКА

ПОЛНАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ



УДК 087.5: [51+52] (03)
ББК 22.1 + 22.6
М34

М34 **МАТЕМАТИКА. Полная энциклопедия** / И. Ф. Акулич, И. Г. Башмакова, Н. Б. Васильев и др. — М. : РОСМЭН, 2020. — 256 с. : ил.

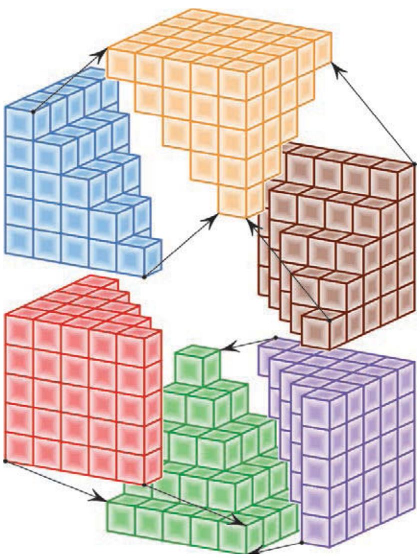
Без математики невозможно ни освоение космоса, ни создание роботов. Математика — точная наука, не терпящая ошибок. Ее законы легли в основу всех изобретений. Материал книги позволит как проверить свои знания, так и узнать новое.

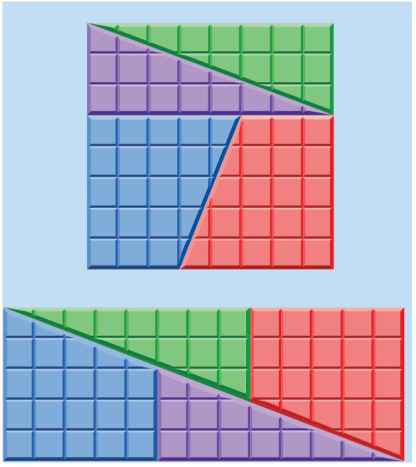
ISBN 978-5-353-09459-3

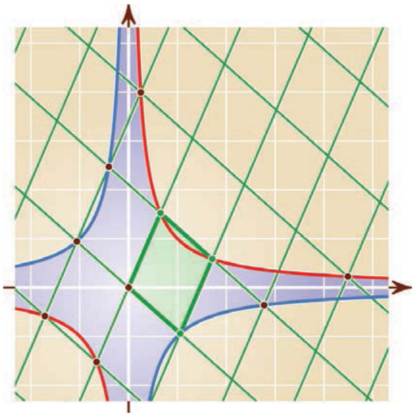
УДК 087.5: [51+52] (03)
ББК 22.1 + 22.6

Содержание

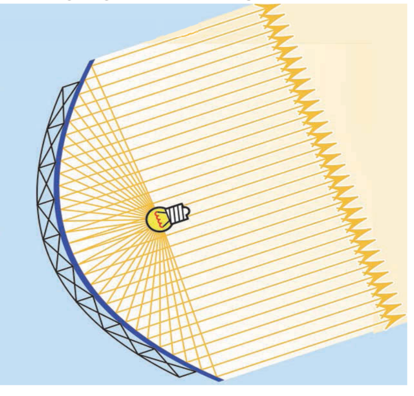
Арифметика

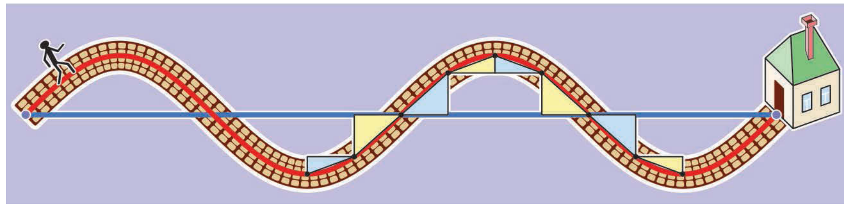


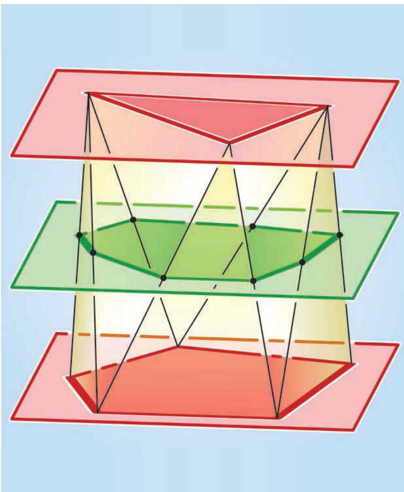


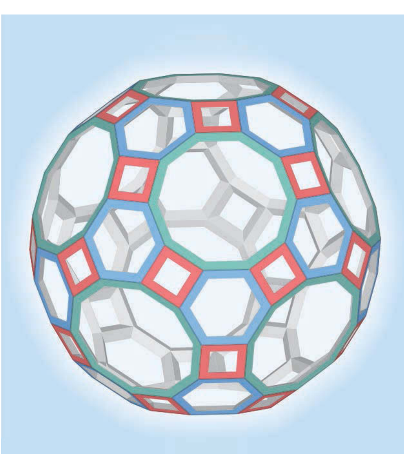


Геометрия

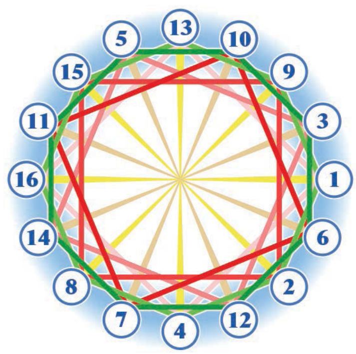


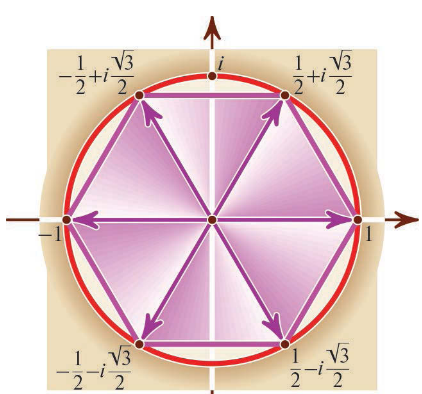




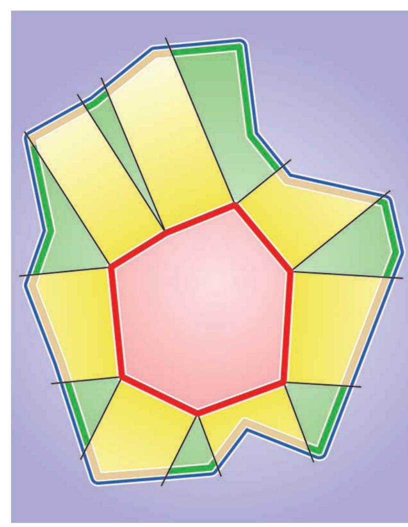


Алгебра

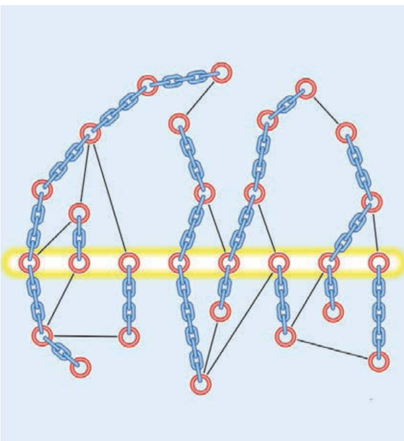


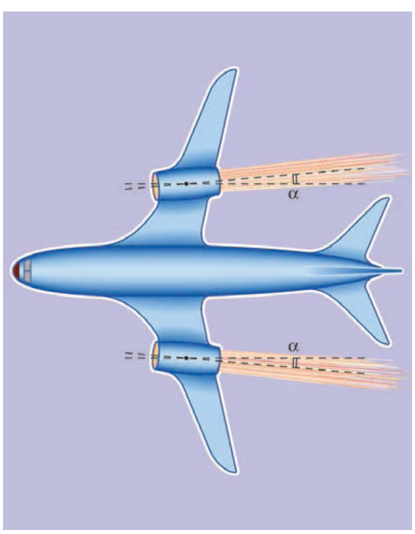


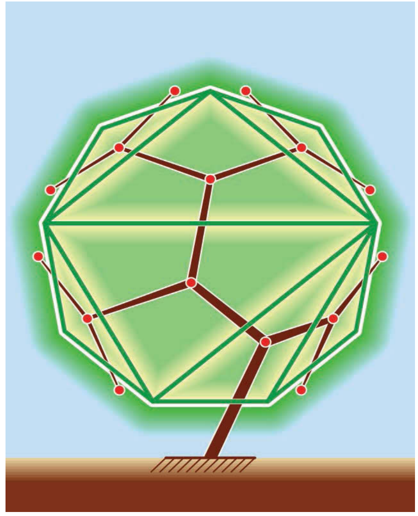
Математический анализ

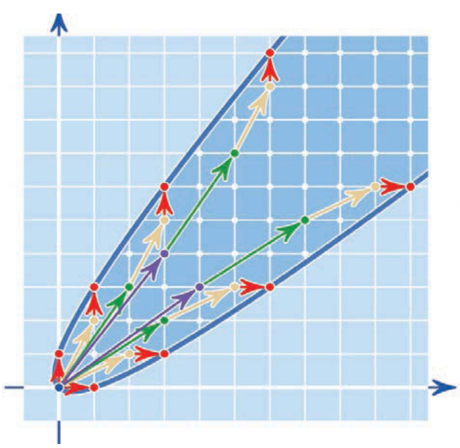


Комбинаторика

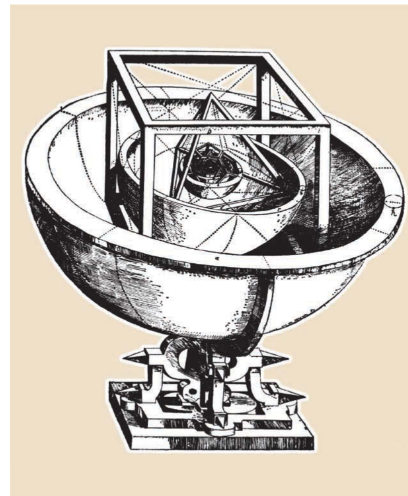








История математики



Арифметика

Традиционный урок алгебры отличается от урока геометрии тем, что на одном вычисляют, а на другом доказывают. В обязательной школьной программе не выделена отдельно теория чисел: элементы арифметики включены в алгебру. Математическая логика тем более не является обязательным предметом.

Но математика давным-давно преодолела древнюю традицию, когда доказательствами снабжали в основном геометрические теоремы, а алгебраические и арифметические методы и закономерности излагали в виде рецептов-алгоритмов, считая, что пользователь скорее всего не нуждается в обосновании, поскольку ему нужен лишь практический результат (а если нуждается — пусть сам догадывается, почему метод работает!).

Арифметика приобрела свою систему аксиом в конце XIX в. — между прочим, практически одновременно с геометрией («Основания геометрии» Д. Гильберта опубликованы в 1899 г.). Основные понятия: натуральное число, следование одного непосредственно за другим и 1 — начальное число натурального ряда.

Аксиомы Дж. Пеано (1858—1932).

1) 1 — *натуральное число*.

2) *Для каждого числа a («число» будет означать пока «натуральное число») существует последующее число a^+*.

3) *Всегда $a^+ \neq 1$, то есть нет числа с последующим числом 1*.

4) *Из $a^+ = b^+$ следует $a = b$, то есть каждое число либо вовсе не является последующим ни для какого числа, либо является последующим точно для одного числа*.

5) (Принцип индукции.) *Каждое множество натуральных чисел, которое содержит число 1 и вместе с каждым своим числом a содержит последующее число a^+, содержит все натуральные числа*.

На пятой аксиоме основан метод доказательства с помощью индукции. Чтобы доказать, что некоторым свойством S обладают все числа, доказывают сначала, что им обладает число 1 (база индукции), а затем доказывают его для произвольного числа n^+ при «индуктивном предположении», что число n свойством S уже обладает. В силу аксиомы 5 множество чисел, обладающих свойством S, содержит все числа.

Определение сложения. Каждой паре чисел x, y можно единственным образом сопоставить натуральное число, обозначаемое через $x+y$, чтобы оказались выполненными следующие два условия:

6) $x+1 = x^+$ *для каждого x*;

7) $x+y^+ = (x+y)^+$ *для каждого x и для каждого y*.

Теорема 1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения*).

Доказательство — индукция по c. (Над знаками равенства стоят номера примененных аксиом.) **База:** $(a+b)+1 \overset{6}{=} (a+b)^+ \overset{7}{=} a+b^+ \overset{6}{=} a+(b+1)$. **Переход:**

$$(a+b)+c^+ \overset{7}{=} ((a+b)+c)^+ = (a+(b+c))^+ \overset{7}{=}$$
$$\overset{7}{=} a+(b+c)^+ \overset{7}{=} a+(b+c^+).$$

Теорема 2. $a+1 = 1+a$.

Доказательство — индукция по a. **База** тривиальна: $1+1 = 1+1$. **Переход:**

$$a^+ + 1 \overset{6}{=} (a+1)+1 = a+(1+1) \overset{6}{=} a+1^+ \overset{7}{=}$$
$$= (a+1)^+ = (1+a)^+ \overset{7}{=} 1+a^+.$$

Теорема 3. $a+b = b+a$ (*коммутативность сложения*).

Доказательство — индукция по b. База — это утверждение теоремы 2. **Переход:**

$$a+b^+ \overset{7}{=} (a+b)^+ = (b+a)^+ \overset{7}{=} b+a^+ \overset{6}{=} b+(a+1) =$$
$$= b+(1+a) = (b+1)+a \overset{6}{=} b^+ + a.$$

Доказательства следующих утверждений тоже проводятся по индукции.

Теорема 4. *Из равенства $a+b = a+c$ следует $b = c$*.

Определение умножения. Каждой паре двух чисел x, y можно единственным образом сопоставить натуральное число, обозначаемое через $x \cdot y$ или через xy, так, чтобы были выполнены следующие условия:

8) $x \cdot 1 = x$,

9) $x \cdot y^+ = x \cdot y + x$ *для каждого x и для каждого y*.

Теорема 5. $ab \cdot c = a \cdot bc$ (*ассоциативность умножения*).

Теорема 6. $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность умножения*).

Теорема 7. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*дистрибутивность*).

Теорема 8. *Из $ab = ac$ следует $b = c$*.

Далее можно ввести понятие степени и доказать свойства степеней, определить понятия меньше и больше и вообще построить арифметику столь же педантично, как на основе аксиом строят геометрию.

Может показаться, что таким образом мы будем изучать узкий круг вопросов. Любое математическое рассуждение (да и не только математическое, а вообще любое рассуждение!) — это текст некоторого языка. У этого языка есть некоторые правила, в соответствии с которыми высказывания признают верными или ошибочными. Тексты не так уж сложно — компьютер с этим справляется! — закодировать последовательностями нулей и единиц. И тогда правила рассуждений станут некоторыми правилами для преобразований чисел. Преобразования эти, конечно, довольно замысловаты. Но это именно преобразования чисел! Поэтому с полным правом можно сказать, что арифметика включает все остальные вопросы математики.

К. Гёдель (1906—1978) доказал, что множество истинных арифметических теорем является неперечислимым. Таким образом, какой бы мощный компьютер с какой бы умной программой мы ни поставили выводить теоремы арифметики, он или ошибется и выдаст за истину ложное утверждение, или же пропустит бесконечно много истин.

Арифметика богата простыми с виду, но чрезвычайно трудными задачами. Например, $2=5-3=7-5=$ $=13-11=19-17=31-29$ — разности соседних простых чисел довольно часто равны 2. Конечно или бесконечно множество таких пар простых чисел-«близнецов»? Никто не знает. Верно ли, что если a, b, c — натуральные числа, причем числа a и b взаимно просты, то уравнение $ap-bq=c$ имеет решение в простых числах p и q? Никто не знает. Конечно или бесконечно множество простых чисел вида n^2+1? Никто не знает!

Каждое четное число (кроме числа 2), насколько удается посчитать на компьютере, является суммой двух простых чисел: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=5+3$, ... Но всегда ли это верно или же существует очень большое четное число, не представимое в виде суммы двух простых? Никто не знает. (Правда, в 1937 г. И. М. Виноградов (1891—1983) придумал метод оценивать тригонометрические суммы, при помощи которого удалось доказать, что каждое достаточно большое нечетное число является суммой трех простых чисел. Но окончательно задача еще не решена.)

Легко заметить, что $1+2+3=6$ и $1+2+4+7+14=28$. Много ли еще существует совершенных чисел — чисел n, сумма делителей которых, отличных от n, равна самому числу n, то есть чисел, удовлетворяющих равенству $\sigma(n)=2n$? Л. Эйлер (1707—1783) доказал, что всякое совершенное четное число имеет вид $2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа. Но до сих пор никто не знает, конечно или бесконечно множество простых чисел вида 2^p-1 — и тем самым конечно или бесконечно множество четных совершенных чисел. Еще интереснее, что не найдено ни одного нечетного совершенного числа — и не доказано, что его не существует!

Тут стоит сделать одно предупреждение. Попытки поиска «голыми руками» или даже попытки компьютерных вычислений *ничего* не дадут: совершенными числами (как и всеми остальными знаменитыми задачами) занимались математики самого высокого уровня. Никакие дилетантские усилия в науке ничего, кроме разочарования, дать не могут.

Яркий тому пример — великая теорема П. Ферма: $x^n+y^n\neq z^n$, где n, x, y и z — натуральные числа, $n>2$. Она казалась столь же недоступно сложной, как задача о совершенных числах. Но дала математике очень много: во многом ради ее решения развивали теорию алгебраических чисел, а решена она была в 1995 г. Э. Уайлсом при помощи глубоко развитой теории эллиптических кривых.

Одна из интересных глав арифметики — теория распределения простых чисел. Через $\pi(x)$ обозначают количество простых чисел, не превосходящих числа x. В «Началах» Евклида доказано, что $\pi(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, то есть что множество простых чисел бесконечно. Доказательство в высшей степени красивое. Предположим противное: множество простых чисел конечно и $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ..., p_n — полный их список. Рассмотрим число $q=p_1p_2\ldots p_n+1$. Оно при делении на любое из простых чисел p_1, p_2, ..., p_n дает в остатке единицу и поэтому не делится ни на одно из них. Получили противоречие: число q больше любого простого числа и поэтому должно быть составным, то есть разлагаться в произведение простых чисел. Но число q не делится ни на какое простое число!

П. Л. Чебышёв (1821—1894) доказал, что отношение $\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$ при $x>2$ ограничено снизу и сверху числами $\ln\sqrt{2}$ и $\ln 4$; причем если предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}$ существует, то он равен 1. Изучая функцию

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\ \text{простое}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где $s>1$, и ее аналитическое продолжение, Б. Риман (1826—1866) высказал гипотезу, что

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+O(\sqrt{x}\ln x).$$

Эта гипотеза до сих пор не доказана, хотя в 1896 г. Ш. Ж. де ла Валле Пуссен (1866—1862) и Ж. Адамар (1865—1963) доказали, что $\zeta(s)\neq 0$ при $\operatorname{Re} s\geqslant 1$ и вывели отсюда равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}=1$.

Свойства алгебраических и трансцендентных чисел, количество точек с целыми координатами внутри круга $x^2+y^2\leqslant r^2$ и внутри более сложных фигур, проблема Варинга представления чисел в виде суммы некоторого фиксированного количества n-х степеней неотрицательных целых чисел — этими и многими другими сложными задачами, в том числе теснейшим образом связанными с практикой, занимается теория чисел. Приглашаем познакомиться с некоторыми ее интересными и доступными школьнику результатами по нашим статьям.

Как считали в старину и как писали цифры?

Вот как выглядит запись числа 1917 — года, когда, по словам профессора Д. Е. Меньшова, московские математики начали заниматься тригонометрическими рядами, — в разных системах нумерации.

Римская нумерация весьма древнего происхождения. Начертание цифр было заимствовано у более ранних обитателей Италии — этрусков. Этрусский знак сотни ⊕ обратился сначала в ⦶, затем в C. Этрусское 50, писавшееся как ↓, обратилось сначала в ⊥, затем в ⊥ и затем, наконец, в L. Десятку они обозначали крестом + или ×, римляне оставили лишь вторую форму. Пятерку этруски писали как ∧ или ∨ — половина знака для десятки. (Идею «деления символа» использовали и ацтеки: число 400 они обозначали , 300 — , 200 — , 100 — .) ■

Римская нумерация не является строго десятичной. В ней сохранились следы другого основания — пяти: есть специальные знаки для пяти, пятидесяти и пятисот.

1	I	11	XI	30	XXX	400	CD
2	II	12	XII	40	XL	500	D
3	III	13	XIII	50	L	600	DC
4	IV	14	XIV	60	LX	700	DCC
5	V	15	XV	70	LXX	800	DCCC
6	VI	16	XVI	80	LXXX	900	CM
7	VII	17	XVII	90	XC	1000	M
8	VIII	18	XVIII	100	C	2000	MM
9	IX	19	XIX	200	CC	3000	MMM
10	X	20	XX	300	CCC	4000	MMMM

Все числа мы привыкли записывать с помощью десяти знаков — цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Например, число, состоящее из четырех сотен, четырех десятков и четырех единиц, мы записываем так: 444. Одна и та же цифра «4» обозначает количество единиц, если она стоит на последнем месте, количество десятков — если на предпоследнем, количество сотен — на предпредпоследнем. Такой принцип записи чисел называют позиционным. Он появился тысячелетие назад и оказался самым удобным среди всех прочих принципов счисления.

Устный счет. Всегда ли люди пользовались позиционным принципом? Обратимся к устному счету. Для цифр мы употребляем специальные названия: «нуль», «один», «два», . . . , «девять». Для следующего числа есть новое слово «десять»; мы не говорим «один-нуль», хотя и записываем его с помощью единицы и нуля: 10.

Названия чисел от 11 до 99, как правило, составлены из названий первых чисел: «одиннадцать» (один-на-десять), «тридцать один» (три-десять-один). Для 100 мы употребляем новое слово — «сто». Все наименования чисел от 101 до 999 опять составные, а для 1000 вводится новое слово — «тысяча». Далее появляются слова «миллион», «миллиард», «триллион». Как видите, по мере роста чисел возрастает и количество используемых слов. Следовательно, наш способ наименования чисел не является позиционным. Он сохранил следы каких-то более старых нумераций.

В одной из таких старых нумераций — римской — есть специальные знаки для единицы (I), пяти (V), десяти (X), пятидесяти (L), ста (C), пятисот (D) и тысячи (M). Остальные числа записывают при помощи этих символов. Например, III — запись числа 3 (I+I+I), IV — числа 4 (V−I), XCI — числа 91 (C−X+I). Число 444 в римской системе счисления записывается в виде CDXLIV; здесь четыре единицы записаны символами IV, четыре десятка — XL, а четыре сотни — CD.

С числами, записанными в римской системе нумерации, очень трудно производить арифметические действия. Попробуйте умножить 444 на 36, если оба числа обозначены римскими цифрами! Сами римляне пользовались для арифметических операций специальной счетной доской — абаком.

Есть еще один существенный недостаток римской системы нумерации: она не дает удобного способа записи больших чисел. Например, чтобы записать число 1 000 000, надо либо 1000 раз повторить знак M, либо ввести новый символ. Причина в том, что римская система не является позиционной. Знак V, например, означает только пять единиц, а не пять десятков и не пять сотен.

В нашем устном счете имеются некоторые черты, напоминающие римскую систему. Так, мы тоже используем сложение, образуя числительные от 11 до 19. Но начиная с 20 мы используем и умножение, чего нет в римской системе: «двадцать» означает «дважды десять», тридцать — «трижды десять». В русском языке сохранились и следы нумерации с основанием 40, которой пользовались наши предки. Действительно, для этого числа используем новое, несоставное название — «сорок». Известны выражения: «сорок сороков церквей», «сорок сороков черных соболей». О том, что число 40 когда-то играло особую роль при счете, говорят и некоторые связанные с ним поверья. Так, сорок первого медведя считали роковым для охотника. (А в связи с тем, что некогда была распространена двенадцатеричная система счисления, и сейчас некоторые считают число 13 несчастливым.)

Во французском языке сохранились следы нумерации с основанием 20; число 80 читается: «quatre-vingts» — «четыре-двадцать», число 90 — «quatre-vingt-dix» — «четыре-двадцать-десять». Следы двадцатеричной системы сохранились в английском и голландском языках, следы пятеричной — в скандинавских языках.

Итак, устная речь показывает, что наши предки пользовались непозиционной нумерацией, причем основаниями, кроме десяти, служили и другие числа. ■

Счет у первобытных народов.

Еще недавно существовали народы, в языке которых были названия только двух чисел: «один» и «два». Но это не значит, что представители этих народов не могли сосчитать до трех. У туземцев островов, расположенных в Торресовом проливе (отделяющем Новую Гвинею от Австралии), единственными числительными являлись «урапун» (один) и «окоза» (два). Островитяне считали так: «окоза-урапун» (три), «окоза-окоза» (четыре), «окоза-окоза-урапун» (пять) и «окоза-окоза-окоза» (шесть). О числах начиная с семи туземцы говорили «много». Таким образом, они освоили лишь несколько первых натуральных чисел. Кстати, пословицы говорят, что именно так дело обстояло и у наших предков. Мы говорим: «у семи нянек дитя без глаза», «семь бед — один ответ», «семеро одного не ждут», «семь раз отмерь, один раз отрежь». Очевидно, слово «семь» употреблено в смысле «много»: если нянек слишком много — за ребенком нет присмотра, много бед — один ответ.

Но вернемся к нашему рассказу. Очень рано у людей появилась необходимость сообщать друг другу о том, что такое-то число предметов должно быть доставлено через столько-то дней или что племя должно выставить такое-то число воинов. Вот как, по рассказу русского путешественника Н. Н. Миклухо-Маклая, поступали на Новой Гвинее: «Излюбленный способ счета состоит в том, что папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например «бе-бе». Досчитав до пяти, он говорит «ибон-бе» (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, повторяя «бе-бе», пока не доходит до «ибон-али» (две руки). Затем он считает дальше, приговаривая «бе-бе», пока не доходит до «самба-бе» и «самба-али» (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-то другого».

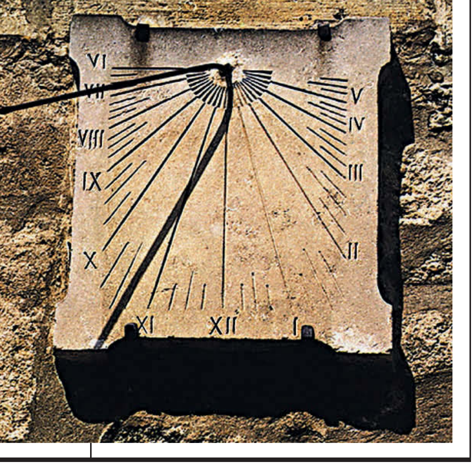
Итак, предметы при счете сопоставлялись пальцам рук и ног. При переговорах папуасу достаточно было сказать, например, что он дошел до третьего пальца правой ноги. Островитяне Торресова пролива для такого счета употребляли не только пальцы, но и другие части тела (запястье, локоть, плечо), всегда в одном и том же порядке. Так они могли считать до 33.

Необязательно считать десятками. Можно вести счет двойками, тройками или даже дюжинами. Возьмем, например, в качестве основания число 2, а в остальном будем поступать точно так же, как мы это делаем в привычной (десятичной) системе. Понадобятся всего две цифры: 0 и 1. Тогда число два запишется как 10, три — как 11, четыре — 100, семь — 111, тридцать пять — 100 011 (проверьте!).

Для записи чисел в троичной системе нужны три цифры: 0, 1 и 2. Число три запишется как 10, четыре — 11, тридцать пять — 1022. Можно считать не только двойками, тройками или десятками, но и дюжинами: сервизы обычно составляют из 12 чашек, 12 блюдец, 12 тарелок, а комплекты мебели — из 12 стульев или кресел. Существует даже специальное название для дюжины дюжин — гросс.

О широком распространении двенадцатеричной системы свидетельствуют такие факты: мы делим год на 12 месяцев, а сутки — на 24 часа, причем в повседневной жизни часы считаем только до 12, а затем начинаем счет заново («час дня», «два часа дня»). Число 12 часто встречается также в сказках и легендах (двенадцатиглавый змей, двенадцать братьев-разбойников), что свидетельствует о древнем происхождении двенадцатеричной системы. ■

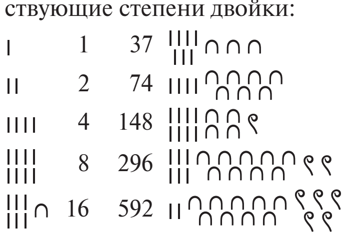
Одни из первых солнечных часов имели шкалу с римскими цифрами.



Обозначение чисел у ацтеков (Мексика) в XI—XVI вв.

Хорошей иллюстрацией к такому способу счета служат обозначения чисел, принятые в XI—XVI вв. индейцами племени ацтеков (Мексика): единицу они обозначали точкой, двойку — двумя точками и так далее до пяти. В запись числа 6 входила вертикальная черта, отделявшая пять первых точек от шестой. Ясно, что счет вели группами по 5 предметов. Черта отделяла одну такую группу от другой, причем сама черта никакого числа не обозначала. ■

Египетское умножение. Знакомясь с римской системой, мы убедились, что умножать числа, записанные в непозиционной системе, очень неудобно. Как же считали древние египтяне? Умножение и деление они производили при помощи последовательного удвоения чисел (то есть использовали идею двоичной системы счисления). Пусть, например, надо умножить 19 на 37. Египтяне последовательно удваивали число 37, записывая в правый столбец результаты удвоения, а в левый — соответствующие степени двойки:



Удваивали до тех пор, пока не оказывалось, что из чисел левого столбца можно составить множитель. В нашем примере: 19 = = 1+2+16. Затем складывали числа, стоящие в соответствующих строках справа. В нашем примере: 37 + 74 + 592 = 703. Так получали произведение. ■

Суть этого способа заключается в том, что для нахождения количества элементов множества его элементы сопоставляли с частями тела, а иногда и просто с палочками. Разумеется, наиболее удобными «инструментами» являются пальцы, вследствие чего предметы при пересчете чаще всего группировали по 5, по 10 или по 20. Это и объясняет, что чаще всего основанием системы счисления служило число 10 (по числу пальцев на обеих руках), реже — 5 или 20.

Со временем хозяйство становилось все более сложным и обширным, так что счет на пальцах перестал удовлетворять людей. Они привыкли при счете располагать предметы устойчивыми группами по 2, по 10 или по 12. Появились специальные слова для обозначения таких совокупностей. Так, у туземцев Флориды слово «на-куа» означало 10 яиц, «на-банара» — 10 корзин. Но слово «на», которое, казалось бы, соответствует числу 10, отдельно не употреблялось. То же можно было наблюдать на островах Фиджи и на Соломоновых островах, где имелись специальные знаки для 100 челноков, 100 кокосовых орехов, 1000 орехов, а отвлеченных чисел не было. Числа были именованными, это еще «числа-совокупности» конкретных предметов.

С течением времени такими устойчивыми «числами-совокупностями» начали обозначать не только данные предметы, но и другие, похожие на них. Например, «числа-совокупности», обозначающие определенное количество орехов, могли впоследствии использовать для счета любых круглых предметов. Это привело к тому, что во многих языках первобытных народов образовалось несколько рядов числительных: одни употреблялись только для счета людей, другие — для круглых предметов, третьи — для продолговатых и так далее. Например, у чишмиенов (Британская Колумбия, ныне одна из канадских провинций) имелось 7 видов числительных, каждый из которых употребляли для счета предметов определенного вида. У большинства народов числа, которыми считали деньги, постепенно вытеснили все остальные. Они-то и стали теми универсальными числами, которые позволили считать любые предметы.

Так образовались числа, которым соответствовали «числа-совокупности»: если счет велся десятками, то появились названия для десяти, десяти десятков, десяти сотен. Кроме того, особые названия получали, как правило, все числа от 1 до 10. Что же касается чисел 11, 12, . . . , 19, 21 и так далее, то они составлялись из основных при помощи тех операций, которые первоначально производили над пересчитываемыми предметами. Так, на языке кламатов (Северная Америка), а также племен Британской Колумбии при обозначении составных чисел использовались специальные глаголы. Например, индеец говорил: «На дважды десять плодов я кладу сверху шесть» — и это обозначало 26 плодов. Такая фраза полностью соответствует фактическому пересчету: индейцы располагали 10 предметов в ряд, с 11-го начинался новый ряд и так далее. Постепенно эти двигательные операции перешли в арифметические.

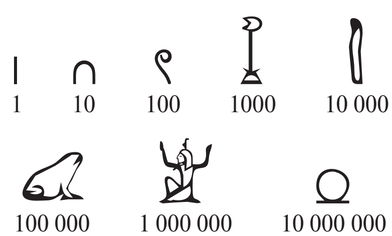
Основной операцией для образования составных числительных было сложение, но наряду с этим употреблялось и вычитание, а иногда и умножение. Например, в русском языке, как уже упоминалось, для образования числительных употребляются и сложение, и умножение (27 — два×десять+семь). Так происходило освоение натурального ряда.

Посмотрим теперь, какими были первые записи чисел и как люди оперировали с ними. ■

Египетская нумерация.

Одна из древнейших нумераций — египетская. До нас дошли надписи, сохранившиеся внутри пирамид, на плитах и обелисках. Они состоят из картинок-иероглифов, которые изображают птиц, зверей, людей, части человеческого тела (глаза, ноги) и различные неодушевленные предметы. Такой способ письма характерен для ранних ступеней культуры. (Забавно, но когда компьютеры перешли из лабораторий ученых к массовому пользователю, произошла реанимация иероглифов: в популярной системе Windows пользователь видит много картинок и мало текста.) Подобные письмена были у обитателей Центральной Америки — индейцев племени майя, в Перу. Расшифровка их представляет огромные трудности, так часто неизвестны ни звучания слов, ни значения иероглифов. Казалось бы, задача неразрешима. И все-таки многие надписи уже прочитаны! Сначала были разгаданы письмена древних египтян, затем вавилонская клинопись. В 30-х гг. XX в. были прочитаны долго не поддававшиеся расшифровке хеттские надписи.

Сохранились лишь два математических папируса, позволяющих судить о том, как считали древние египтяне. Один из них хранится в Британском музее в Лондоне, другой — в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве. Для записи чисел древние египтяне использовали иероглифы, означавшие единицу, десять, сто, тысячу, десять тысяч, сто тысяч (лягушка), миллион (человек с поднятыми руками) и десять миллионов:



Полагают, что иероглиф для сотни изображает измерительную веревку, для тысячи — цветок лотоса, для десяти тысяч — поднятый вверх палец, а для десяти миллионов — Вселенную. Остальные числа составлялись из основных с помощью операции сложения. При этом запись производилась не слева направо, а справа налево. Например, число 15 записывали так:

А число 444 писали так:

Как видите, древнеегипетская нумерация похожа на римскую, только при записи чисел не использовали вычитание. ■

Греческий алфавит и алфавитное обозначение чисел (ионийская система).

Буква	Название	Числовые значения		
Α α	альфа	$\overline{\alpha}=1$	${}_{,}\overline{\alpha}=1000$	$\overset{\alpha}{M}=\alpha^{M}=M\alpha=\alpha.=10\,000$
Β β	бета	$\overline{\beta}=2$	${}_{,}\overline{\beta}=2000$	$\overset{\beta}{M}=\beta^{M}=M\beta=\beta.=20\,000$
Γ γ	гамма	$\overline{\gamma}=3$	${}_{,}\overline{\gamma}=3000$	$\overset{\gamma}{M}=\gamma^{M}=M\gamma=\gamma.=30\,000$
Δ δ	дельта	$\overline{\delta}=4$	${}_{,}\overline{\delta}=4000$	$\overset{\delta}{M}=\delta^{M}=M\delta=\delta.=40\,000$
Ε ε	эпсилон	$\overline{\varepsilon}=5$	${}_{,}\overline{\varepsilon}=5000$	$\overset{\varepsilon}{M}=\varepsilon^{M}=M\varepsilon=\varepsilon.=50\,000$
Ϝ ς	дигамма*)	$\overline{\varsigma}=6$	${}_{,}\overline{\varsigma}=6000$	$\overset{\varsigma}{M}=\varsigma^{M}=M\varsigma=\varsigma.=60\,000$
Ζ ζ	дзета	$\overline{\zeta}=7$	${}_{,}\overline{\zeta}=7000$	$\overset{\zeta}{M}=\zeta^{M}=M\zeta=\zeta.=70\,000$
Η η	эта	$\overline{\eta}=8$	${}_{,}\overline{\eta}=8000$	$\overset{\eta}{M}=\eta^{M}=M\eta=\eta.=80\,000$
Θ θ ϑ	тета	$\overline{\theta}=9$	${}_{,}\overline{\theta}=9000$	$\overset{\theta}{M}=\theta^{M}=M\theta=\theta.=90\,000$
Ι ι	йота	$\overline{\iota}=10$		
Κ κ	каппа	$\overline{\kappa}=20$		
Λ λ	ламбда	$\overline{\lambda}=30$		
Μ μ	мю	$\overline{\mu}=40$		
Ν ν	ню	$\overline{\nu}=50$		
Ξ ξ	кси	$\overline{\xi}=60$		
Ο ο	омикрон	$\overline{o}=70$		
Π π	пи	$\overline{\pi}=80$		
ϙ ϟ	коппа*)	$\overline{\text{ϟ}}=90$		
Ρ ρ	ро	$\overline{\rho}=100$		
Σ σ ς	сигма	$\overline{\sigma}=200$		
Τ τ	тау	$\overline{\tau}=300$		
Υ υ	ипсилон	$\overline{\upsilon}=400$		
Φ φ ϕ	фи	$\overline{\varphi}=500$		
Χ χ	хи	$\overline{\chi}=600$		
Ψ ψ	пси	$\overline{\psi}=700$		
Ω ω	омега	$\overline{\omega}=800$		
ϡ	сампи*)	$\overline{\text{ϡ}}=900$		

*) Поскольку в обычном греческом алфавите только 24 буквы, для числовых обозначений были использованы еще и эти три старые буквы.

Ионийская нумерация. По мере развития торговли и ремесел недостатки непозиционных нумераций становились все чувствительнее, и в Малой Азии, где были древнегреческие колонии, в середине V в. до нашей эры появилась система счисления нового типа — ионийская алфавитная нумерация. Числа обозначали при помощи букв алфавита, над которыми ставили черточки: первые девять букв обозначали числа от 1 до 9, следующие девять — числа 10, 20, . . . , 90, следующие девять — числа 100, 200, . . . , 900. Таким образом можно было записать любое число от 1 до 999. Например, число 444 в ионийской нумерации записывали так: $\overline{\upsilon\mu\delta}$. Числа 1000, 2000, . . . , 9000 греки обозначали теми же буквами, что и числа 1, 2, . . . , 9, но ставили косую черту слева внизу. Для числа 10 000 использовали знак $\overset{\alpha}{M}$ — это число называли мириадой; две мириады, то есть 20 000, обозначали так: $\overset{\beta}{M}$. При этом $\overset{\beta}{M}$ можно было записать еще как β^{M} или как $M\beta$. Если знак М записывали позади цифры-буквы, то он часто заменялся точкой. Например, 43 458 записывалось так: $\overline{\delta.\gamma\upsilon\nu\eta}$. Так можно было обозначить все числа вплоть до

$$\overline{{}_{,}\theta\text{ϡϟ}\theta.{}_{,}\theta\text{ϡϟ}\theta}=99\,999\,999,$$

то есть до 10^8-1. Более высокие десятичные разряды уже не могли быть записаны в ионийской нумерации и не имели названий в древнегреческом языке. ■

Славянская система алфавитного обозначения чисел.

«Малые» числа					
1	а҃	21	к҃а	1000	҂а҃ тысяча
2	в҃	22	к҃в	2000	҂в҃
3	г҃	23	к҃г	3000	҂г҃
4	д҃	24	к҃д	4000	҂д҃
5	є҃	30	л҃	10 000	а⃝ тьма
6	ѕ҃	40	м҃	20 000	в⃝
7	з҃	50	н҃	100 000	а҈ легион
8	и҃	60	ѯ҃	200 000	в҈
9	ѳ҃	70	ѻ҃	1 000 000	а҉ леондр
10	і҃	80	п҃	2 000 000	в҉
11	а҃і	90	ч҃ или ч҃		
12	в҃і	100	р҃		
13	г҃і	200	с҃		
14	д҃і	300	т҃		
15	є҃і	400	ѵ҃		
16	ѕ҃і	500	ф҃		
17	з҃і	600	х҃		
18	и҃і	700	ѱ҃		
19	ѳ҃і	800	ѿ҃		
20	к҃	900	ц҃		

«Великие» числа	
10^6	а⃝ тьма
10^{12}	а҈ легион
10^{24}	а҉ леондр
10^{48}	а легион из крестиков ворон
10^{49}	а колода

Славянское алфавитное обозначение чисел возникло в X в. Его введение приписывают Кириллу. Система была построена по образцу ионийской, причем числовые значения получили лишь те буквы, которые соответствовали буквам греческого алфавита. Так, например, буква «буки» (Б) не имела числового значения: значение 2 имела буква «веди» (В), так как она соответствовала букве β греческого алфавита, а «буки» греческого прототипа не имела. Буква «фита» (Ѳ), стоявшая на предпоследнем месте в славянском алфавите, имела числовое значение 9, поскольку соответствующая ей греческая буква θ занимала 9-е место.

Сравните ионийскую и славянскую записи числа 444:

$\overline{\nu\mu\delta}$ и ѵ҃мд. ■

Славянская нумерация. Алфавитные системы были, кроме ионийцев, у древних евреев, финикийцев, армян, грузин и других народов. Алфавитная нумерация была принята и в Древней Руси. Над буквами, обозначающими числа, ставился специальный знак — титло. Это делалось, чтобы отличить их от обычных слов. Интересно отметить, что хотя в славянской нумерации, как и греческой, запись числа шла слева направо, от высших разрядов к низшим, но для чисел от 11 до 19 делалось исключение: сначала писали единицы, а затем знак для 10.

Удобны ли алфавитные системы? Запишем в славянской нумерации число 444:

ѵ҃мд

Запись получилась не длиннее десятичной. Это объясняется тем, что в славянской нумерации используются 27 цифр, тогда как в египетской при обозначениях чисел, меньших 1000, использованы лишь три цифры. Алфавитные нумерации имели крупный недостаток: с их помощью нельзя обозначать сколь угодно большие числа. Они удобны только для записи чисел до 1000. Правда, славяне, как и греки, умели записывать и большие числа, но для этого к алфавитной системе добавляли новые обозначения. Числа 1000, 2000, . . . , 9000 они записывали теми же буквами, что 1, 2, . . . , 9, только слева внизу ставили специальный знак ҂.

Число 10 000 обозначали той же буквой, что и 1, только без титла, но обводили кружком. Называли это число «тьмой». Отсюда, между прочим, произошло выражение «тьма народу». Далее, 10 тем, или 100 000 — «легион». Для обозначения легионов вокруг первых девяти цифр ставили окружность из точек. 10 легионов составляли новую единицу — леондр. Для обозначения леондров соответствующие числа заключали в окружность из черточек. Эти обозначения можно рассматривать как зачатки позиционной системы, так как для обозначения единиц разных разрядов применяли одни и те же символы, к которым добавлялись знаки для определения разряда.

Числа, меньшие десяти миллионов, называли «малыми». Кроме них, в славянской нумерации были «большие», «великие» числа, в которых словом «тьма» обозначали уже миллион. Тьму тем (то есть 10^{12}) называли легионом, легион легионов (10^{24}) — леондром, леондр леондров (10^{48}) — вороном (вороны обозначали буквой в кружке из крестиков), наконец, число 10^{49} называли «колодой». В рукописи XVII в. говорилось: «И более сего несть человеческому уму разумевати», то есть для больших чисел в славянской нумерации названий не было.

Алфавитные нумерации были малопригодны для оперирования с большими числами. В ходе истории эти системы уступили место позиционным. Рудименты алфавитных нумераций сохранились в нашем обиходе и по сей день. Так, мы часто нумеруем пункты буквами алфавита. Правда, буквы служат только для обозначения последовательности, а не количества. Арифметических операций над такими буквами мы не производим. ■

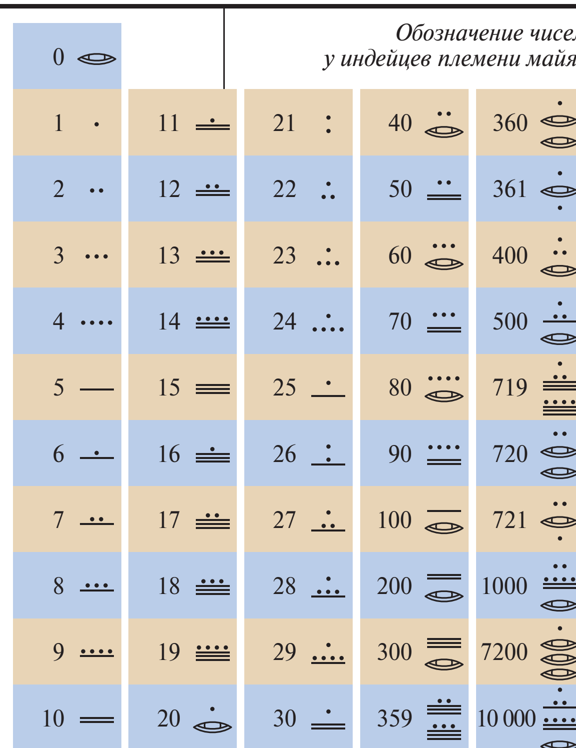
Позиционные системы. Первая из известных нам позиционных систем счисления — шестидесятеричная вавилонская система, возникшая примерно за 2500—2000 лет до нашей эры. Основанием ее служило число 60.

Следовательно, в ней должно было быть 60 цифр, а таблица умножения состояла из $C_{60}^2=\dfrac{60\cdot 59}{2}=1770$ произведений. Как же вавилоняне запоминали свои цифры и — тем более — чудовищную таблицу умножения?

Вавилоняне записывали числа от 1 до 59 при помощи десятичной системы, применяя принцип сложения и всего две цифры: прямой клин (𒁹) для обозначения единицы и лежачий (𒌋) — для 10. Число 32, например, писали так: 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹. Эти записи и служили цифрами. Число 60 обозначали тем же знаком, что и 1, то есть 𒁹. Так же обозначали и 3600, и 60^3, и все другие степени числа 60. Например, число 92 записывали в виде 𒁹𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹.

Таким образом, «цифры» — числа от 1 до 59 — вавилоняне записывали десятичной непозиционной системой, а число в целом — позиционной с основанием 60.

Нумерация вавилонян имела важную особенность: в ней не было знака для нуля! Если был изображен прямой клин 𒁹, то без дополнительных сведений нельзя было определить, какое число записано: 1, 60, 3600 или какая-то другая степень числа 60. Запись числа 92, приведенная выше, могла обозначать не только $92=60+32$, но и $3600+32=3632$. Она могла также обозначать $1\dfrac{32}{60}$ или $1\dfrac{32}{3600}$ и так далее.



Обозначение чисел у индейцев племени майя.

Таким образом, для определения значения числа нужны были еще дополнительные сведения. Впоследствии вавилоняне ввели специальный символ 𒑊 для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда. Например, число 3632 нужно было писать так: 𒁹𒑊𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹. В конце числа этот символ обычно не ставили.

Таблицу умножения вавилоняне никогда не запоминали — это было практически невозможно. Они использовали в вычислениях готовые таблицы умножения.

Шестидесятеричная система сыграла большую роль в развитии математики и астрономии. Следы ее сохранились до наших дней. Так, мы до сих пор делим час на 60 минут, а минуту — на 60 секунд. Точно так же, следуя примеру вавилонян, окружность мы делим на 360 градусов.

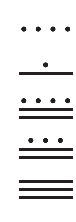
В начале нашей эры индейцы племени майя, которые жили на полуострове Юкатан в Центральной Америке, пользовались другой позиционной системой — с основанием 20. Свои цифры индейцы майя, как и вавилоняне, записывали, пользуясь принципом сложения. Единицу они обозначали точкой, а пятерку — горизонтальной чертой, но у майя уже был знак для нуля. Он напоминал полузакрытый глаз. Например, число 20 майя записывали при помощи знака для единицы и внизу знака для нуля (числа писали не в строчку, а в столбец).

Десятичная система впервые сложилась в Индии не позднее VI в. нашей эры. Здесь же позднее был введен привычный нам символ для нуля. ■

Позиционные системы возникли — скорее всего независимо одна от другой — у майя, у вавилонян, у индийцев. Что же привело людей к этому замечательному изобретению? Чтобы ответить на этот вопрос, снова обратимся к истории. В Древнем Китае, Индии и в некоторых других странах существовала следующая система. Пусть, скажем, десятки обозначает знак X, а сотни — C. Тогда запись числа 325 выглядит примерно так: 3C2X5. На аналогичной системе основаны современные счеты: одно и то же количество косточек означает число десятков, сотен, тысяч и так далее в зависимости от того, в каком ряду расположены эти косточки. Такой способ использовали

Основанием системы майя служило число 20, но было одно исключение. 19 цифр записывались посредством точек и черт. Число 20 являлось единицей нового разряда, которая называлась уинальс. Однако единицу следующего разряда образовывали не 20, а 18 уинальсов, называемые туном. Это — единственное отступление от двадцатеричного принципа в системе майя. Оно объясняется тем, что майя делили год на 18 месяцев по 20 дней в каждом плюс еще пять дней. 20 тунов составляли катун, 20 катунов — единицу пятого разряда — цикл, и, наконец, 20 циклов составляли большой цикл. Таким образом, единицами различных разрядов в системе майя были 1, 20, $20\cdot 18$, $20^2\cdot 18$, $20^3\cdot 18$, ...

В своих календарных и хронологических расчетах майя оперировали очень большими числами. Наибольшее число, найденное в их документах, есть



$$4\cdot(18\cdot 20^4)+$$
$$+6\cdot(18\cdot 20^3)+$$
$$+14\cdot(18\cdot 20^2)+$$
$$+13\cdot(18\cdot 20)+$$
$$+15\cdot 20+$$
$$+1=12\,489\,781.$$ ■

«Псаммит». Великий математик, механик и инженер древности Архимед (III в. до нашей эры) посвятил целое сочинение наименованиям больших чисел. В сказках, например, встречаются «неразрешимые» задачи: сосчитать звезды на небе, капли в море или песчинки на Земле. Архимед показал, что такие задачи можно решить. Свое сочинение он так и назвал: «Псаммит» («Исчисление песка»). В нем он построил систему, в которой имелись числа, не только превосходящие количество песчинок в его родной Сицилии, но и во всей Вселенной. (Что понимали греки под Вселенной? Архимед, вслед за Аристархом Самосским, полагал, что в центре Вселенной находится Солнце, а Земля и другие планеты вращаются вокруг него. Вселенная же имеет форму сферы, на поверхности которой расположены неподвижные звезды. Это была первая гелиоцентрическая система мира.)

Для подсчета количества песчинок Архимед должен был хотя бы приблизительно определить диаметры Вселенной и песчинки, а затем найти отношение объемов. Опираясь на данные астрономии своего времени и на собственные исследования, он получил примерно 10^{63} песчинок. До Архимеда не было средств ни для записи, ни для наименования такого большого числа. Архимед поступил так: все числа, меньшие мириады мириад, то есть числа от 1 до 10^8-1, объединил в первую октаду и назвал их первыми числами. Число 10^8 служит единицей второй октады, в которую входят все числа от 10^8 до $10^{2\cdot 8}-1$. Это «вторые числа». Аналогично, число $10^{2\cdot 8}$ является единицей третьей октады, а числа от $10^{2\cdot 8}$ до $10^{3\cdot 8}-1$ — «третьи». Продолжая это построение, можно дойти до мириадо-мириадной октады, содержащей числа от $10^{8\cdot(10^8-1)}$ до $10^{8\cdot 10^8}-1$. Все эти числа Архимед объединил в первый период. Число $10^{8\cdot 10^8}$ служит единицей первой октады второго периода и так далее. Этим способом можно дойти до последнего числа последней октады мириадо-мириадного периода. Здесь Архимед останавливается: число песчинок во Вселенной содержится уже в восьмой октаде первого периода! ■

и при счете «числами-совокупностями». Так, йорубы (одно из африканских племен), считая раковины-каури (служившие им деньгами), раскладывали их в кучки по 20 раковин в каждой, затем 20 таких кучек объединяли в одну большую кучу и так далее. При таком способе используется то, что с кучами можно поступать так же, как и с отдельными раковинами. Рассказывают, что так считали стада в Южной Африке: один из африканцев считал отдельных животных, второй — число десятков, сосчитанных первым, а третий — число десятков, сосчитанных вторым, то есть число сотен.

Следующим шагом к позиционному принципу был пропуск названий разрядов при письме (подобно тому как мы говорим «три двадцать», а не «три рубля двадцать копеек»). При записи больших чисел часто оказывался нужен символ для обозначения нуля. ■

Как появился нуль?

Уже вавилоняне употребляли межразрядовый знак. Начиная со II в. до нашей эры греческие ученые знакомились с многовековыми астрономическими наблюдениями вавилонян. Вместе с их вычислительными таблицами они переняли и вавилонскую систему счисления, но числа от 1 до 59 записывали не клиньями, а в своей, алфавитной нумерации. Самое замечательное — то, что для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда греческие астрономы начали употреблять символ ◯ (первая буква греческого слова οὐδέν — ничто). Этот знак, видимо, и был прообразом современного нуля.

Индийцы между II и VI в. познакомились с греческой астрономией. Одновременно они должны были познакомиться с шестидесятеричной системой и греческим круглым нулем. Индийцы, наверное, и сделали завершающий шаг в создании нашей нумерации.

Индийская нумерация была занесена в Европу арабами в X—XIII вв. (отсюда и название «арабские цифры»). Преимущества позиционной системы были столь очевидны, что ее сразу стали применять итальянские купцы. Тогда же Леонардо Пизанский (Фибоначчи) выступил сторонником новой системы. В Германии, Франции, Англии до конца XIV в. новую систему почти не употребляли. И хотя вплоть до XVIII в. в официальных бумагах разрешалось применять только римские цифры, к концу XVI — началу XVII в. позиционная индийская система одержала решительную победу: ее стали применять не только купцы, но и ученые.

В России в старину использовали не римскую, а славянскую систему, у которой есть много преимуществ по сравнению с римской. Но и в России индийская система быстро вошла в употребление: во всех известных математических рукописях XVII в. применяли десятичную позиционную систему счисления. При Петре I индийские цифры вытеснили на монетах славянские, а позднее славянские цифры вообще исчезли из обихода. ■

Буквенные обозначения

для неизвестных и знаки арифметических операций появились уже у греческого математика Диофанта Александрийского. Современная символика создана в XIV—XVII вв.: в конце XV в. итальянец Л. Пачоли и француз Н. Шюке для сложения и вычитания использовали знаки $\tilde{p}$ (от латинского plus) и $\tilde{m}$ (minus), а немецкие математики ввели современные обозначения + и –.

В XVI в. использовалась смешанная запись, содержащая и слова, и математические знаки. Так, уравнение $x^3+5x=12$ Дж. Кардано (1545) записал бы в виде

1. cubus $\tilde{p}$. 5. positionibus æquantur 12

(cubus — куб, positio — неизвестная, aequantur — равно). Француз Ф. Виет

(1591) записал бы его как

$$1C + 5N, \text{ æquatur } 12$$

(C — cubus — куб, N — numerus — число). Но уже в 1631 г. англичанин Т. Гарриот использовал бы для записи этого уравнения вполне понятный для нас вид

$$aaa + 5 \cdot a = 12.$$

Р. Декарт в 1637 г. придал алгебраическим выражениям полностью современный вид. Он изображал неизвестные последними буквами латинского алфавита (z, y, x, ...), а известные величины и параметры — начальными (a, b, c, ...). Постепенно принимали нынешний вид показатели степеней и корней. Современное обозначение $\sqrt{\ }$ представляет собой слитную запись модифицированной первой буквы латинского слова radix (корень) и черты, ограничивающей выражение, из которого извлекают корень. ■

Производная (derivative) обязана своим именем Г. В. Лейбницу (1667). Он предложил и обозначения dx, dy, $\frac{dx}{dy}$. Сто лет спустя Ж. Лагранж предложил удобные записи $y' = \frac{dy}{dx}$ и $dy = y'\,dx$. Термин «дифференциал» (differentia) появился в 1704 г. в универсальном словаре Дж. Харриса «Lexicon technicum».

Привычное обозначение $\frac{\partial u}{\partial x}$ для частной производной u'_x ввел А. Лежандр в 1786 г. Правда, это обозначение ему почему-то не понравилось, и его не использовали аж до 1841 г., когда его возродил К. Якоби.

Лейбниц начал употреблять в качестве знака интеграла omn. (от латинского omnia — всеобщее). Он ввел и знак $\int$ как стилизованную первую букву слова summa. Слово «интеграл» в печати впервые использовал Якоб Бернулли в 1690 г. На изобретение этого символа претендовал и Иоганн Бернулли. К слову сказать, семья Бернулли — три поколения — внесла огромный вклад в науку: математику, физику, химию. Сейчас уже никого, кроме специалистов-историков, не интересует, кто именно из них какое открытие сделал.

Запись $\int_a^b$ введена Ж. Фурье в 1822 г., а обозначение $\oint$ для интеграла по контуру ввел в 1917 г. А. Зоммерфельд.

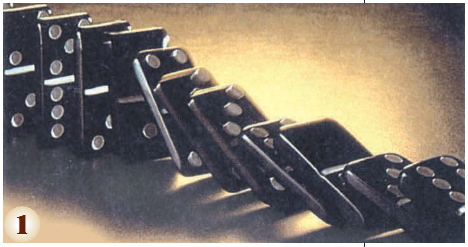
Знак предела lim. (с точкой) предложил С. Люилье в 1786 г., а принятое теперь $\lim\limits_{x \to a}$ — заслуга Г. Харди (1908). ■

Знак	Значение	Кем введен	Когда введен (г.)
	Отношения		
$=$	равно	Р. Рекорд	1557
$<$, $>$	меньше, больше	Т. Гарриот	1631
$\equiv$	сравнимо	К. Гаусс	1801
$\parallel$	параллельно	У. Уотред	1677
$\perp$	перпендикулярно	П. Эригон	1634
	Величины		
∞	бесконечность	Дж. Валлис	1655
π	отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс Л. Эйлер	1706 1736
i	корень квадратный из -1 (мнимая единица)	Л. Эйлер	1777
	Операции		
$\times$	умножить	У. Уотред	1631
$\cdot$	умножить	Г. Лейбниц	1698
$:$	делить	Г. Лейбниц	1684
	Функции		
a^n	степень	Р. Декарт	1637
$\sqrt{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$	корни	Х. Рудольф А. Жирар	1525 1629
log	логарифм	И. Кеплер	1624
sin	синус	Б. Кавальери	1632
cos	косинус	Л. Эйлер	1748
tg	тангенс	Л. Эйлер	1753
arcsin	арксинус	Ж. Лагранж	1772
$\sum$	сумма	Л. Эйлер	1755
φx	функция	И. Бернулли	1718
$f(x)$	функция	Л. Эйлер	1734
!	факториал	Х. Крамп	1808

Индукция

Индукция — один из важнейших способов рассуждения, применяемых в математике. Суть этого метода в том, что для доказательства некоторого утверждения A_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, сначала доказывают его для $n = 1$ (соответствующее утверждение называют базой индукции), а затем для каждого натурального n в предположении, что A_n истинно, доказывают истинность утверждения A_{n+1} (индукционный переход).

Выстроим в ряд костяшки домино (рис. 1). Толкнем первую — она, падая, повалит вторую, та — третью и так далее. Представьте, что доминошки изображают утверждения $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}, A_{101}, \ldots$, а падение доминошки означает доказательство соответствующего утверждения. Тогда «толкнуть первую доминошку» — значит доказать, что утверждение A_1 истинно; а то, что каждая доминошка, падая, валит следующую, означает, что при любом k из утверждения A_k следует A_{k+1}. Цепь доказательств, начавшись с первого утверждения, прокатится по всему ряду: она дойдет и до сотого, и до тысячного, и вообще до любого натурального числа. ■



1

Придумаем 10 различных натуральных чисел, сумма которых кратна каждому из них. В задаче нет параметра n, поэтому поставим более общую задачу: для любого натурального числа $n > 2$ придумать n различных натуральных чисел, сумма которых кратна каждому из них.

Для $n = 3$ годятся числа 1, 2 и 3: их сумма равна 6 и кратна любому из них. Это база индукции — утверждение, с которого начинается цепь рассуждений.

Теперь выполним индукционный переход: научимся от ряда из n чисел переходить к $n+1$ числам. Если сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ кратна любому из слагаемых, то можно добавить к числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ их сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Таким образом из трех чисел 1, 2, 3 получим четыре числа 1, 2, 3, 6, а из них — пять чисел 1, 2, 3, 6, 12. Так можно действовать и дальше, увеличивая и увеличивая ряд чисел. В частности, для $n = 10$ получим: 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384. (Разумеется, нельзя утверждать, что найденный пример единственный: например, отправляясь от равенства

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 1,$$

находим шесть чисел 40, 30, 24, 20, 5 и 1, сумма которых равна 120 и кратна любому из них. Известным уже способом из этих шести чисел можно получить десять, добавив числа 120, 240, 480 и 960.) ■

Три пирата захватили корабль с разнообразнейшим добром. Каждый уверен, что он бы поделил добычу на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы пиратов было двое, то выйти из положения было бы легко: один делит добычу на две части, а другой берет ту, которая ему кажется большей. Сможете организовать раздел добычи, чтобы ни один из троих пиратов не чувствовал себя обделенным? Учтите: добыча настолько разнородна и вкусы пиратов настолько несхожи, что объективного способа сравнения отдельных частей не существует!

Выпросился остаться одну ночку; от одной ночки две ночки, от двух ночек две недели, от двух месяцев два года, а от двух годов жил тридцать лет.

(*Народная присказка.*) ■

Капитан Джонатан
Переплыл океан —
И в пути пеликана
Поймал капитан.

Пеликан Джонатана
Снес яйцо — и нежданно
Стало у капитана
Целых два пеликана.

И второй пеликан
Снес яйцо, как ни странно:
Стало у Джонатана
Целых три пеликана.

Будет род пеликана
прибывать беспрестанно,
Если только омлет
не спасет капитана!

Робер Деснос (*1900—1945*), *французский поэт* ■

— Взгляни на этого математика, — сказал логик. — Он замечает, что первые 99 чисел меньше сотни, и отсюда с помощью того, что он называет индукцией, заключает, что любые числа меньше сотни.

— Физик верит, — сказал математик, — что 60 делится на все числа. Он замечает, что 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Он проверяет несколько других чисел, например, 10, 20 и 30, взятых, как он говорит, наугад. Так как 60 делится на них, он считает экспериментальные данные достаточными.

— Да, но взгляни на инженера, — возразил физик. — Он подозревает, что все нечетные числа простые. Во всяком случае, 1 можно рассматривать как простое число, доказывает он. Затем идут 3, 5 и 7 — все, несомненно, простые. Затем идет 9 — досадный случай; по-видимому, 9 не является простым числом, но 11 и 13, конечно, простые. Возвращаясь к 9, говорит он, заключаем, что 9 должно быть ошибкой эксперимента. ■

Пусть первый пират разделит добычу на три, по его мнению, равные части, а второй и третий укажут те части, которые им кажутся бóльшими. Если они укажут на разные части, то каждый берет ту часть, которую он считает большей, а первый берет оставшуюся — ему все равно!
Если же они укажут на одну часть, пусть поделят ее между собой. Затем второго и третьего попросим указать на ту из оставшихся частей, которая кажется большей. Если они покажут на одну и ту же часть, то вновь делят ее между собой, а первый берет оставшуюся часть. Если же они укажут на разные части, пусть каждый из них делит понравившуюся часть с первым пиратом. Все честно! ■

А если пиратов не 3, а больше? Нам поможет индукция. Предположим, что n пиратов придумали способ справедливого раздела добычи. Пусть их стало на одного больше. Разделим всю добычу между n пиратами и затем предложим каждому из них разделить свою долю на $n+1$ равных частей (по его мнению, равных). Пусть теперь $(n+1)$-й пират возьмет у каждого из них по одной части. У каждого из n пиратов останется, по его мнению, $n/(n+1)$ его прежней доли; прежняя доля составляла, по его мнению, не менее $1/n$ всей добычи; $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}$.
Не сможет жаловаться и $(n+1)$-й пират, так как он взял у каждого из своих товарищей не менее $1/(n+1)$ доли (по его мнению). (Вообразите, как это выглядит для 15 пиратов. Придется делить все на 14 персон, а перед этим — на 13, на 12, ..., начать же придется с удивительного для непривычных к высокой абстракции злобных пиратов раздела на двоих! Если вам дадут довести эту процедуру до конца — все (но только в самый последний момент!) станут довольны. ■

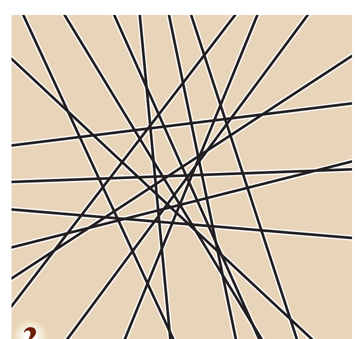
Менее опасен для вас другой способ. Усадите пиратов вокруг круглого стола и предложите первому взять долю добычи. Пусть второй, если ему кажется, что первый взял слишком много, уменьшит ее до справедливой. (Если второй считает, что первый взял не больше положенного, пусть он ничего не трогает.) Затем пусть то же сделает третий, четвертый и так далее. Возьмет эту долю (полностью выбывая из дележа) пират, последним ее коснувшийся. ■

На кольцевой дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин из их баков слили в одну, то она смогла бы проехать по всей кольцевой дороге. Докажем, что хотя бы одна из этих машин может объехать все кольцо по часовой стрелке, забирая по пути бензин у остальных машин. База — случай 1 машины — тривиальна. Предположим, что утверждение верно для n машин. Рассмотрим случай $n+1$ машин. Хотя бы у одной машины A бензина хватит, чтобы доехать до ближайшей (по часовой стрелке) машины B: иначе суммарное количество бензина было бы явно недостаточно. Перельем весь бензин из B в A и исключим машину B из рассмотрения. Общее количество бензина не изменилось, а число машин уменьшилось. По предположению индукции, хотя бы одна машина может объехать кольцо по часовой стрелке, забирая по пути бензин у остальных машин. Эта же машина может, очевидно, объехать кольцо и в начальной ситуации. ■

Выясним, на какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 15 прямых. Нарисовать 15 прямых нетрудно (рис. 2). А вот разобраться, сколько там частей, вовсе не легко: некоторые прямые пересекаются за пределами чертежа, а мелкие части почти не различимы. Можно, конечно, выйти на стадион с 15 веревками и провести «исследование на местности», но вдруг веревки запутаются? И куда мы пойдем, если вместо 15 прямых будет 150?

Огастес де Морган (1806—1871), сын полковника английских войск в Индии, первый президент Лондонского королевского математического общества (основанного в 1865 г.), один из создателей математической логики. Его имя носят формулы
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \text{ и } \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},$$
где черта обозначает переход от множества к его дополнению. Ввел термин «математическая индукция» в 1838 г. ■

Докажите по индукции следующие утверждения.
1) Двузначное число 12 делится на 4, трехзначное число 112 — на 8, четырехзначное число 2112 — на 16. Вообще, для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n.
2) Любую дробь m/n, где m, n — натуральные числа, $1<m<n$, можно представить в виде суммы нескольких дробей вида $1/q$, таких, что знаменатель каждой следующей дроби делится на знаменатель предыдущей. (Например, $\frac{3}{43}=\frac{1}{15}+\frac{1}{330}+\frac{1}{14\,190}$.)
3) Квадрат нельзя разрезать на n квадратов тогда и только тогда, когда $n=2$, 3 или 5. ■


2

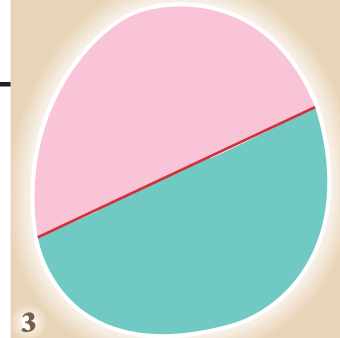
Лучше решим задачу Я. Штейнера об n прямых — найдем формулу для количества $f(n)$ частей, на которые разбивают плоскость n прямых общего положения (прямые общего положения — это прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Для $n=1$, 2, и 3 ответы очевидны (рис. 3—5): $f(1)=2$, $f(2)=4$ и $f(3)=7$. Чуть сложнее увидеть, что $f(4)=11$ (рис. 6) и $f(5)=16$ (рис. 7). Запишем найденные значения в таблицу:

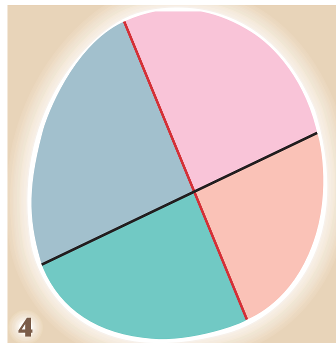
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	2	4	7	11	16

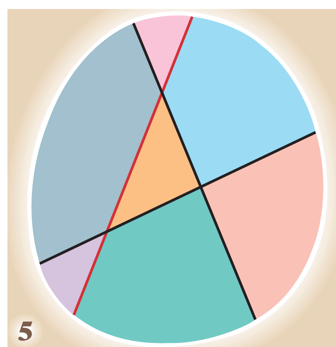
Видите закономерность? $4=2+2$, $7=3+4$, $11=4+7$, $16=5+11$ — числа правого столбца равны сумме соседей слева и сверху. Формулой это можно записать так:

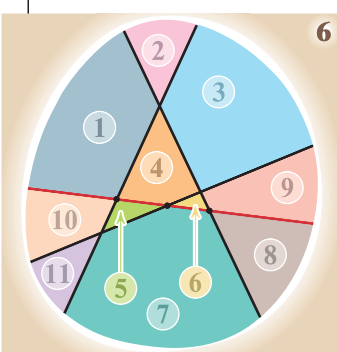
$$f(n)=n+f(n-1). \qquad (*)$$

Чтобы доказать эту формулу, посмотрим, что происходит, когда к $n-1$ прямым добавляем еще одну. Например, на рисунке 8 к пяти прямым добавлена шестая (красная) прямая. Она пересекает не все части, на которые пять прямых разрезают плоскость, а только шесть частей. Это не случайно: поскольку шестая прямая пересекает каждую из других прямых, всего возникает пять точек пересечения, которые делят прямую на шесть частей: два луча и четыре отрезка. Каждый из отрезков и лучей, на которые шестую прямую делят точки ее пересечения с пятью другими, является следом от разрезания некоторой части на две. Значит, $f(6)=f(5)+6$. Аналогично обстоит дело и в общем случае: при добавлении n-й прямой к $n-1$ прямым количество частей увеличивается на n (как вы помните, среди прямых не должно быть параллельных и никакие три не должны проходить через одну точку). Формула $(*)$ доказана. Теперь легко найти $f(15)=121$, продолжив таблицу. ■

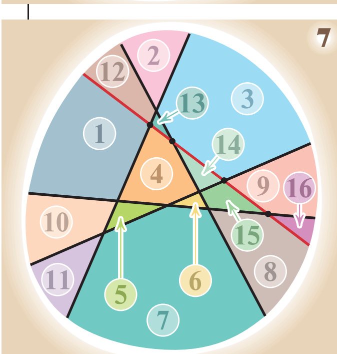

3


4

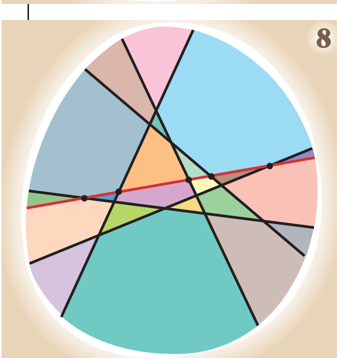

5



6



7


8

$f(150)=11\ 326$ можно вычислить так же, но нельзя ли побыстрее? Можно! Кроме рекуррентной (выражающей следующее значение через предыдущие) формулы $(*)$, есть явная формула

$$f(n)=\frac{n(n+1)}{2}+1. \qquad (**)$$

Докажем ее по индукции.

Три дамы A, B и C сидят с испачканными лицами и смеются. Внезапно A соображает: «Почему B не понимает, что C смеется над ней? О, боже! Они смеются надо мной». ■

Ехали в вагоне поезда мудрецы. Поезд то и дело нырял в тоннели. Собрались все в коридоре, в открытые окна глядят — не наглядятся. Вдруг грохот, дым, пыль! Проехали тоннель — входит проводник. «Тут кое-кто испачкался, — говорит. — В поезде воды нет. Но сейчас остановки пойдут, можно будет выйти помыться».
А мудрецы в вагоне собрались как на подбор: столь же умные, сколь ленивые. Никто зря мыться не пойдет, если не знает наверняка, что испачкался. И у соседей не спросит, чистое у него лицо или грязное — зачем напрасно людей тревожить и самому беспокоиться? — проще сообразить.
Как поступят мудрецы? Оказывается, если у n из них испачканы лица, то на n-й остановке все эти n мудрецов выйдут из поезда мыться!
Докажем утверждение по индукции. При $n=1$ утверждение очевидно. Докажем, что если оно верно для некоторого n, то оно верно и для $n+1$. Пусть лица испачканы у $n+1$ мудрецов. Тогда один из них видит вокруг n грязных лиц и рассуждает так: «Мое лицо или чистое, или грязное. В первом случае все n мудрецов с грязными лицами выйдут умываться на n-й остановке. Поскольку первый случай возможен, мне не следует выходить ни на n-й остановке, ни раньше: если я чистый, это было бы непростительной тратой сил!
Если же мое лицо грязное, то каждый из n других перемазавшихся мудрецов видит n испачканных лиц. Никто из них не пойдет умываться на n-й остановке.
Итак, если они не пойдут мыться на n-й остановке, то я — грязный. Дождусь n-й остановки. Если на ней никто не пойдет умываться, выйду на следующей — $(n+1)$-й остановке!»
Так же рассуждают все мудрецы с грязными лицами. Следовательно, на $(n+1)$-й остановке все они пойдут умываться, что и требовалось доказать.
Изменим слегка наш рассказ. Зная, что в вагоне едут мудрецы, и увидав, что многие из них ис-

пачкались, проводник решает сократить свое объявление. «Зачем говорить, что кое-кто испачкался, — думает он, — когда они сами это видят!» И пропускает первую фразу объявления. Можно ли по-прежнему утверждать, что если лица испачканы у n человек, то на n-й остановке они пойдут мыться?

Или так: пусть мудрецы и без проводника знают, что в поезде нет воды и будут стоянки, на которых можно умыться. Кроме того, пусть испачкался больше чем один человек. Тогда в объявлении проводника нет как будто ничего нового ни для кого из мудрецов! Что же — если бы проводник не приходил — пошли бы n испачкавшихся мыться на n-й остановке? Велик соблазн ответить утвердительно: раз ничего не изменилось в условии задачи, то не должен измениться и ответ! И все же здравый смысл подсказывает, что без объявления проводника мыться, пожалуй, никто не пойдет! И потом — что значит: «ничего не изменилось в условии»? В одном варианте проводник вообще не приходил, а в другом — приходил и что-то сказал! Что же он сказал? Одними восклицаниями этот вопрос, по-видимому, не решишь. Рассмотрим простейший случай: $n=2$, лица испачканы у двоих, они видят друг друга. Представьте себя на месте одного из них — и увидите проблему: без объявления проводника испачканный мудрец не знает, знает ли другой испачканный, что в вагоне не все чистые. Мы нащупали разгадку: сказанное проводником действительно не было новостью для мудрецов, но каждый видел, что все слушали объявление и поэтому не только любой мудрец знает, что кто-то испачкался, но и любой мудрец знает, что любой мудрец знает, что кто-то испачкался.

Та же ситуация и для n мудрецов, только слова «любой мудрец знает, что» надо повторить не дважды, а n раз. Сравните: «Иль думал, что я думала, что думал он: я сплю» (С. Маршак). ■

Смешливая дама догадалась, что у нее грязное лицо, хотя никакой проводник не делал никаких объявлений. Роль проводника сыграл несдержанный смех ее соседок. Степенные мудрецы, конечно, не позволили бы себе ничего подобного! ■

База очевидна: $f(1)=2=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}+1$.

Переход состоит в том, что если $f(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}+1$, то

$$f(n)=n+f(n-1)=n+\frac{(n-1)n}{2}+1=\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

Заметьте, как легко! Правда, возникает вопрос: как можно было догадаться, что для $f(n)$ выполнена именно формула (**)? ■

Сумма $S(n)=1+2+3+\ldots+n$ первых n натуральных чисел встречалась всякому, кто интересуется математикой. Эта сумма удовлетворяет соотношению

$$S(n)-S(n-1)=n.$$

Для $S(n)$ есть явная формула:

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (***)$$

вывести которую можно при помощи индукции, а можно и без индукции, записав сумму $S(n)$ два раза: сначала расположив слагаемые по возрастанию, а потом в обратном порядке, по убыванию:

$$S(n)=1+\quad 2\quad+\quad 3\quad+\ldots+(n-2)+(n-1)+n,$$
$$S(n)=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+\quad 3\quad+\quad 2\quad+1,$$

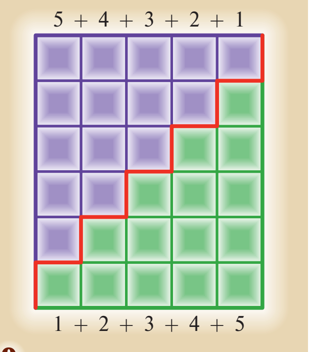
и сложив эти равенства почленно:

$$2S(n)=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)=n(n+1).$$

Разделив на 2, получим формулу для $S(n)$. (На рисунке 9 это рассуждение проиллюстрировано геометрически: для $n=5$ показано, как прямоугольник размером $n\times(n+1)$ можно разбить на две равные фигуры, каждая из которых состоит из $1+2+3+\ldots+n$ клеток.) ■

В следующем примере главное — догадаться, какую формулу надо доказывать по индукции. Давайте найдем явную формулу для суммы кубов первых n натуральных чисел. Начинаем:

$$1^3=1,$$
$$1^3+2^3=9,$$
$$1^3+2^3+3^3=36,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=441.$$



9

Что же это за числа: 1, 9, 36, 100, 225, 441? Это квадраты! И не просто квадраты, а квадраты сумм первых n натуральных чисел:

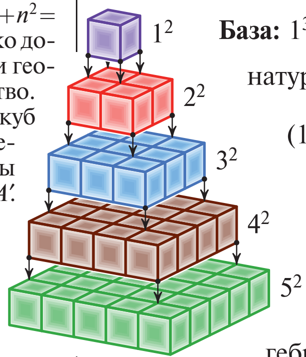
$$1=1^2,$$
$$9=(1+2)^2,$$
$$36=(1+2+3)^2,$$
$$100=(1+2+3+4)^2,$$
$$225=(1+2+3+4+5)^2,$$
$$441=(1+2+3+4+5+6)^2.$$

Возникает гипотеза: сумма кубов первых n натуральных чисел равна квадрату суммы этих чисел. Вспомнив формулу (***), мы можем сформулировать гипотезу в более удобном для применения индукции виде:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Докажем ее.

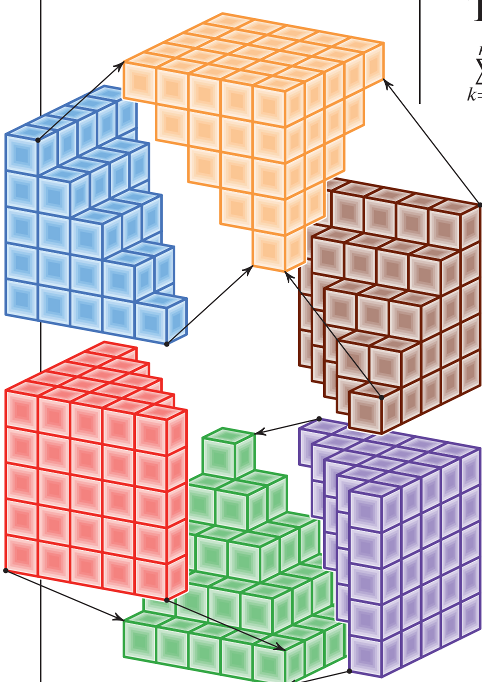
Формулу $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=$ $=n(n+1)(2n+1)/6$ легко доказать по индукции. Есть и геометрическое доказательство. Воспользуемся тем, что куб $ABCDA'B'C'D'$ можно разрезать на три равные пирамиды $ABCC'B'$, $ACDD'C'$ и $AB'C'D'A'$. Очевидно, что из 1^2+2^2+ $+3^2+\ldots+n^2$ кубиков можно сложить ступенчатую пирамиду, из трех таких пирамид — почти куб, из двух почти кубов — параллелепипед $n\times(n+1)\times(2n+1)$. ■



База: $1^3=\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2$. **Переход:** предположим, что для некоторого натурального числа n формула верна. Тогда

$$(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Понимаете, что произошло? Сумму кубов первых $n+1$ натуральных чисел мы представили как сумму суммы кубов n чисел и числа $(n+1)^3$. А дальше — всего лишь алгебраические преобразования! ■



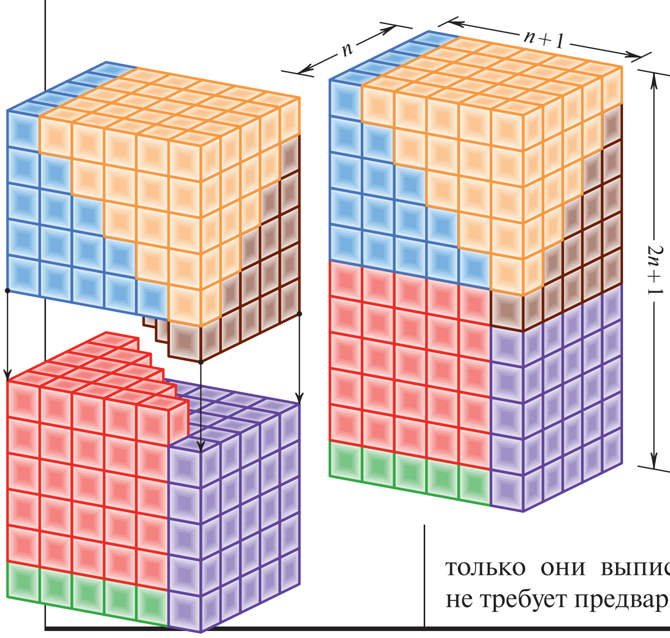
Тождество $3k(k+1)=k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)$ позволяет найти

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}(1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2+2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3+3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4+\ldots+(n-1)n(n+1)-$$
$$-(n-2)(n-1)n+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1))=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\ ■$$

Чему равна сумма четвертых степеней? А сумма пятых степеней? Помогают следующие легко запоминаемые формулы: $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, и вообще, $\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\overline{s}}=\dfrac{n^{\overline{s+1}}}{s+1}$, где $k^{\overline{s}}$ — это произведение $k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+s-1)$.

Теперь сумму четвертых степеней вычислить несложно: поскольку $k^4=$ $=k(k+1)(k+2)(k+3)-6k^3-11k^2-6k$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)-6\sum_{k=1}^{n}k^3-11\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}-6\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-11\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6\cdot\frac{n(n+1)}{2}.\ ■$$



Воспользовавшись формулой $\dfrac{1}{k(k+1)}=$ $=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

А равенство $\dfrac{1}{k(k+1)(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ помогает найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Разумеется, формулы $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\times$ $\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ легко доказать по индукции, как только они выписаны. Изложенный выше способ замечателен тем, что не требует предварительного знания ответа. ■

Одна из интересных особенностей индукции состоит в том, что более точное утверждение иногда легче доказать, чем более слабое. Например, пусть $P_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$. Докажем неравенство $P_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

База: $P_1 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{1}}$. Теперь попытаемся провести **индукционный переход,** то есть из неравенства $P_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ попробуем вывести неравенство $P_{n+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Очевидно,

$$P_{n+1} = P_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Если бы правая часть не превосходила $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, то индукционный переход состоялся бы. Но увы: возводя интересующие нас выражения в квадрат, получаем: $\dfrac{(2n+1)^2}{4n(n+1)^2}$ и $\dfrac{1}{n+1}$. Приведя к общему знаменателю, приходим к сравнению чисел $4n^2+4n+1$ и $4n(n+1)$. Очевидно, первое больше, а нам хотелось обратного!

Переход не состоялся. Это не значит, что неравенство $P_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ неверно. Не годится лишь наш метод доказательства. Докажем более точное неравенство $P_n < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

База индукции: $P_1 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **Переход:**

$$P_{n+1} = P_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$

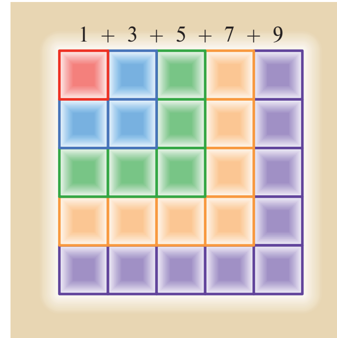
Неравенство $\dfrac{2n+1}{2\sqrt{n+1}(n+1)} < \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ после возведения обеих частей в квадрат и перехода к общему знаменателю превращается в неравенство $(n+2)\times$ $\times(4n^2+4n+1) < 4(n+1)^3$. Раскроем скобки: $4n^3+8n^2+4n^2+8n+n+2 <$ $< 4n^3+12n^2+12n+4$, то есть $0 < 3n+2$. Получилось! Причина в том, что в доказательстве более сильного утверждения мы опирались на более сильное предположение индукции. На первый взгляд это удивительно, но так часто бывает: чем точнее утверждение, тем легче его доказать! ■

Довольно точные оценки величины P_n можно получить и без индукции. А именно, $P_n^2 = \dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$. Оставляя первый множитель $\dfrac{3}{4}$ без изменения, заменяя последний множитель $\dfrac{1}{2n+1}$ на большее число $\dfrac{1}{2n}$ и заменяя все другие множители на 1, в силу неравенства $(2k-1)(2k+1) < (2k)^2$ получаем неравенство $P_n^2 < \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2n}$, откуда $P_n < \sqrt{\dfrac{3}{8n}}$.

Аналогично можно получить оценку снизу:

$$P_n^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)(2n)}\cdot\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n},$$

откуда $P_n > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. В статье «Решето Иосифа Флавия» доказана формула Валлиса: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642\ldots$ ■



Сумма первых n нечетных чисел равна n^2. На рисунке это равенство проиллюстрировано для $n=5$. ■

Каждая из сумм 1, $3+5$, $7+$ $+9+11$, $13+15+17+19, \ldots$ равна кубу числа слагаемых. ■

Число $n!$ при любом натуральном n представимо в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся не более чем вдвое. **База** — два равенства: $1! = 1\cdot 1$ и $2! = 1\cdot 2$. **Индукционный переход** проведем не от n к $n+1$, а от n к $n+2$. Пусть $n! = ab$, где a, b — натуральные числа, $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2a$. Тогда $(n+2)! = a\times$ $\times(n+2)\cdot b(n+1)$, причем

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{n+2}{n+1} < 1\cdot 2 = 2$$

и $$\frac{b}{a}\cdot\frac{n+1}{n+2} < 2\cdot 1 = 2. \ ■$$

Через любые n точек можно провести прямую линию.

Доказательство. Применим индукцию. При $n=1$ и $n=2$ все правильно.

Осталось доказать это для бóльших значений n. Допустим, что утверждение верно при некотором $n=k$, и покажем, что в этом случае оно сохранит силу и при $n=k+1$. Итак, пусть произвольно заданы $k+1$ точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$. В силу предположения индукции, через k точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ проходит некоторая прямая l. В силу того же предположения через k точек $M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$ также проходит некоторая прямая l'.

Эти две прямые имеют по крайней мере две общие точки M_2 и M_k. Но две точки определяют единственную прямую. Поэтому прямые l и l' совпадают. Следовательно, прямая l, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, проходит и через точку M_{k+1}. ■

Алгоритм Евклида и линейные диофантовы уравнения

Алгоритм Евклида — это способ отыскания наибольшего общего делителя натуральных чисел. Он тесно связан с алгоритмом разложения чисел в цепные дроби и с решением линейных уравнений в целых числах.

Основная идея алгоритма Евклида — формула

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - bq, b),$$

которая верна для любых целых чисел a, b, q. (НОД — первые буквы слов «наибольший общий делитель».) Докажем ее. С одной стороны, всякий общий делитель d чисел a и b очевидным образом является и делителем числа $a - bq$; с другой стороны, всякий общий делитель чисел $a - bq$ и b является и делителем числа $a = (a - bq) + bq$. Поэтому множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел $a - bq$ и b. А если совпадают множества, то совпадают и их наибольшие элементы. Равенство доказано. ■

Вычислим НОД(6059; 663). Для этого разделим 6069 на 663 с остатком:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102.$$

Следовательно, НОД(6059; 663) = НОД(663; 102). Поскольку $663 = 102 \cdot 6 + 51$, то НОД(663; 102) = НОД(51; 102). Поскольку 102 делится на 51, получаем ответ: НОД(6059; 663) = НОД(663; 102) = НОД(51; 102) = 51.

Часто для краткости опускают буквы НОД, считая, что круглые скобки обозначают наибольший общий делитель чисел (не обязательно двух; в скобки можно заключить любое множество чисел). Наименьшее общее кратное НОК$[a, b]$ тоже часто пишут без букв НОК.

Итак, алгоритм Евклида — это довольно быстро работающий метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Если даны два числа a и b, причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b:

$$a = bq_1 + r_1,$$

где q_1 — неполное частное (которое не используется в дальнейших вычислениях), r_1 — остаток, $r_1 < b$. Затем делим число b на r_1 и находим неполное частное q_2 и (только и интересующий нас) остаток r_2. Далее, делим число r_1 на r_2, при этом получаем остаток r_3, меньший, чем r_2, и так далее, пока какое-нибудь число r_{n-1} не разделится на r_n нацело, без остатка (то есть $r_{n+1} = 0$). Последний ненулевой остаток r_n и есть искомый наибольший делитель чисел a и b:

$$\text{НОД}(a; b) = (b; r_1) = (r_1; r_2) = \ldots = (r_{n-2}; r_{n-1}) = (r_{n-1}; r_n) = (r_n; 0) = r_n. \ ■$$

Линейные уравнения. Примеры. Алгоритм Евклида тесно связан с решением уравнений вида

$$ax - by = c$$

в целых числах, где a, b и c — данные целые числа, x и y — неизвестные.

$$\begin{array}{r|l}
-\,20052005 & 43 \\ \cline{2-2}
172 & 466325 \\ \cline{1-1}
-\,285 & \\
258 & \\ \cline{1-1}
-\,272 & \\
258 & \\ \cline{1-1}
-\,140 & \\
129 & \\ \cline{1-1}
-\,110 & \\
86 & \\ \cline{1-1}
-\,245 & \\
215 & \\ \cline{1-1}
30 &
\end{array}$$

Деление с остатком. При делении «уголком» числа $a = 20\,052\,005$ на $b = 43$ получаем частное 466 325 и остаток 30. Это можно записать формулой

$$20\,052\,005 = 43 \cdot 466\,325 + 30.$$

Если $a = bq + r$, где q, r — целые числа, причем $0 \leqslant r < b$, то число q называют неполным частным, а r — остатком.

Доказать возможность деления с остатком несложно. Достаточно заметить, что любое число a либо само есть кратное числа b, либо лежит между двумя последовательными кратными числа b, то есть

$$bq < a < b(q + 1).$$

В первом случае $r = 0$. Во втором случае

$$0 < a - bq < b,$$

так что число $r = a - bq$ удовлетворяет условиям $0 < r < b$.

Деление с остатком не только возможно, но и производится единственным способом: если

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2,$$

где q_1, q_2, r_1 и r_2 — целые числа, причем $0 \leqslant r_1 < b$, $0 \leqslant r_2 < b$, то $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$. В самом деле, имеем

$$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

Очевидно, $-b < r_1 - r_2 < b$. Единственным числом, которое больше числа $-b$, меньше числа b и нацело делится на b (а делится потому, что оно равно произведению числа b на $q_1 - q_2$), является число 0. Значит, $r_2 - r_1 = 0$ и $q_1 = q_2$. ■

Особенно просто вычислять НОД, пользуясь двоичной системой счисления. Если двоичные записи двух чисел оканчиваются нулями, то они оба четные и мы используем формулу

$$\text{НОД}(2a,\ 2b)=2\ \text{НОД}(a,\ b).$$

Если одно число четное, а другое нечетное, используем формулу

$$\text{НОД}(2a,\ 2b+1)=\text{НОД}(a,\ 2b+1).$$

А если оба нечетные, используем формулу

$$\text{НОД}(2a+1,\ 2b+1)=\\ =\text{НОД}(2a-2b,\ 2b+1)=\\ =\text{НОД}(a-b,\ 2b+1).$$

Вычислим, например, НОД чисел 5622 и 1858. В двоичной системе эти числа выглядят так: $\overline{1010111110110}$ и $\overline{11101000010}$. Имеем:

$(5622,\ 1858)=$	$(\overline{1010111110110},\ \overline{11101000010})$
$2(2811,\ \ 929)=$	$2(\overline{101011111011},\ \ \overline{1110100001})$
$2(1882,\ \ 929)=$	$2(\overline{11101011010},\ \ \overline{1110100001})$
$2(941,\ \ 929)=$	$2(\overline{1110101101},\ \ \overline{1110100001})$
$2(12,\ \ 929)=$	$2(\overline{1100},\ \ \overline{1110100001})$
$2(3,\ \ 929)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{1110100001})$
$2(3,\ \ 926)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{1110011110})$
$2(3,\ \ 463)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{111001111})$
$2(3,\ \ 460)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{111001100})$
$2(3,\ \ 115)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{1110011})$
$2(3,\ \ 112)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{1110000})$
$2(3,\ \ \ 7)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{111})$
$2(3,\ \ \ 4)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{100})$
$2(3,\ \ \ 1)=$	$2(\overline{11},\ \ \overline{1})$

Значит, $\text{НОД}(5622;\ 1858)=2\times \times\text{НОД}(3;\ 1)=2.$ ■

Пусть a и b — длины двух отрезков, $a>b$. Отложим b на a столько раз, сколько возможно; получим остаток r_1. Отложим r_1 на b сколько возможно раз, получим остаток r_2 и так далее. Если, откладывая очередной отрезок длины r_n, мы не получим остатка (то есть $r_{n+1}=0$), то отрезок длины r_n и есть наибольшая общая мера отрезков длин a и b.

Если числа a и b целые, то все остатки $r_1, r_2, \ldots$ целые неотрицательные. В силу неравенств

$$b>r_1>r_2>\ldots$$

процесс рано или поздно закончится. Последнее ненулевое число r_n и есть $\text{НОД}(a;\ b)$. ■

Не любое уравнение такого вида имеет решения в целых числах. Например, равенство

$$2x-246y=345$$

для целых чисел x и y невозможно, поскольку левая часть делится на 2, а правая — не делится.

Рассмотрим уравнение

$$69x-91y=1996.$$

Скорее всего, решения у него есть, но как их найти? Можно пытаться угадать пару чисел $(x;\ y)$, но вдруг не повезет? Быстрый и удобный способ дает алгоритм Евклида. Перепишем уравнение в виде

$$69x-69y-22y=1996.$$

Обозначив $z=x-y$, получим

$$69z-22y=1996.$$

Один из коэффициентов полученного уравнения (69) остался от исходного уравнения, а другой (22) меньше, чем коэффициент исходного (91). Причина в том, что 22 — остаток от деления 91 на 69. Продолжим:

$$3z+66z-22y=1996.$$

Обозначив $t=3z-y$, придем к уравнению

$$3z+22t=1996.$$

Его решение легко угадать: $t=1$, $z=(1996-22)/3=658$. Теперь легко вернуться к искомым x, y — достаточно посчитать сначала $y=3z-t=3\cdot 658-1=1971$, потом — $x=z+y=1971+658=$ $=2629$.

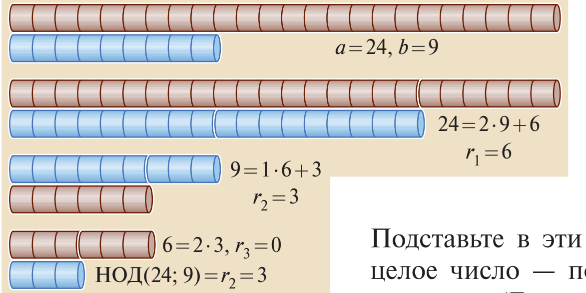
Впрочем, можно было обойтись и совсем без угадывания, переписав уравнение в виде

$$3z+21t+t=1996,$$

обозначив $m=z+7t$ и, таким образом, сведя дело к уравнению

$$3m+t=1996.$$

Если вместо m подставить любое целое число, то получим (тоже целое!) $t=$ $=1996-3m$. Это позволяет нам найти $z=m-7t=m-7(1996-3m)=22m-13\,972$. Далее, $y=3z-t=3(22m-13\,972)-(1996-3m)=69m-43\,912$. Наконец, $x=$ $=z+y=(22m-13\,972)+$ $+(69m-43\,912)=91m-$ $-57\,884$.



Мы нашли общее решение уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} x=91m-57\,884, \\ y=69m-43\,912. \end{cases}$$

Подставьте в эти формулы вместо m любое целое число — получите некоторое частное решение. (Если боитесь, что мы допустили арифметическую ошибку, проверьте тождество $69\cdot(91m-57\,884)-91\times\times(69m-43\,912)=1996$.) В найденном виде представимо любое решение $(x;\ y)$ интересующего нас уравнения. ■

Точки с целыми координатами на прямой. Прямая на плоскости задается, как известно, уравнением первой степени. Любое такое уравнение можно привести к виду $ax-by=c$. Рассмотрим примеры.

$\boldsymbol{2x=5.}$ Уравнение задает прямую, параллельную оси ординат (вертикальную прямую). Точек с целыми координатами на этой прямой нет, поскольку число $5/2$ — не целое.

$\boldsymbol{y=x.}$ Это — биссектриса первого («северо-восточного») и третьего («юго-западного») квадрантов. Точек с целыми координатами бесконечно много. Они расположены на равных расстояниях друг от друга. Каждому целому x соответствует целое $y=x$.

$\boldsymbol{4x=-5y.}$ Прямая проходит через начало координат. Числа 4 и -5 взаимно просты. Для того чтобы $-5y$ делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы y делилось на 4, то есть $y=4t$, где $t\in\mathbb{Z}$. Подставляя в уравнение, получаем $4x=-5\cdot 4t$, то есть $x=-5t$. Значит, целочисленных точек бесконечно много. Они расположены на равных расстояниях и описываются формулой $(x;y)=(-5t;4t)$.

$\boldsymbol{2y-3x=6.}$ Выразив y через x, получим: $y=\dfrac{3}{2}x+3$. Если x нечетно, то y — не целое. Если же $x=2t$, то $y=3t+3$. Следовательно, на исследуемой прямой лежит бесконечно много точек с целыми координатами:

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=3t+3, \end{cases}$$

где t — любое целое число.

$\boldsymbol{5x-7y=2.}$ Легко подобрать пару целых чисел $(x;y)=(-1;-1)$. Немного подумав, найдем еще одну пару: $x=6$, $y=4$. Вообще, если увеличить x на 7, а y на 5, то выражение $5x-7y$ не изменит своего значения:

$$5(x+7)-7(y+5)=5x+5\cdot7-7y-7\cdot5=5x-7y.$$

Поэтому, зная одну пару целых чисел (x,y), удовлетворяющих уравнению $5x-7y=2$, мы можем указать бесконечно много других пар:

$$\begin{cases} x=7t-1, \\ y=5t-1. \end{cases}$$

Проверка того, что все эти пары удовлетворяют уравнению, не составляет труда:

$$5(7t-1)-7(5t-1)=35t-5-35t+7=2.$$

Никаких других целочисленных решений исследуемое уравнение не имеет. Доказывать это можно разными способами. Например, запишем

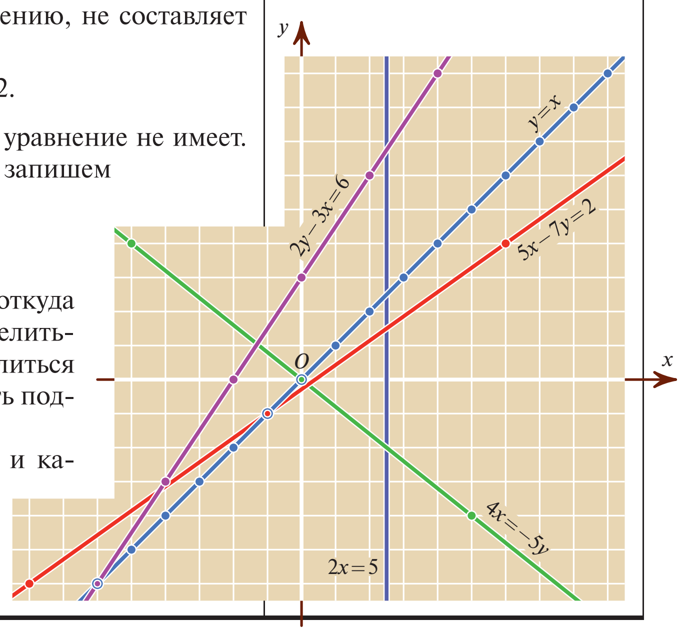
$$\begin{cases} 5x-7y=2, \\ 5\cdot(-1)-7\cdot(-1)=2 \end{cases}$$

и приравняем левые части: $5x-7y=5\cdot(-1)-7\cdot(-1)$, откуда $5(x+1)=7(y+1)$. Теперь ясно, что левая часть должна делиться на 7. Следовательно, число $x+1$ должно нацело делиться на 7, то есть $x+1=7t$, где t — целое. Осталось выполнить подстановку $5\cdot7t=7(y+1)$ и получить $y=5t-1$.

Разумеется, можно было решать уравнение $5x-7y=2$ и каким-нибудь другим способом. Рассмотренный нами способ интересен тем, что при помощи него можно решить уравнение $ax-by=c$ не только при $(a;b;c)=(5;7;2)$, но и в общем случае. ■

Мухаммед ал-Хорезми (780—847) родился и получил образование в Хорезме, а затем переселился в Багдад — крупнейший в то время центр интеллектуальной жизни Средней Азии. Среди предков ал-Хорезми были зороастрийские жрецы. Под его руководством ученые «Дома мудрости» — сегодня мы назвали бы его академией наук — переводили труды Платона, Аристотеля, Евклида, Птолемея, Гиппократа, проводили астрономические наблюдения, проверяли и уточняли данные, приведенные в греческих и индийских сочинениях. По инициативе ал-Хорезми проводились геодезические работы по измерению длины градуса земного меридиана.

Ал-Хорезми написал обширную географическую «Книгу картин Земли», а также книги «О построении астролябии» и «О солнечных часах». Наибольшую славу ему принесли сочинения по арифметике и алгебре. В трактате «Об индийском счете» ал-Хорезми впервые на арабском Востоке ввел десятичную позиционную систему счисления: девять индийских цифр и «маленький кружок, показывающий, что разряд пуст». Ал-Хорезми подробно объяснил, как складывать, вычитать, умножать, делить, как извлекать квадратные корни, причем не только с натуральными числами, но и с дробями, как с обыкновенными, так и шестидесятеричными.



Астролябия — популярный в Средние века на Востоке и в Европе астрономический инструмент.

Трактат «Об индийском счете» был переведен на латынь и оказал огромное влияние на развитие математики. Имя ал-Хорезми в латинизированной форме «алгоризм» или «алгоритм» стало обозначать в Европе десятичную позиционную систему счисления. (Позже, в XVII в., под влиянием Лейбница слово «алгоритм» приобрело более широкий смысл.)
Алгебраический трактат ал-Хорезми называется «Краткая книга восполнения и противопоставления» (по-арабски — «Китаб мухтасар ал-джабр ва-л-мукабала»). Первое из двух основных действий — восполнение (ал-джабр) — это перенос с другим знаком члена из одной части уравнения в другую. Именно от «ал-джабр» произошло современное слово «алгебра». Второе действие — противопоставление (ал-мукабала) — это сокращение равных членов в обеих частях уравнения.
В первой части «Китаб мухтасар ал-джабр ва-л-мукабала» изложена теория линейных и квадратных уравнений. Во второй она применена к решению конкретных задач — хозяйственных, торговых и юридических. Во введении к трактату ал-Хорезми писал: «Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы, заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при разделе наследства, составлении завещания, разделе имущества и в судебных делах, в торговых и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, геометрии и прочих разновидностях подобных дел». ■

Линейные уравнения. Общий случай.

Пусть при помощи алгоритма Евклида или любым другим способом на прямой $ax-by=c$ мы нашли одну точку с целыми координатами. Найдем все целочисленные точки этой прямой.

Теорема. ***Если числа a, b взаимно простые, а x_0 и y_0 — целые числа, удовлетворяющие равенству $ax_0-by_0=c$, то все пары чисел x, y, удовлетворяющие равенству $ax-by=c$, описываются формулами***

$$x=x_0+bt, \qquad y=y_0+at,$$

где t — целое.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно:

$$a(x_0+bt)-b(y_0+at)=ax_0+abt-by_0-abt=ax_0-by_0=c.$$

В другую сторону рассуждение чуть сложнее:

$$ax-by=c=ax_0-by_0,$$
$$a(x-x_0)=b(y-y_0).$$

Поскольку числа a и b взаимно просты и $a(x-x_0)$ делится на b, то $x-x_0$ делится на b, то есть $x-x_0=bt$ для некоторого целого t. При этом

$$abt=b(y-y_0),$$

откуда $y=y_0+at$, что и требовалось доказать.
Следующая теорема — необходимое и достаточное условие разрешимости линейного уравнения в целых числах.

Теорема. ***Уравнение***

$$ax-by=c,$$

где a, b, c — данные целые числа, x, y — неизвестные, имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда число c делится на наибольший общий делитель чисел a и b.

Одно доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из изложенного выше способа решения с помощью алгоритма Евклида. (Подумайте, как именно!) Второй — не менее замечательный — способ доказательства основан на следующей лемме.

Лемма. ***Пусть a и b — целые числа, хотя бы одно из которых не равно 0. Обозначим буквой m наименьшее натуральное число, представимое в виде***

$$m=ax-by,$$

где x, y — целые числа. Тогда $m=$ НОД$(a;b)$.

Доказательство. Обозначим $d=\text{НОД}(a;b)$. Тогда любое число вида $ax-by$, в том числе и m, делится на d. Осталось доказать, что не только m делится на d, но и d — на m. Для этого докажем, что как число a, так и число b, делится на m. Рассуждаем «от противного». Пусть, например, a не делится на m. Разделим a на m с остатком:

$$a=mq+r,$$

где $0<r<m$. Поскольку число m представимо в виде $m=aX-bY$, где X, Y — целые, то

$$r=a-mq=a-(aX-bY)q=a(1-Xq)+bYq.$$

Таким образом, число r представимо в виде $r=ax-by$. Но $0<r<m$, а m, как помните, — наименьшее натуральное число, представимое в таком виде. Лемма доказана. Утверждение теоремы следует из нее. ■