Л. И. ЛЕСНЯК, Т. А. ШАЛЫГИНА

МАТЕМАТИКА. МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ. ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УДК 51:372.8 (07)
Ш 18

Шалыгина, Т.А. Математика [Текст]: методическое пособие для подготовки к единому государственному экзамену (часть первая) / Т.А. Шалыгина, Л.И. Лесняк. - Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2016 . – 189 с.
ISBN 978-5-93057-751-8

Методическое пособие включает в себя краткий теоретический материал, задачи и рекомендации по решению, банк задач по основным темам кодификатора единого государственного экзамена по математике.

Пособие предназначено для слушателей подготовительных курсов университета, для учителей средних общеобразовательных школ и для абитуриентов.

УДК 51:372.8 (07)
Ш 18

Рецензенты:
Н.Н.Белов, д. ф.-м. н. профессор ТГАСУ
О.В. Иванова, к.т.н., доцент ТГАСУ

ISBN 978-5-93057-751-8

© Томский государственный архитектурно-строительный университет, 2016
© Т.А. Шалыгина, Л.И. Лесняк 2016

Предлагаемое методическое пособие по математике предназначено для учащихся подготовительных курсов и абитуриентов. В пособии рассмотрены следуюшие разделы школьного курса математики:

1. Преобразование алгебраических выражений.
2. Алгебраические уравнения. Системы уравнений.
3. Алгебраические неравенства. Системы неравенств
4. Показательные уравнения и неравенства.
5. Логарифмические уравнения и неравенства.

Изложение каждой темы содержит:

1. Краткие теоретические сведения.
2. Методические рекомендации по решению задач.
3. Банк задач для самостоятельной работы.
4. Конкурсные задачи.

Большое количество решенных в пособии задач различного уровня сложности сопровождается ссылками на теорию и методическими рекомендациями. По мнению авторов это позволит учащимся успешно справиться с задачами, предложенными для самостоятельного решения. Задания пунктов “Банк задач для самостоятельной работы” и “Конкурсные задачи” имеют разный уровень сложности. Банк задач для самостоятельной работы содержит, в основном, стандартные задачи. На закрепление каждого метода решения в банке задач предлагается 5 – 7 заданий, сложность которых постепенно повышается. Отработанная до автоматизма техника решения стандартных задач позволит перейти к решению задач пункта “Конкурсные задачи”, уровень сложности которых, помимо умения решать стандартные задачи, требует глубокого понимания теории и определенной сообразительности.

Значительная часть задач сборника включена в соответствии с кодификатором требований уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике.

ТЕМА 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Напомним некоторые понятия и формулы алгебры и общепринятые обозначения.

1. Действительные числа. Множество R действительных (вещественных) чисел – это совокупность рациональных и иррациональных чисел. Всякое рациональное число (отношение двух целых чисел) можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби $\left(\frac{3}{4} = 0{,}75;\ \frac{2}{3} = 0{,}(6);\ \frac{17}{6} = 2{,}8(3)\right)$. Каждому иррациональному числу соответствует бесконечная непериодическая десятичная дробь ($\sqrt{2}$ = 1,414…; π = 3,14159…;
e = 2,7182818284….

Приняты обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R - множество вещественных чисел;

$\varnothing$ - пустое множество;

[a, b] – множество x из R, удовлетворяющих неравенствам
$a \le x \le b$ (замкнутый промежуток)

(a, b) – множество x из R, удовлетворяющих неравенствам
$a < x < b$ (открытый промежуток);

[a, b) и (a, b] –полузамкнутые (полуоткрытые) промежутки

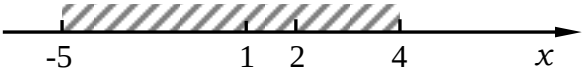
(-∞, b] – множество x из R, удовлетворяющих неравенствам $\infty < x \le b$; (a; + ∞) – множество x из R, удовлетворяющих неравенствам $a < x < +\infty$; (- ∞; + ∞) = R.

$\in$ - знак принадлежности ($\sqrt{2} \in R$, $\sqrt{2} \notin Q$);

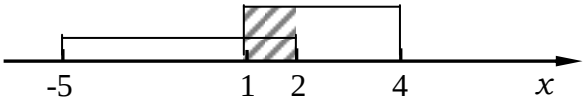
$\subset$ – знак включения ($N \subset Z$; $Z \subset Q$; $Q \subset R$);

$A \cup B$ – объединение множеств A и B.

Например, [-5; 2) ∪ [1; 4] = [-5; 4]



А ∩ В – пересечение множеств А и В.
Например, [-5; 2) ∩ [1; 4] = [1; 2)



2. Модуль (абсолютная величина) числа.

По определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если} & a \geq 0 \\ -a, \text{если} & a < 0 \end{cases}$$

Например, | 7| = 7, | -7| = - (-7) = 7.
Из определения следует, что | a| ≥ 0. Очевидно,
| a + b| ≤ | a| + | b|.

3. Степени и корни.

По определению

$$a^n = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{\text{n раз}}, \ \text{n} \in \text{N};$$

$$a^o = 1; \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a \neq 0.$$

Корнем n-ой степени из числа a называется такое число x, n-ая степень которого равна a, т.е. $x^n = a$. Из определения следует, что корень четной степени из отрицательного числа a во множестве действительных чисел не существует.

Для $a \geq 0$ вводится понятие арифметического корня.

Арифметическим корнем n-ой степени из числа a ($a \geq 0$) называется **неотрицательное** число x такое, что $x^n = a$.

Для арифметического корня принято обозначение

$x = \sqrt[n]{a}$. Например, $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt[4]{16} = 2$.

Свойства арифметических корней:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0, b > 0$
3. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, $a \geq 0$, $n, k \in N$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$, $n, k \in N$
5. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ при любом a.

Особенно внимательно следует использовать свойство 5. Например, $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$.

В случаях, когда a и b имеют одинаковые знаки, имеют место равенства:

$$\sqrt[2k]{a \cdot b} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}; \quad \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}.$$

Согласно определению

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $m \in Z$, $n > 1$, $a > 0$.

Свойства степеней с рациональным показателем:

Если $a > 0$, $b > 0$, $p \in Q$ и $q \in Q$, справедливы равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
3. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$;
5. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Если $p \in Z$ и $q \in Z$, то ограничение $a > 0$ и $b > 0$ можно ослабить до $a \neq 0$, $b \neq 0$.

4. Формулы сокращенного умножения

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,b^2\,a + b^3$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - a\,b + b^2)$
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,b^2\,a - b^3$
7. $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + a\,b + b^2)$

1.1. Задачи на вычисление

Решение задач вычислительногохарактера предусматривает наличие таких элементарных навыков, как нахождение наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного; приведение дробей к общему знаменателю; сложение, вычитание, умножение и деление дробей; приведение подобных; обращение десятичной дроби в обыкновенную и наоборот; умение выполнять действия над степенями и другие элементарные преобразования.

Пример 1. Вычислить

$$\frac{0{,}4 + 8\cdot\left(5 - 0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right) - 5 : 2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8 - \left(8{,}9 - 2{,}6 : \frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}$$

Решение. В данном случае вычисления целесообразно проводить в обыкновенных дробях. Рекомендуется обратить внимание на порядок выполнения действий.

1. $0{,}4 + 8\cdot\left(5 - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}\right) - 5 : \frac{5}{2} = 0{,}4 + 8\cdot\left(5 - \frac{1}{2}\right) - 5\cdot\frac{2}{5} =$

$$= \frac{2}{5} + 8 \cdot 4\frac{1}{2} - 2 = 34\frac{2}{5}$$

2. $$1\frac{7}{8} \cdot 8 - \left(8{,}9 - 2{,}6 : \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{8} \cdot 8 - \left(\frac{89}{10} - \frac{26}{10} \cdot \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 15 - \left(\frac{89}{10} - \frac{39}{10}\right) = 15 - 5 = 10$$

3. $$\frac{34\frac{2}{5}}{10 \cdot 34\frac{2}{5}} = \frac{1}{10}.$$

Пример 2. Вычислить

$$\frac{(0,(3))^{-10} \cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{0{,}64^2 + 0{,}64 \cdot 0{,}36}$$

Решение.

1) Переведем десятичные дроби числителя в обыкновенные

$$0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

и найдем величину числителя:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot (3^3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot (5^2)^{-2} + (2^6)^{\frac{1}{3}} =$$

$3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 2^2 = 3 + 1 + 4 = 8$

2) $0{,}64^2 + 0{,}64 \cdot 0{,}36 = 0{,}64 \cdot (0{,}64 + 0{,}36) = 0{,}64$

3) $$\frac{8}{0{,}64} = \frac{800}{64} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Заметим, что при вычислении знаменателя переходить от десятичных дробей к обыкновенным не имело смысла.

Пример 3. Найти x, если

$$\frac{8^{\frac{2}{3}}\cdot(\sqrt[3]{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot x}=2^7\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6$$

Решение. Каждый сомножитель представляет собой степень с основанием 2. Выполним действия со степенями в левой и правой частях равенства.

$$\frac{8^{\frac{2}{3}}\cdot(\sqrt[3]{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\frac{1}{2^2}}=2^2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^2=2^{\frac{14}{3}};$$

$$2^7\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6=\frac{2^7}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6}=\frac{2^7}{2^2}=2^5$$

В результате будем иметь $\dfrac{2^{\frac{14}{3}}}{x}=2^5$, откуда

$$x=\frac{2^{\frac{14}{3}}}{2^5}=2^{\frac{14}{3}-5}=2^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Пример 4. Убедиться, что число

$$x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$$

является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

Решение. Найдем x^3, используя формулу

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3b^2a-b^3,$$

которую далее имеет смысл записать в виде:

$$a^3-3a^2b+3b^2a-b^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$$

$$(\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})^3=(\sqrt[3]{\sqrt{80}+4})^3-3\sqrt[3]{(\sqrt{80}+4)^2}\ \cdot$$

$\cdot\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}+3\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}\ \cdot\ 3\sqrt[3]{(\sqrt{80}-4)^2}$ - $(\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})^3 = = \sqrt{80}$ +

$4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})) \cdot (\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}$ - $\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$) -– ($\sqrt{80}$ - 4)

$= \sqrt{80}$ + 4 – 3 $\sqrt[3]{80-16}$ $\cdot(\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4})$-

- $\sqrt{80}$ + 4 = 8 – 12 $\cdot$ ($\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$) = 8 – 12 x.

Итак, $x^3 = 8 - 12x \Rightarrow x^3 + 12x - 8 = 0$

Пример 5. Освободиться от иррациональностей в выражении

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}}{\sqrt{45-20\sqrt{5}}}$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\sqrt{a^2}=|a|$. Будем иметь

$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$ - $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ = $\left|\sqrt{5}-2\right|$ - $\left|\sqrt{5}-3\right|$ =

= $\sqrt{5}$ - 2 – (3 - $\sqrt{5}$) = 2 $\sqrt{5}$ - 5.

Преобразуем знаменатель:

$\sqrt{45-20\sqrt{5}}$ = $\sqrt{20-20\sqrt{5}+25}$ = $\sqrt{(2\sqrt{5}-5)^2}$ = $\left|2\sqrt{5}-5\right|$ =

= 5 - 2 $\sqrt{5}$.

Таким образом,

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}}{\sqrt{45-20\sqrt{5}}} = -1.$$

Пример 6. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$$

Решение. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{6}}-1\right)} =$

$= \dfrac{\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^3-1}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{6}}-1\right)} = \dfrac{\left(2^{\frac{1}{6}}-1\right)\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{6}}+1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{6}}-1\right)} = \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}+1}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}+1\right).$

Напомним, что для избавления от иррациональности в знаменателях дробей вида $\dfrac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ и $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ следует числитель и знаменатель дроби умножить на выражение, позволяющее далее использовать формулу разности квадратов в первом случае и суммы (или разности) кубов во втором .

Банк задач для самостоятельной работы

1. Представьте обыкновенные дроби

$$\frac{3}{25};\ \frac{11}{20};\ \frac{23}{9};\ \frac{19}{150};\ \frac{68}{55}$$

в виде десятичных дробей.

2. Представьте бесконечные десятичные периодические дроби 0, (3); 0, (7); 0,3 (8); 0,12 (9); 0,2 (36) в виде простых дробей.

3. Убедитесь, что

$$\frac{0{,}23(7)+\frac{43}{450}}{0{,}5(61)-\frac{113}{445}}=1$$

4. Найдите x, если

$$\frac{0{,}1(6)+0{,}(3)}{0{,}(3)+1{,}1(6)}\cdot x = 10$$

Ответ. x = 30.

В заданиях 5 – 20 требуется найти значения заданных числовых выражений.

5. $(1{,}4 \cdot 0{,}15 - 0{,}02) : (0{,}05 - 0{,}012 : 4{,}8)$ 4

6. $\left(\frac{1}{2} + 0{,}8 - 1\frac{1}{2} : 2{,}5\right) : \left(3 + 4\frac{3}{25} - 0{,}12\right)$ 0,1

7. $\dfrac{0{,}6 + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + 0{,}125}{\frac{4}{15} + 0{,}4 + 0{,}(3)} \cdot 24$ 25

8. $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5}$ 2,5

9. $3^6 \cdot 9^{-2} \cdot 5^4 - 9 \cdot 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ 0

10. $\dfrac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^{-5}}$ 100

11. $\dfrac{2\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3} - 3{,}25}{\left(\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{2}{9}}}$ 1,4

12. $(1000)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} - (625)^{-0{,}75}$ 81,002

13. $(2{,}52)^2 - (2{,}48)^2 - 0{,}04 \cdot 0{,}75$ 0,17

14. $\sqrt{\dfrac{27{,}31^3 + 8{,}69^3}{27{,}31^2 - 27{,}31 \cdot 8{,}69 + 8{,}69^2}}$ 6

15. $\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{12 - 4\sqrt{5}}$ 4

16. $\dfrac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}}$ 1

17. $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25})$ 2

18. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2$ $\frac{1}{4}$

19. $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$ 2

20. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 1

В заданиях 21 – 32 требуется исключить иррациональность в знаменателе.

21. $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$;

22. $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$;

23. $\frac{2}{\sqrt{11}-3}-\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

24. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$;

25. $\frac{a-\mathrm{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{\mathrm{b}}}$;

26. $\frac{a-\mathrm{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{\mathrm{b}}}$;

27. $\frac{8+\mathrm{b}}{2+\sqrt[3]{\mathrm{b}}}$;

28. $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$;

29. $\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$;

30. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$;

31. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

32. $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Ответы: 23) 1; 30) $(2-\sqrt[4]{3})(2+\sqrt{3})$;

31) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 32) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}$.

1.2. Разложение многочлена на множители

Разложение на множители – одно из основных алгебраических преобразований. Выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней называ-

ется одночленом. Многочлен – это алгебраическая сумма одночленов. На конкретных примерах рассмотрим основные приемы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки

Пример 1. $4a^5b^2 + 12a^4b^3 + 9a^3b^4 = a^3b^2 \cdot (4a^2 + 12ab + 9b^2) = a^3b^2 \cdot (2a + 3b)^2$.

Пример 2. $x - \sqrt{x+y} + y = (x+y) - \sqrt{x+y} = \sqrt{x+y} \cdot (\sqrt{x+y} - 1)$.

2. Метод группировки

Пример 1. $5ax^2 - xy - 10ax - x + 2y + 2 = (5ax^2 - 10ax) - (xy - 2y) - (x - 2) = 5ax(x - 2) - y(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(5ax - y - 1)$.

Пример 2. $a^4 + 3a^2 + 2 = (a^4 + a^2) + (2a^2 + 2) = a^2(a^2 + 1) + 2(a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a^2 + 2)$.

3. Разложение на множители с использованием формул сокращенного умножения

Пример 1. $x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 - 8)(x^3 + 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

Пример 2. $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$.

Пример 3. $x^4 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2 + \sqrt{2}\,x \cdot y)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,xy)$.

Заметим, что использованный при решении примера 3 прием выделения полного квадрата, широко применяется при решении алгебраических задач.

4. Разложение на множители многочлена вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – вещественные числа.

Частным случаем такого многочлена является квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, который как известно, можно представить в виде:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

В курсе высшей алгебры доказано, что аналогично разлагается на множители многочлен степени n:

$$P_n = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни уравнения $P_n(x) = 0$ (их называют также корнями многочлена $P_n(x)$). В общем случае нахождение корней многочлена задача трудная (и не всегда решается), но в некоторых случаях корень удастся найти с помощью следующей теоремы.

Теорема. Если рациональное число $\frac{p}{q}$ (p и q взаимно простые числа) является корнем многочлена $P_n(x)$, коэффициенты которого – целые числа, тогда p – делитель свободного члена a_o, q – делитель коэффициента a_n.

В частном случае, если x_1 – целый корень многочлена $P_n(x)$, тогда число x_1 является делителем a_o.

Если удается найти корень x_1 многочлена $P_n(x)$, тогда на основании теоремы Безу многочлен $P_n(x)$ представим в виде:

$$P_n(x) = (x - x_1) Q_{n-1}(x),$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n - 1)$. Далее аналогичным или каким-нибудь иным способом пытаются найти корни многочлена $Q_{n-1}(x)$.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Решение. Делителями числа 6 являются числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Выясним, нет ли среди этих чисел корней данного многочлена: $P(1) = 4 \neq 0$, $P(-1) = 0$ - это означает, что $x = -1$ – корень многочлена. Найдем частное от деления многочлена $P(x)$ на разность $x - (-1) = x + 1$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 4x^2 + x + 6 & \underline{x + 1} \\
\underline{x^3 + x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
\quad -5x^2 + x & \\
\quad \underline{-5x^2 - 5x} & \\
\qquad 6x + 6 & \\
\qquad \underline{6x + 6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Итак, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$. Решая уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, найдем еще два корня $x = 2$ и $x = 3$ данного многочлена. Окончательно будем иметь:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

Пример 2. Разложить на множители

$$P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12$$

Решение. Делители свободного члена $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Непосредственно убеждаемся, что $x = 2$ – корень многочлена ($P(2) = 0$). Найдем частное от деления многочлена на разность $(x - 2)$.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 & \underline{x - 2} \\
\underline{x^4 - 2x^3} & x^3 + 3x^2 + 2x + 6 \\
\quad 3x^3 - 4x^2 & \\
\quad \underline{3x^3 - 6x^2} & \\
\qquad 2x^2 + 2x & \\
\qquad \underline{2x^2 - 4x} & \\
\qquad\quad 6x - 12 & \\
\qquad\quad \underline{6x - 12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Таким образом:

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + 2x + 6).$$

Многочлен $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ можно разложить на множители методом группировки: $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 =$
$= x^2(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 2)$.

Итак,

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 2)$$

Пример 3. Разложить на множители
$P(x) = 3x^3 + x^2 + 7x - 6$

Решение. Непосредственно убедимся, что делители $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ числа -6 корнями многочлена не являются. Попытаемся найти корень вида $\frac{p}{q}$, где возможные значения для p: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$, а возможные значения для q: $\pm 1; \pm 3$. Подбором находим $x_1 = \frac{2}{3}$. Разделим P(x) на $\left(x - \frac{2}{3}\right)$:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 + x^2 + 7x - 6 & x - \frac{2}{3} \\
\underline{3x^3 - 2x^2} & 3x^2 + 3x + 9 \\
\quad 3x^2 + 7x & \\
\quad \underline{3x^2 - 2x} & \\
\qquad 9x - 6 & \\
\qquad \underline{9x - 6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Уравнение $3x^2 + 3x + 9 = 0$ действительных корней не имеет (Д < 0), поэтому окончательно будем иметь:

$$3x^3 + x^2 + 7x - 6 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 3x + 9) =$$
$$= (3x - 2)(x^2 + x + 3).$$

Банк задач для самостоятельной работы

В заданиях 1 – 24 требуется разложить заданные многочлены на множители.

1. $x^2 - 2x - xy + 2y$;
2. $xy - zy - x + z - y + 1$;
3. $a^3 b^2 - 2a^2 b^3 + a b^4$;
4. $a^{\frac{5}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{5}{2}}$;
5. $9x^2 - 7$;
6. $81x^4 - 16$;
7. $8a^3 + 27b^3$;
8. $a^6 - 1$;
9. $x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y$;
10. $x\sqrt[5]{y} - y\sqrt[5]{x}$;
11. $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$;
12. $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}$;
13. $5x^2 + x - 6$;
14. $3x^3 + 5x^2 - 8x$;
15. $x^4 - 5x^2 + 4$;
16. $x^4 - 7x^2 - 18$;
17. $x^5 - x^4 - 16x + 16$;
18. $x^6 - 16x^3 + 64$;
19. $x^3 + x - 2$;
20. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$;
21. $2x^3 - x^2 - 4x + 3$;
22. $2x^3 + x^2 + x - 1$;
23. $x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$;
24. $x^4 + x^2 + 1$.

В заданиях 25 – 28 требуется без использования калькулятора сравнить по величине заданные пары чисел

25. $x_1 = 75^2 - 64^2$, $x_2 = 74^2 - 63^2$
26. $x_1 = 75^3 - 64^3$, $x_2 = (75 - 64)^3$
27. $x_1 = 1997 \cdot 1999$, $x_2 = (1998)^2$
28. $x_1 = 23^4$, $x_2 = 18 \cdot 21 \cdot 25 \cdot 28$

Ответы. 25) $x_1 > x_2$ 26) $x_1 > x_2$
27) $x_1 < x_2$ 28) $x_1 > x_2$

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	3
1.	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.	5
1.1.	Задачи на вычисление	8
	Банк задач для самостоятельной работы	12
1.2.	Разложение многочлена на множители	14
	Банк задач для самостоятельной работы	19
1.3.	Тождественные преобразования алгебраических выражений.	20
	Банк задач для самостоятельной работы	25
1.4.	Конкурсные задачи.	29
2.	АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.	31
2.1.	Понятие о равносильности уравнений.	31
2.2.	Методы решения алгебраических уравнений.	33
	Банк задач для самостоятельной работы	39
	Конкурсные задачи.	40
2.3.	Уравнения с переменной под знаком модуля.	42
	Банк задач для самостоятельной работы	47
	Конкурсные задачи.	47
2.4.	Решение иррациональных уравнений.	48
	Банк задач для самостоятельной работы	54
	Конкурсные задачи.	56
2.5.	Системы уравнений с двумя неизвестными.	57
	Банк задач для самостоятельной работы	63
	Конкурсные задачи.	67
3.	АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ.	69
3.1.	Неравенства с переменной величиной. Равносильные неравенства.	69
3.2.	Линейные и дробно-линейные неравенства.	71
3.3	Квадратные неравенства..	74
	Банк задач для самостоятельной работы	77

3.4 Решение рациональных неравенств методом интегралов. 79
Банк задач для самостоятельной работы 83
Конкурсные задачи. 84
3.5 Системы алгебраических неравенств. Совокупности неравенств. 85
Банк задач для самостоятельной работы 88
3.6 Решение неравенств, содержащих неизвестную величину под знаком модуля. 92
Банк задач для самостоятельной работы 97
Конкурсные задачи. 99
3.7 Иррациональные неравенства. 100
Банк задач для самостоятельной работы 106
Конкурсные задачи. 107
3.8 Уравнения и неравенства с параметрами. 108
Банк задач для самостоятельной работы 113
Конкурсные задачи. 116
4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. 118
4.1. Показательная функция, её свойства и график. . . . 118
Банк задач для самостоятельной работы 121
4.2. Решение показательных уравнений. 122
Банк задач для самостоятельной работы 130
Конкурсные задачи. 133
4.3. Решение показательных неравенств. 135
Банк задач для самостоятельной работы 140
Конкурсные задачи. 142
5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. 145
5.1. Понятия логарифма. Правила логарифмирования. 145
Банк задач для самостоятельной работы 148
5.2. Логарифмическая функция 149
Банк задач для самостоятельной работы 154
5.3. Логарифмические уравнения. 156
Банк задач для самостоятельной работы 167

Конкурсные задачи. 170
5.4. Логарифмические неравенства. 172
Банк задач для самостоятельной работы 180
Конкурсные задачи. 182
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 186
СОДЕРЖАНИЕ 187