

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

МАТЕМАТИКА

**КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК
В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ
для подготовки**

к ЕГЭ и ОГЭ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М34



Математика : краткий справочник в таблицах и
схемах : для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ / Л.И. Слоним-
ский, И.С. Слонимская. — Москва : Издательство
АСТ, 2020. — 379, [5] с.: ил. — (Краткий справоч-
ник в таблицах для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ).

ISBN 978-5-17-121354-1

Справочник содержит материал курса «Математи-
ка» в объеме, проверяемом на ОГЭ и ЕГЭ.

Наглядность и доступность подачи материала в та-
бличной форме позволяет легко и быстро обобщить,
систематизировать и повторить материал школьного
курса за 5–11 классы и успешно подготовиться к сда-
че итоговых экзаменов.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-121354-1

© Слонимский Л.И., Слонимская И.С., 2020
© ООО «Издательство АСТ», 2020

Содержание

ПОДГОТОВКА К ОГЭ

АЛГЕБРА

1. Числа и вычисления

1.1. Натуральные числа	25
1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры. Знаки для записи чисел. . .	25
1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами	26
1.1.3. Степень с натуральным показателем	30
1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. . . .	31
1.1.5. Признаки делимости	33
1.1.6. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)	34
1.1.7. Деление с остатком	36
1.2. Дроби	37
1.2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Сокращение дроби . .	37
1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	41

1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части.	47
1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей.	49
1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями.	50
1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби.	52
1.3. Рациональные числа	53
1.3.1. Целые числа.	53
1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа.	53
1.3.3. Сравнение рациональных чисел	54
1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами	55
1.3.5. Степень с целым показателем	56
1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок	57
1.4. Действительные числа	58
1.4.1. Квадратный корень из числа	58
1.4.2. Корень третьей степени.	59
1.4.3. Нахождение приближённого значения корня	59
1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем	60

1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби	60
1.4.6. Сравнение действительных чисел.	60
1.5. Измерения, приближения, оценки.	61
1.5.1. Единицы измерения	61
1.5.2. Стандартный вид числа.	63
1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул	64
1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту	65
1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах.	66
1.5.6. Пропорция. Прямая и обратно пропорциональная зависимости	67
1.5.7. Округление чисел.	68

2. Алгебраические выражения

2.1. Буквенные выражения (выражения с переменными)	70
2.1.1. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения	70
2.1.2. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения.	71

2.1.3. Подстановка выражений вместо переменных	71
2.1.4. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений	72
2.2. Свойства степени с целым показателем ...	72
2.3. Многочлены	73
2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов	73
2.3.2. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов	74
2.3.3. Разложение многочлена на множители	75
2.3.4. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители	76
2.3.5. Степень и корень многочлена с одной переменной	76
2.4. Алгебраическая дробь	77
2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей	77
2.4.2. Рациональные выражения и их преобразования	77
2.5. Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях	78

3. Уравнения и неравенства

3.1. Уравнения	79
3.1.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения	79
3.1.2. Линейное уравнение	79
3.1.3. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения	81
3.1.4. Решение рациональных уравнений	83
3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители	85
3.1.6. Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными	86
3.1.7. Система уравнений; решение системы...	87
3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим способом	88
3.2. Неравенства	92
3.2.1. Числовые неравенства и их свойства	92
3.2.2. Неравенства с одной переменной. Решение неравенства	94
3.2.3. Линейное неравенство с одной переменной	95

3.2.4. Системы линейных неравенств	96
3.2.5. Квадратные неравенства	98
3.3. Текстовые задачи	102
3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом	102
3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом	104

4. Числовые последовательности

4.1 Понятие последовательности	109
4.1.1. Понятие последовательности	109
4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии	110
4.2.1. Арифметическая прогрессия	110
4.2.2. Геометрическая прогрессия	111
4.2.3. Сложные проценты	112

5. Функции

5.1. Числовые функции	113
5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции	113
5.1.2. График функции, возрастание и убывание, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства. .	114

5.1.3. Пример графических зависимостей, отражающих реальные процессы	115
5.1.4. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов	116
5.1.5. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола	117
5.1.6. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии	118
5.1.7. График функции $y = \sqrt{x}$	119
5.1.8. График функции $y = \sqrt[3]{x}$	119
5.1.9. График $y = x $	120
5.1.10. Использование графиков функций для решения уравнений и систем	120

6. Координаты на прямой и в плоскости

6.1. Координатная прямая	122
6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой	122
6.1.2. Геометрический смысл модуля	122
6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч	123
6.2. Декартовы координаты на плоскости	124

6.2.1. Декартовы координаты на плоскости; координаты точки	124
6.2.2. Координаты середины отрезка	124
6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости	125
6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых	125
6.2.5. Уравнение окружности	126
6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем	126
7. Статистика и теория вероятности	128

ГЕОМЕТРИЯ

8.1. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин	133
8.1.1. Начальные понятия геометрии	133
8.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства	135
8.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых	137
8.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой	140
8.1.5. Понятие о геометрическом месте точек ..	142

8.1.6. Преобразования плоскости. Движение.	
Симметрия	143
8.2. Треугольник	145
8.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений	145
8.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника	146
8.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора	149
8.2.4. Признаки равенства треугольников	151
8.2.5. Неравенство треугольника	152
8.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника	152
8.2.7. Теорема Фалеса	153
8.2.8. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников ...	153
8.2.9. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°	156
8.2.10. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Теорема косинусов и теорема синусов.	157
8.3. Многоугольники	159

8.3.1. Параллелограмм, его свойства и признаки.	159
8.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки	161
8.3.3. Трапеция, средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция	163
8.3.4. Сумма углов выпуклого многоугольника	164
8.3.5. Правильные многоугольники	165
8.4. Окружность и круг	166
8.4.1. Центральный, вписанный угол; величина вписанного угла	166
8.4.2. Взаимное расположение прямой и окружности	168
8.4.3. Касательная и секущая к окружности; равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки	169
8.4.4. Окружность, вписанная в треугольник.	170
8.4.5. Окружность, описанная около треугольника	170
8.4.6. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника	172
8.4.7. Вписанные и описанные четырёхугольники	173
8.5. Измерение геометрических величин.....	174

8.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой	174
8.5.2. Длина окружности.	175
8.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности	175
8.5.4. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника.	176
8.5.5. Площадь параллелограмма.	177
8.5.6. Площадь трапеции.	177
8.5.7. Площадь треугольника	178
8.5.8. Площадь круга, площадь сектора	179
8.5.9. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара	180
8.6. Векторы на плоскости	181
8.6.1 Вектор, длина (модуль) вектора	181
8.6.2. Равенство векторов	182
8.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число).	183
8.6.4. Угол между векторами.	185
8.6.5. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. . . .	186
8.6.6. Координаты вектора	187
8.6.7. Скалярное произведение векторов	189

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа и вычисления	193
1.1.1. Числа	193
1.1.2. Арифметические действия и их свойства ..	194
1.1.3. Дроби, действия над ними. Округление чисел	198
1.1.4. Отношения, пропорции и проценты	204
1.1.5. Модуль и его свойства	209
1.1.6. Положительные и отрицательные числа, действия над ними	210
1.1.7. Степени, корни и их свойства	211
1.1.8. Логарифмы и их свойства	214
1.2. Преобразование выражений с переменными	216
1.2.1. Раскрытие скобок	216
1.2.2. Приведение подобных слагаемых	217
1.2.3. Формулы сокращенного умножения	217
1.2.4. Различные способы разложения на множители	217
1.3. Основы тригонометрии	218
1.3.1. Радианная и градусная меры произвольного угла	218

1.3.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла	220
1.3.3. Основные тригонометрические тождества	222
1.3.4. Формулы приведения	222
1.3.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.	223
1.3.6. Синус и косинус двойного угла	224
1.4. Уравнения и системы уравнений	224
1.4.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения.	224
1.4.2. Линейные уравнения	225
1.4.3. Квадратные уравнения	225
1.4.4. Дробно-рациональные уравнения	228
1.4.5. Иррациональные уравнения.	231
1.4.6. Показательные уравнения	232
1.4.7. Логарифмические уравнения	234
1.4.8. Тригонометрические уравнения.	235
1.4.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных	238
1.5. Неравенства и системы неравенств	242
1.5.1. Линейные неравенства	242
1.5.2. Квадратные неравенства	243
1.5.3. Рациональные неравенства и метод интервалов	248

1.5.4. Показательные неравенства	250
1.5.5. Логарифмические неравенства	252
1.5.6. Метод рационализации	253
1.5.7. Системы неравенств с одной переменной	255
1.6. Текстовые задачи и методы их решения	257
1.6.1. Решение текстовых задач арифметическим методом	257
1.6.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом	259
1.6.3. Решение текстовых задач графическим методом	266
1.7. Прогрессии	267
1.7.1. Арифметическая прогрессия	267
1.7.2. Геометрическая прогрессия	268
 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	
2.1. Функции	269
2.1.1. Функция, область определения функции, множество значений функции.	269
2.1.2. График функции	270
2.1.3. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат	270
2.2. Элементарное исследование функций.	271
2.2.1. Чётность и нечётность функции	271

2.2.2. Периодичность функции	272
2.2.3. Нули функции, промежутки знакопостоянства	272
2.2.4. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания	273
2.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции	273
2.2.6. Ограниченность функции	274
2.3. Основные элементарные функции	275
2.3.1. Линейная функция, её график	275
2.3.2. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график . . .	276
2.3.3. Квадратичная функция, её график	277
2.3.4. Показательная функция, её график	278
2.3.5. Логарифмическая функция, её график . .	279
2.3.6. Тригонометрические функции, их графики. .	280
2.4. Производная	284
2.4.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной	284
2.4.2. Физический смысл производной	285
2.4.3. Уравнение касательной к графику функции	286
2.4.4. Производные суммы, разности, произведения, частного	286
2.4.5. Производные основных элементарных функций	286

2.5. Исследование функций с помощью производной	287
2.5.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков	287
2.6. Первообразная	295
2.6.1. Первообразные элементарных функций	295
2.6.2. Площадь криволинейной трапеции	297

3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

3.1. Начальные сведения	298
3.1.1. Точки, прямые, лучи, отрезки	298
3.1.2. Углы. Вертикальные и смежные углы	299
3.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых	302
3.2. Треугольник	305
3.2.1. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника	305
3.2.2. Признаки равенства треугольников	307
3.2.3. Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника	308
3.2.4. Прямоугольный треугольник. Свойства и признаки прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора	310
3.2.5. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника	313

3.2.6. Признаки подобия треугольников	314
3.2.7. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника	317
3.2.8. Теорема Фалеса	317
3.2.9. Теорема синусов. Теорема косинусов . . .	318
3.3. Многоугольники	319
3.3.1. Параллелограмм	319
3.3.2. Прямоугольник и ромб	321
3.3.3. Квадрат	322
3.3.4. Трапеция	323
3.3.5. Сумма углов выпуклого многоугольника . .	324
3.3.6. Правильные многоугольники	325
3.3.7. Подобие произвольных фигур.	326
3.4. Окружность и круг	328
3.4.1. Основные понятия	328
3.4.2. Вписанный и центральный углы	328
3.4.3. Касательная и секущая к окружности . . .	330
3.4.4. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника. .	331
3.4.5. Вписанные и описанные четырёхугольники	333
3.5. Измерение геометрических величин	334
3.5.1. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми . .	334

3.5.2. Периметр многоугольника	334
3.5.3. Длина окружности.	334
3.5.4. Площадь квадрата, прямоугольника	335
3.5.5. Площадь параллелограмма и ромба, выпуклого четырёхугольника	335
3.5.6. Площадь треугольника	336
3.5.7. Площадь трапеции.	337
3.5.8. Площадь круга. Площадь сектора	337
3.5.9. Формула Пика для нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге	338
3.6. Векторы на плоскости	338
3.6.1. Вектор, длина вектора, равенство векторов.	338
3.6.2. Операции над векторами	339
3.6.3. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	342
3.6.4. Простейшие задачи в координатах	344
3.6.5. Уравнение окружности	344
3.7. Дополнительные материалы к главе 3	345
3.7.1. Использование подобия треугольников при решении задач	345

4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)

4.1. Прямые и плоскости в пространстве	348
4.1.1. Основные аксиомы стереометрии и следствия к ним.	348

4.1.2. Взаимное расположение прямых в пространстве	349
4.1.3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	350
4.1.4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве	353
4.2. Многогранники	354
4.2.1. Призма, параллелепипед, куб.	354
4.2.2. Пирамида	356
4.2.3. Сечение многогранника.	357
4.3. Тела вращения	358
4.3.1. Цилиндр	358
4.3.2. Конус	359
4.3.3. Шар и сфера	361
4.4. Измерение геометрических величин в пространстве	362
4.4.1. Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями	362
4.4.2. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми. Расстояние между параллельными плоскостями	363
4.4.3. Площадь поверхности многогранника ...	364
4.4.4. Площадь поверхности фигур вращения . .	365
4.4.5. Объёмы	366

4.5. Координаты и векторы в пространстве.	367
4.5.1. Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора	367
4.5.2. Скалярное произведение векторов в пространстве. Угол между векторами в пространстве	368
4.5.3. Уравнение плоскости.	369
4.5.4. Простейшие задачи в координатах в пространстве	372

5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Элементы статистики	373
5.2. Элементы комбинаторики	374
5.2.1. Основные формулы комбинаторики.	374
5.3. Элементы теории вероятностей	375
5.3.1. Вероятности событий. Классическое определение вероятности	375
5.3.2. Теоремы о вероятности событий.	376

6. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

6.1. Банковские задачи.	378
-------------------------------------	------------

Подготовка к ОГЭ

1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. Натуральные числа

1.1.1. Десятичная система счисления.

Римская нумерация. Цифры.

Знаки для записи чисел

Цифры — знаки для записи чисел.

Система счисления — способ записи чисел в виде, удобном для чтения и выполнения арифметических операций.

В десятичной системе счисления используют цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Всего 10 цифр.

Римские цифры	I	V	X	L	C	D	M
Арабские цифры	1	5	10	50	100	500	1000

Примеры

1) $XXVII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27.$

2) $MDCCLXIV = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + (5 - 1) = 1764.$

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

Натуральные числа — числа, которые используют при счёте предметов.	
Действия над натуральными числами	
Сложение	$a + b = c, a = c - b, b = c - a,$ где a — слагаемое, b — слагаемое, c — сумма
Вычитание	$a - b = c, a = b + c, b = a - c,$ где a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность
Умножение	$ab = c, a = \frac{c}{b}, b = \frac{c}{a}, a \neq 0, b \neq 0,$ где a — множитель, b — множитель, c — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c, a = bc, b = \frac{a}{c},$ $b \neq 0, c \neq 0$, где a — делимое, b — делитель, c — частное

Свойства сложения и умножения	
Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$

Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$
--	----------------------

Общие правила при действиях с 0 и 1	
$a + 0 = a$	$a : 1 = a$
$a - 0 = a$	$a : a = 1$
$a - a = 0$	$a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 1 = a$	$0 : a = 0$
$a : 0$ — нет числового решения	

Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9
<i>Действия</i>
• Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат. • Умножаем или складываем остатки. В результате вычислений тем же способом находим остаток и сравниваем его с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать. • При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

Примеры

1) $44 \cdot 46 = 2024$

$4 + 4 = 8; 4 + 6 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1;$

$2 + 0 + 2 + 4 = 8;$

$8 \cdot 1 = 8$ (верно)

2) $327 + 48 = 375$

$3 + 2 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$4 + 8 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$3 + 7 + 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6;$

$3 + 3 = 6$ (верно)

3) $156 : 12 = 13 \rightarrow 13 \cdot 12 = 156$

$1 + 3 = 4; 1 + 2 = 3;$

$1 + 5 + 6 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$ (верно)

4) $58 - 22 = 36 \rightarrow 36 + 22 = 58$

$3 + 6 = 9; 2 + 2 = 4; 5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4;$

$9 + 4 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$ (верно)

Приёмы быстрого устного счёта

Умножение чисел от 101 до 109 между собой
 $(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$

<i>Порядок действий</i>	<i>Примеры</i>
1) Записываем число 1. 2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей. 3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.	1) $102 \cdot 104 = 10\,000 + 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608.$ 2) $109 \cdot 108 = 10\,000 + 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 = 10\,000 + 1700 + 72 = 11\,772.$

Умножение чисел, бóльших 10 $(10 + a)(10 + b) = 10(10 + a + b) + ab$	
<i>Порядок действий</i>	<i>Примеры</i>
1. К одному из множителей прибавляем единицы второго множителя, получаем десятки. 2. Перемножаем единицы. 3. Складываем десятки с произведением единиц.	1) $12 \cdot 19 = 10(10 + 2 + 9) + 2 \cdot 9 = 210 + 18 = 228$ 2) $16 \cdot 13 = 10(10 + 6 + 3) + 6 \cdot 3 = 190 + 18 = 208$
Умножение двузначных чисел на 11	
Чтобы умножить двузначное число на 11, надо сложить цифры этого числа и результат записать между ними, если это однозначное число. Если полученная сумма — двузначное число, то левую цифру прибавляем к числу десятков первоначального числа. <i>Примеры</i> 1) $22 \cdot 11 = 2 \cdot 100 + (2 + 2) \cdot 10 + 2 = 242$ 2) $45 \cdot 11 = 4 \cdot 100 + (4 + 5) \cdot 10 + 5 = 495$ 3) $57 \cdot 11 = 5 \cdot 100 + (5 + 7) \cdot 10 + 7 = 627$	
Умножение чисел с одинаковыми десятками и числом единиц, дающих в сумме 10 $(1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10)$	
• <i>Десятки</i> умножаем на следующее натуральное число: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $5 \cdot 6$; $9 \cdot 10$; $11 \cdot 12$.	

• *Единицы* просто перемножаем (если в произведении получилось однозначное число, то слева приписываем 0):

$$1 \cdot 9 = 09, 2 \cdot 8 = 16, 3 \cdot 7 = 21, 4 \cdot 6 = 24, 5 \cdot 5 = 25.$$

• *В результате:* слева — произведение десятков, справа — произведение единиц.

Примеры

$$1) 42 \cdot 48 = (4 \cdot 5) \cdot 100 + (2 \cdot 8) = 2000 + 16 = \underline{2016}$$

$$2) 51 \cdot 59 = (5 \cdot 6) \cdot 100 + (1 \cdot 9) = 3000 + 9 = \underline{3009}$$

$$3) 83 \cdot 87 = (8 \cdot 9) \cdot 100 + (3 \cdot 7) = 7200 + 21 = \underline{7221}$$

$$4) 115^2 = 115 \cdot 115 = (11 \cdot 12) \cdot 100 + (5 \cdot 5) = \\ = 13200 + 25 = \underline{13225}$$

1.1.3. Степень с натуральным показателем

Степень — пятое математическое действие, считая сложение и вычитание, умножение и деление.

Определение степени числа a с натуральным показателем n ; a — основание степени	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n;$ где $n = 2, 3, 4, \dots$; $a^1 = a$
Определение степени числа с нулевым показателем	$a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0$
Умножение степеней с одинаковыми основаниями	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$
Деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^n : a^k = a^{n-k},$ где $n \geq k$
Возведение степени в степень	$(a^n)^k = a^{nk}$

Умножение степеней с одинаковыми показателями	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Деление степеней с одинаковыми показателями	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, где $b \neq 0$
Возведение в степень 0 и 1	$1^n = 1$; $0^n = 0$;
Возведение в степень положительных и отрицательных чисел с чётным или нечётным показателем	Если $a > 0$, то $a^{2n} > 0$, $a^{2n-1} > 0$. Если $a < 0$, то $a^{2n} > 0$, $a^{2n-1} < 0$.

1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители

Делитель числа a	Кратное числа a
↓	↓
Число, на которое a делится без остатка	Число, которое делится на a без остатка

Простые числа	Составные числа
↓	↓
Имеют только два делителя: 1 и само число. <i>Например</i> , делители числа 17: 1 и 17	Имеют более двух делителей. <i>Например</i> , число 6 имеет делители: 1, 2, 3, 6
Число 1 имеет только один делитель — само это число. Поэтому его не относят ни к простым, ни к составным числам.	

• **Разложение составного числа на простые множители** — представление этого числа в виде произведения простых чисел.

• Всякое составное число можно разложить на простые множители. При любом способе получается одно и то же разложение, если не учитывать порядок записи множителей.

Правило разложения на простые множители

1. Записать данное число, а справа от него провести вертикальную черту.

2. Разделить данное число нацело на наименьшее простое число — делитель данного.

3. Результат деления написать под данным числом, а делитель — справа за чертой.

4. Полученное частное так же нацело разделить на наименьшее возможное простое число, далее делать как в пункте 3.

5. Деление продолжать до получения в частном единицы.

6. Числа, записанные за вертикальной чертой в столбик, и есть простые множители, на которые раскладывается данное число.

Пример

$$\begin{array}{r|l} 1850 & 2 \\ 925 & 5 \\ 185 & 5 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

$$1850 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 37 = 2 \cdot 5^2 \cdot 37.$$

1.1.5. Признаки делимости

на 2	Число оканчивается на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
на 3	Сумма цифр делится на 3.
на 4	Две последние цифры числа — или нули, или число, делящееся на 4.
на 5	Последняя цифра числа — 0 или 5.
на 6	Одновременное выполнение признаков делимости на 2 и на 3.
на 7	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 2. Если получилось число, большее числа из оставшихся цифр, то следует вычесть из удвоенной последней цифры это число. Если число из оставшихся цифр больше, то надо из него вычесть удвоенную последнюю цифру.
на 8	Три последние цифры числа — нули или образуют число, делящееся на 8.
на 9	Сумма цифр числа делится на 9.
на 10	Последняя цифра числа — 0.
на 11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.
на 13	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 4 и прибавить к числу из оставшихся цифр.
на 25	Две последние цифры — нули или число, делящееся на 25.

1.1.6. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)

Наибольший общий делитель (НОД) нескольких натуральных чисел — наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка данные числа.

Например, 8 — наибольший общий делитель чисел 24 и 40, так как делители числа 24 — числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, а делители числа 40 — числа 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Правило для нахождения НОД

1. Разложить на простые множители каждое из данных чисел.
2. Выписать все общие делители чисел и перемножить их.

Пример

Найдём НОД чисел 12, 18, 30.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{НОД}(12, 18, 30) = 2 \cdot 3 = 6.$$

• Если все данные числа делятся на одно из них, то это число и является НОД этих чисел.

Например, НОД чисел 45, 60, 15 является число 15, так как $45 : 15 = 3$, $60 : 15 = 4$, $15 : 15 = 1$.

• **Взаимно простые числа** — натуральные числа, НОД которых равен 1.

Например, числа 8 и 9 — взаимно простые, так как $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $9 = 3 \cdot 3$, НОД (8, 9) = 1.

Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел (НОК) — наименьшее натуральное число, которое кратно каждому из данных чисел.

Например, наименьшее общее кратное чисел 9 и 12 — число 36, так как кратные 9 — числа 9, 18, 27, 36, 45 и т. д., а 12 — числа 12, 24, 36, 48 и т. д.

Правило для нахождения НОК

1. Разложить на простые множители каждое из данных чисел.

2. Выписать множители, которые есть в разложении одного из данных чисел.

3. Добавить к ним недостающие множители из разложений остальных чисел.

4. Найти произведение получившихся множителей.

Пример

Найти НОК чисел 10, 12, 15.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 0 \end{array}$$

НОК (10, 12, 15) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

- Если одно из данных чисел делится на все остальные числа, то это число и является наименьшим общим кратным данных чисел.

Например, для чисел 18, 40, 360 наименьшее общее кратное — число 360, так как $360 : 18 = 20$; $360 : 40 = 9$; $360 : 360 = 1$.

- Для взаимно простых чисел НОК равен произведению этих чисел.

Например, для чисел 8 и 9 НОК равен $8 \cdot 9 = 72$.

- Связь между НОК и НОД:

$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)}.$$

1.1.7. Деление с остатком

Правила деления с остатком

1. Если делимое не делится без остатка, то нужно подобрать ближайшее к делимому число, которое делится на делитель без остатка. При делении с остатком результат записывают двумя числами. Первое число называют **неполным частным**, второе — **остатком**.

Например, $190 : 27 = 7$ (остаток 1).

2. При делении с остатком остаток всегда должен быть меньше делителя.

Например, $190 : 27 = 7$ (остаток 1), $1 < 27$.

Делимое	Делитель
$\begin{array}{r} \text{---} 190 \\ - 189 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ 7 \\ \hline \end{array}$
Остаток	Неполное частное

Форма записи деления с остатком	
$190 : 27 = 7$ (остаток 1) Запись показывает результат деления	$190 = 27 \cdot 7 + 1$ Запись позволяет сделать проверку

1.2. Дроби

1.2.1. Обыкновенная дробь.

Основное свойство дроби. Сравнение дробей.

Сокращение дроби

Обыкновенная дробь — запись вида $\frac{a}{b}$, где a — числитель, b — знаменатель. Числитель дроби — число, которое пишут над чертой. Числитель показывает, сколько равных долей единицы взято. Знаменатель дроби — число, которое пишут под чертой. Знаменатель показывает, на сколько долей разделили единицу.		
Правильная дробь — обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя. Например, $\frac{1}{3}; \frac{3}{7}; \frac{23}{45}$.	Неправильная дробь — обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему. Например, $\frac{4}{3}; \frac{25}{5}; \frac{6}{6}$.	
Неправильная дробь	>	Правильная дробь
Неправильная дробь	$\geq$	1
Правильная дробь	<	1

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь. Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа.

Например,

$$1) \frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{10}{35}.$$

$$2) \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{40}{48}.$$

$$3) \frac{50}{8} = \frac{50 : 2}{8 : 2} = \frac{25}{4}.$$

Сравнение дробей

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.

Например, $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}; \frac{14}{29} < \frac{19}{29}.$

Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

Например, $\frac{7}{11} < \frac{7}{9}; \frac{15}{37} > \frac{15}{43}.$

Сокращение дроби

Сокращение дроби — деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель, не равный единице.

Наибольшее число, на которое можно сократить дробь, — **НОД числителя и знаменателя дроби.**

Задание «сократить дробь» подразумевает ответ в виде *несократимой дроби.*