

А.Г. Хармац

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО МИРА

на уроках в школе



ИЗДАТЕЛЬСТВО
Прометей

УДК 51 (09)
ББК 22.1г
Х214

Хармац А.Г.

Х214 **Математика Древнего мира на уроках в школе:** книга об истории развития математики, обращенная к широкому кругу читателей. Она содержит материалы к лекциям и практическим занятиям для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов. Будет также полезна и учителям математики, и учащимся средней школы / А.Г. Хармац. – М.: Прометей, 2019. – 398 с.

ISBN 978-5-907100-62-6

Данная книга напоминает об основных этапах развития математики. Но главное внимание уделено становлению математики в эпоху Древнего мира. Математика рассматривается как неотъемлемая часть общечеловеческой истории на фоне развития мировой культуры.

В книге содержится много выдержек из работ классиков математики, что дает возможность почувствовать их стиль изложения, особенности математического языка. Читатель познакомится как с теоретическим материалом, написанным в доступной форме, так и с практическим, подразумевающим разбор задач. Среди них выделяются *исторические* (их более 160, и взяты они из произведений классиков) и *учебные* (их 83, они предложены автором для выработки навыков решения задач рассматриваемого типа). Кроме того, часть задач рекомендуется для самостоятельной работы. Приводятся эмоциональные вставки, забавные случаи и легенды о науке и ее творцах.

В конце книги в *приложении 1* содержится перечень некоторых разделов школьной программы с указанием номеров задач данного пособия, которые могут быть использованы при изучении соответствующей темы.

В *приложении 2* даётся словарь некоторых часто упоминаемых математических терминов с указанием их происхождения и значения.

Издание адресуется студентам физико-математических факультетов педагогических вузов, преподавателям, читающим этот курс, учителям, старшеклассникам, а также всем, кто интересуется историей математики.

Свои замечания и советы сообщите автору по адресу:
harmatsanatoliy@outlook.com

ISBN 978-5-907100-62-6

© А.Г. Хармац, 2019

© Издательство «Прометей», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обращение к читателям	4	
ВВЕДЕНИЕ	5	
1. Как развивалась математика? (Шипы и розы на челе математики).....	5	
2. Определение науки истории математики.....	7	
3. Цели курса истории математики.....	7	
4. Математика – отражение реальной действительности	11	
5. Математика и другие науки.....	13	
6. Математика и эстетика.....	14	
7. Интернациональный характер развития математики.....	15	
8. История математики для учителя (и студента – будущего учителя).....	16	
9. Некоторые методические рекомендации о месте элементов историзма в учебном процессе.....	18	
10. Два варианта изучения истории математики.....	19	
11. Основные этапы развития математики.....	20	
12. Рекомендуемая литература по истории математики.....	21	
 <i>I ЭТАП РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ:</i>		
НАКОПЛЕНИЕ В ПРОЦЕССЕ ТРУДОВОЙ ПРАКТИКИ ЧЕЛОВЕКА ФАКТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА И ВЫДЕЛЕНИЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ПЕРИОД ПЕРВОБЫТНООБЩИННОГО СТРОЯ		22
§ 1. Характеристика эпохи.....	22	
§ 2. Приобретение практических математических знаний и выделение первичных математических понятий.....	24	
§ 3. Выделение некоторых единиц измерения длины.....	33	
§ 4. Зачатки астрономии	34	
 <i>ВЫВОДЫ к I ЭТАПУ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ</i>		34
 <i>II ЭТАП РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ:</i>		
ВЫДЕЛЕНИЕ В ПРОЦЕССЕ ТРУДОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА КОНКРЕТНЫХ ТИПОВЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И СОЗДАНИЕ ПРАВИЛ ИХ РЕШЕНИЯ В ПЕРИОД РАННИХ РАБОВЛАДЕЛЬЧЕСКИХ ДЕСПОТИЧЕСКИХ ГОСУДАРСТВ (Египет, Вавилон, Китай, Индия)		36
§ 1. Общая характеристика эпохи ранних рабовладельческих государств	36	
1. Где и почему возникли ранние рабовладельческие государства?.....	36	
2. Характеристика развития культуры и науки в ранних рабовладельческих государствах.....	37	
3. Прикладная направленность развития математики в ранних рабовладельческих государствах.....	38	

§ 2. Математика Древнего Египта	38
1. Египет – страна древней развитой культуры	38
2. Арифметические вычисления у египтян	46
3. Зарождение элементов алгебраического метода при решении прикладных задач	49
4. Геометрия египтян	56
5. О метрологии в Древнем Египте	67
<i>ВЫВОДЫ</i> к § 2 – о математике Древнего Египта	68
<i>КОММЕНТАРИИ</i>	68
§ 3. Математика Древнего Вавилона	70
1. Общая характеристика Вавилонского государства	70
2. Система записи чисел у вавилонян	75
3. Арифметические действия	78
4. Система мер Вавилона	83
5. Алгебра вавилонян	85
6. Геометрия вавилонян	102
<i>ВЫВОДЫ</i> к § 3 – о математике Древнего Вавилона	112
<i>КОММЕНТАРИИ</i>	114
§ 4. Математика Древнего Китая	116
1. Общая характеристика Китая – страны древней высокой культуры	116
2. Система счисления в китайской математике. Счётный прибор «суан-пан»	119
3. Развитие понятия числа в математике Китая	120
4. Алгебраические методы, применяемые в древнекитайской математике	121
5. Прогрессии	129
6. Треугольник Паскаля	129
7. Геометрия в Древнем Китае	130
<i>ВЫВОДЫ</i> к § 4 – о математике Древнего Китая	134
<i>КОММЕНТАРИИ</i>	134
§ 5. Математика Древней Индии	136
1. Общая характеристика Индии – страны древней самобытной культуры	136
2. Система счисления в индийской математике	138
3. Арифметические действия. Развитие понятия числа в индийской математике	141
4. Некоторые методы решения арифметических задач	146
5. Алгебра индийцев	152
6. Геометрия индийцев	157
7. Тригонометрия индийцев	168
<i>ВЫВОДЫ</i> к § 5 – о математике Древней Индии	168
<i>КОММЕНТАРИИ</i>	169
<i>ВЫВОДЫ ко II ЭТАПУ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ</i>	171

III ЭТАП РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ:

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ (VII в. до н.э. – V в. н.э.)175

ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭПОХИ175

§ 1. Исторические и социально-экономические условия в Древней Греции	175
§ 2. Исторические и социально-экономические условия в Древнем Риме	178
§ 3. Развитие культуры и науки в античном мире	181
§ 4. Факторы, содействовавшие становлению теоретической математики в античном мире	197

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ198

§ 1. Милетская математическая школа – школа Фалеса	198
<i>ВЫВОДЫ</i> к § 1 – о школе Фалеса	200
§ 2. Пифагорейская математическая школа: дальнейшее развитие теоретической математики.....	201
1. О Пифагоре и Пифагорейской школе.....	201
2. Развитие теоретической арифметики.....	203
3. Возникла идея существования несоизмеримых отрезков и иррациональных чисел.....	205
4. Развитие геометрии.....	205
5. «Золотое сечение».....	210
6. Развитие астрономии.....	214
7. Дальнейшая судьба школы Пифагора.....	215
<i>ВЫВОДЫ</i> к § 2 – о Пифагорейской школе.....	216
§ 3. Афинская математическая школа – школа Платона и Аристотеля	216
1. Афинская школа философов	217
2. Геометрическая алгебра греков.....	225
3. Три знаменитые проблемы древности	230
4. Работы Тезетета и Евдокса.....	237
§ 4. Александрийская математическая школа	243
I. Математическое творчество Евклида	243
1. Биографические сведения о Евклиде	243
2. Какие цели ставил Евклид, создавая свой главный труд – «Начала»?	244
3. Краткое содержание книг I–XIII «Начал» Евклида	245
4. Особенности содержания «Начал» Евклида	256
5. Личный вклад Евклида в развитие математики.....	257
6. Евклид – выдающийся педагог.....	257
7. Значение работ Евклида для дальнейшего развития науки.....	258
<i>ВЫВОДЫ</i> – о творчестве Евклида	258
<i>КОММЕНТАРИИ</i>	259

II. Математическое творчество Архимеда	260
1. Биографические сведения об Архимеде.....	260
2. Обзор научных работ Архимеда.....	263
1-я группа работ Архимеда – по элементарной математике	264
(«Псаммит», «Измерение круга», «О шаре и цилиндре», «Книга лемм Архимеда» и др.).....	264-278
2-я группа работ Архимеда – о методах, применяемых Архимедом для нахождения площадей и объёмов криволинейных фигур	278
А. Метод суммирования рядов («Квадратура параболы»).....	279
Б. Интеграционный метод («О коноидах и сфероидах»).....	284
В. Метод механического интегрирования («Эфод»).....	292
3-я группа работ Архимеда – работы по теоретической физике и астрономии	299
А. Работы по теоретической физике («О равновесии плоских фигур», «О плавающих телах»).....	299-300
Б. Вклад Архимеда в развитие астрономии.....	301
В. Архимед – механик-практик.....	301
3. Значение работ Архимеда для дальнейшего развития науки.....	301
ВЫВОДЫ – о творчестве Архимеда	303
КОММЕНТАРИИ	303
III. Математическое творчество Аполлония	307
1. Изучение конических сечений продолжается!	307
2. Биографические сведения об Аполлонии	307
3. Обзор работы Аполлония «Конические сечения».....	307
4. О других работах Аполлония	313
5. О названиях кривых, являющихся коническими сечениями	313
6. Значение работ Аполлония для дальнейшего развития науки	317
ВЫВОДЫ – о творчестве Аполлония	318
IV. Математическое творчество Менелая	319
V. Математическое творчество Герона Александрийского	321
ВЫВОДЫ – о творчестве Герона	323
VI. Математическое творчество Диофанта	324
1. Назрела необходимость создания новой алгебры	324
2. Биографические сведения о Диофанте.....	325
3. Общая характеристика «Арифметики» Диофанта.....	325
4. Вклад Диофанта в построение новой алгебры.....	326
5. Диофант и решение неопределённых уравнений («Диофантов анализ»).....	328
6. Основные методы решения уравнений, введённые Диофантом.....	331
7. Некоторые фрагменты из книг I-VI «Арифметики» Диофанта.....	332
8. Важные факты из теории чисел, использованные Диофантом в «Арифметике».....	345
9. О других сочинениях Диофанта	347
10. Влияние работ Диофанта на дальнейшее развитие математики	347
11. Труды Диофанта – первооснова работ П. Ферма по теории чисел	348

ВЫВОДЫ – о творчестве Диофанта.....	349
КОММЕНТАРИИ	349
ГЛАВА 3. К ИСТОРИИ СОЗДАНИЯ И РАЗВИТИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ	352
§ 1. Некоторые сведения по тригонометрии, имевшиеся до работ К. Птолемея	353
§ 2. Математическое творчество К. Птолемея и его вклад в создание тригонометрии.....	355
1. Биографические сведения о К. Птолемея (II в. н.э.).....	355
2. Обзор сочинения К. Птолемея «Альмагест».....	356
3. Некоторые иные научные изыскания К. Птолемея.....	366
ВЫВОДЫ - о творчестве К. Птолемея... ..	366
§ 3. Дальнейшее развитие тригонометрии после работ К. Птолемея	367
1. Уточнения таблицы хорд Птолемея.....	367
2. Дополнения к Птолемею, сделанные в V–XII вв. в Индии.....	367
3. Развитие тригонометрии в IX–XV вв. в странах ислама.....	368
4. Развитие тригонометрии в европейских странах	369
§ 4. Дополнительные сведения о происхождении некоторых теорем, терминов, формул тригонометрии	370
ВЫВОДЫ к ГЛАВЕ 3.....	372
ГЛАВА 4. ЗАВЕРШАЮЩАЯ ФАЗА III ЭТАПА РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ – МАТЕМАТИКИ АНТИЧНОГО МИРА	373
§ 1. Основные периоды развития античной математики.....	373
1. Первые математические школы и их роль в создании основ теоретической математики и её методологии.....	373
2. Александрийский семивековый период (с IV в. до н.э. по III в. н.э.). Значение творчества Архимеда	374
3. Особенности Римского периода античной науки (I в. до н.э.-VI в. н.э.)	375
4. Замедление темпов развития математики в период со II в. до н.э. по II в. н.э.	375
5. Некоторый подъём в развитии математики в эпоху Диофанта (III в.). Попытки создания буквенной символики. Решение неопределённых уравнений.....	375
6. Математика после Диофанта. Творчество Паппа Александрийского.....	376
§ 2. Упадок античной математики IV–V вв. н.э. – периода борьбы христианства и язычества	377
§ 3. Ослабление общественного интереса к науке в V – VI веках. Закат античной математики.....	379
ВЫВОДЫ К III ЭТАПУ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ	380
КОММЕНТАРИИ	383
ПРИЛОЖЕНИЯ	
I. Исторические задачи к темам школьного курса математики	384
II. Словарь некоторых математических терминов	386
III. Список использованной литературы.....	391

I ЭТАП РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ:

НАКОПЛЕНИЕ В ПРОЦЕССЕ ТРУДОВОЙ ПРАКТИКИ ЧЕЛОВЕКА
ФАКТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА
И ВЫДЕЛЕНИЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ
В ПЕРИОД ПЕРВОБЫТНООБЩИННОГО СТРОЯ
(≈ 700 (500 ?) тыс. л. до н.э. – ≈ 7 тыс. л. до н.э.)

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЭПОХИ



1. Выделение человека из животного мира

На основе данных палеонтологии, геологии и других наук учёные предполагают, что в результате эволюции 500–700 тысяч лет назад из наиболее развитых представителей животного мира выделился *первобытный человек*. (Ф.П. Коровкин – автор учебника истории древнего мира для 5 кл. – полагает: человек появился более 2 млн лет назад). Люди объединялись в общины, чтобы сообща было легче преодолевать жизненные трудности, добывать пищу, защищаться от хищников и ударов стихии.

Первоначально человеческие общины образовались в тёплом поясе Земли (Африка, Южная Америка, Австралия), где много растительной пищи, птиц, рыбы и мелкой дичи, где не надо особо заботиться об одежде и жилье.

2. Экономика, быт, орудия труда, ремёсла. Развитие речи

Выделяют два периода развития первобытного человеческого общества: **палеолит** (древний каменный век) и **неолит** (новый каменный век). Сопоставим некоторые характеристики этих периодов.

Палеолит (≈ 15 тыс. лет тому назад)	Неолит (≈ 10 тыс. лет тому назад)
1) Экономика	
<i>Собирание</i> пищи, охота на мелкого зверя, рыболовство, т.е. используется то, что дано природой. Всё собранное или добытое тотчас шло в пищу, запасы не делались.	<i>Земледелие, скотоводство</i> , т.е. не всё, что поймали, сразу съедается. Образуется аккумулятор питания. От простого собирания пищи человек переходит к активному её производству. Приручаются животные (стада овец, собака – для охраны, вол, осёл, лошадь, верблюд – тягловая сила). Избыток продукции ведёт к обмену, к торговле.
Вывод. Переход от охоты к земледелию – фундаментальный перелом, переворот: от пассивного отношения человека к природе – к активному отношению. Развитие обмена товарами способствует общению людей, к необходимости считать, измерять, взвешивать.	
Происходит некоторое разделение труда. Появляются люди, непосредственно не занимающиеся добычей пищи (строители, ремесленники, «деятели культуры»), шаманы – психологи, лекари, прорицатели).	

2) Образ жизни

<i>Кочевой</i> – поиски новых мест добычи пищи. Период <i>матриархата</i> .	<i>Оседлый</i> – что связано с развитием земледелия и скотоводства, с необходимостью строительства жилья, объединения в общины и племена.
Вывод. Переход от кочевого образа жизни к оседлому явился стимулом к образованию общинного хозяйства, коллективной охоте и защите от набегов других племён.	
Возрастает роль мужчины (охотника, строителя, защитника очага, ремесленника). Это привело к движению от матриархата к патриархату. Постепенно происходит расслоение общины, выделяются вожди племени. Появляются богатые и бедные – процесс расслоения общества.	

3) Орудия труда

<i>Палка, камень</i> – т.е. то, что находится рядом с человеком, «под рукой».	<i>Каменные топор и нож, гончарный круг, тележное колесо, долото, лук и стрелы, рыболовные снасти, лодка и весло.</i>
Вывод. Человек научился сам создавать то, что облегчает его труд и увеличивает производительность труда.	

4) Развитие ремёсел

<i>Примитивные украшения.</i>	<i>Гончарное, ткацкое, плотничье дело. Использование огня для изготовления металлических орудий труда.</i>
Вывод. Появилась возможность существенно улучшить условия жизни.	

5) Быт

<i>Жили в лесах, пещерах, естественных укрытиях. Из глины лепили непрочную посуду.</i>	<i>Строятся более надёжные жилища. Использование огня. Сначала человек познакомился с естественным, природным огнём: молнией, лесными пожарами. Затем научился сам добывать и поддерживать огонь.</i>
Вывод. Использование огня позволило: а) применять горячую пищу, что способствовало развитию организма человека, увеличению продолжительности жизни; б) изготавливать металлические орудия труда, охоты и защиты; в) обжигать глиняные заготовки для более прочной, водостойчивой посуды; г) искусственно поддерживать тепло в жилище, что позволило расселяться в более прохладных участках суши; д) лучиной освещать жилище; е) использовать дым костров как средство связи племён.	

6) Развитие речи, языка

<i>Примитивное использование жестикюляции, подражание звукам животных.</i>	<i>Существенное развитие языка как средства общения и совместной деятельности людей.</i>
--	--

(Обратите внимание на то, как ребёнок, ещё не умеющий говорить, общается с родителями, с окружающей средой!)

Вывод. Развитие языка также связано с совместной деятельностью людей. Сначала слова выражают конкретные вещи и предметы. Ежедневный опыт людей отражается в словосочетаниях: «удачно – неудачно», «больше – меньше», «столько же», «широкое – узкое», «спереди – сзади», «внизу – вверх», «слева – справа», «целый – нецелый», «половина» и т.д.

3. Развитие культурной среды (живопись, музыка, прикладное искусство)

Чтобы выжить, чтобы успешно выращивать растения, охотиться на зверя, ухаживать за домашними животными, сосуществовать с силами природы, надо познавать мир, в котором ты живёшь. Необходимо не только наблюдать окружающий мир, сопоставлять события, запоминать, сравнивать, но и научиться как-то *фиксировать* увиденное, познанное. Достижению этой цели способствует развитие культуры.

3.1. Живопись

Наблюдая за повадками зверя, находящегося на воле и во время охоты, человек с помощью наскальных рисунков стал запечатлеть, зафиксировать свои открытия о животных, чтобы передать свои знания потомкам.

3.2. Музыка

а) Успешной совместной деятельности нескольких человек способствуют одновременные усилия, ритм («Эй, ухнем!»). Отсюда – использование барабанов, тамтамов, других музыкальных инструментов, а также – ритуальные танцы.

б) В музее Самарканда (Узбекистан) хранится флейта, выточенная из цельной кости животного. Её возраст, как считают специалисты, по меньшей мере 5000 лет.

в) Представьте себя на месте древнего охотника, который выстрелил из лука в дикого кабана. И если вас поразил не факт попадания в цель, а звук, изданный натянутой тетивой лука, то вы – этот древний охотник – и были первым в мире музыкантом, игравшем на струнном инструменте! А уж потом появятся «потомки» лука – арфы, лиры, скрипки ...

3.3. **Прикладное искусство:** изготовление ожерелий, колец, статуэток, татуировки, оформление различными орнаментами ваз, посуды, оружия, одежды.

§ 2. ПРИОБРЕТЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ И ВЫДЕЛЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

А. Во времена палеолита

В тяжёлой борьбе за существование, стоя на весьма низкой ступени развития, первобытный человек путём целого ряда проб и ошибок, смутно им постигаемых, в длительном процессе приспособления к окружающей действительности постепенно приобретал некоторый *опыт*, бессознательно извлекая его из наблюдений над различными силами природы. Охраняя свою жизнь, он вступал с ними в борьбу. Природа же доставляла ему пропитание. Звериная шкура была его первой

одеждой. Пещера или яма, вырытая в земле, были его первым жилищем. Заслон от ветра, сплетённый из древесных ветвей, – был его первой постройкой.

Заботы о поддержании своего существования являются источником первых, весьма ограниченных, знаний человека.

В процессе трудовой деятельности и общения человека с природой выделяют-ся *понятия* «много – мало», «больше – меньше», «столько же», а также – чувство формы. Пока ещё нет потребности в умении считать: то, что собрал, – тут же съел, а далее – всё повторится!

Б. Во времена неолита

В период нового каменного века, исчисляемого сотнями тысяч лет, человек постепенно приспосабливается к окружающей среде, познаёт её и постепенно подчиняет себе. Избыток продуктов и изготовленных предметов приводит к возможности обмена товарами. А это требует умения *сопоставлять, измерять, считать*. Как же древний человек считал?

1. Период чувственного счёта

Известно: собака чувствует, что у неё отняли щенка; птица чувствует, что из гнезда выпал птенец. Человек чувствует, что из пасущегося стада не вернулась овца. Путешественник Добрингофер отмечает: *«Я часто удивлялся, каким образом, не умея считать, они (люди. – А.Х.) способны были сказать, что среди такой значительной своры собак не хватает одной и принимаются звать её»* [1, с. 29].

2. Первоначальный этап овладения счётом

Вначале люди не имели понятия о числе. Но в практике человека постоянно возникала необходимость иметь дело с совокупностями (множествами) предметов, вещей, животных и сопоставлять, сравнивать их численность.

Как было сказано выше, на начальной стадии развития человек оперировал лишь **качественными** понятиями («много – мало», «больше – меньше», «столько же»). Затем используются начальные, простейшие **количественные** единицы счёта: горсть, охапка, копка, куча.

Разумеется, ещё не было отвлечённого понятия «твёрдость», однако можно было сказать: «как камень». Аналогично этому, хотя отвлечённого понятия числа «пять» ещё не было, о численности группы из пяти предметов человек говорил: *«столько же, сколько пальцев на руке»*. Ребёнок, не умеющий считать, сопоставляя пальцы рук, может установить, что у него на обеих руках **одинаковое** количество пальцев.

3. Выделение множеств-эталонов

В результате длительного периода развития человек пришёл к пониманию того, что множества «лун на небе», «носов у человека», «хвостов у собаки» можно охарактеризовать с помощью обобщающего понятия – отвлечённого слова *«один»*. (Кстати, некоторые лингвисты полагают, что происхождение русского слова «один» связано со словом «луна»: *lunus – unis – инок – одинокий – один*).

Аналогично, совокупности «глаза человека», «уши человека», «рога коровы», «крылья птицы», «лапы петуха» – имеют некоторую общую характеристику, ко-

торую можно выразить с помощью отвлечённого понятия – слова «два». (Кстати, русское слово «два» созвучно слову «дверь»: разделение, раздвоение некоего пространства на две части – внутреннюю и внешнюю).

(Русское слово «девять» созвучно слову «девица», отсюда – «девичий палец», на котором носится кольцо).

4. Использование взаимно однозначного соответствия

Для количественного сравнения совокупностей предметов вовсе не обязательно уметь их считать. Достаточно расположить предметы двух совокупностей, по одному из каждой совокупности, рядом друг с другом, и убедиться в том, что каждому предмету одной совокупности соответствует предмет другой совокупности. А это означает, что предметов в этих совокупностях либо имеется поровну, либо – в одной их больше, чем в другой. Таким образом, человек, возможно, сам не осознавая того, на столь ранней стадии своего развития, интуитивно использует важнейшее математическое понятие – *взаимно однозначного соответствия*!

Если у сегодняшнего солдата оторвалась на шинели пуговица, то его накажут за ...нарушение взаимно однозначного соответствия между множеством пуговиц (независимо от их общего количества) и множеством петель!

Идея взаимно однозначного соответствия широко использовалась при обмене товарами. При этом против одного предмета первой совокупности товара могли выставяться несколько (но одно и то же количество) предметов другой совокупности товаров (в зависимости от их ценности).

Прочитаем отрывок из «Илиады» Гомера:

*Третьи призы Ахиллес после этого вынес, данайцам
Их показавши, – призы за борьбу, сопряжённую с мукой.
Первый приз – треножник большой для огня. Тот треножник
Между собою ахейцы в двенадцать быков оценили.
Для побеждённого мужа он женщину вывел, в работах
Многих искусную; эту в четыре быка оценили.*

Как видим, здесь 1 медный треножник = 12 волам = 3 рабыням! [19, с. 15].

Ещё пример. Дж. Морган описывает процедуру обмена запасами угрей и кореньев между двумя племенами. Двое мужчин с каждой стороны приносили угрей и коренья на длинных кусках коры. Затем они переносили их на голове с одной стороны на другую, пока всё количество не было обменено [19, с. 15].

Таким образом, во время обмена первоначально не считали количество элементов обмениваемых множеств, а чувственно-наглядно устанавливали *взаимно однозначное соответствие* этих элементов (например, угрей и кореньев).

Разумеется, потребовалось длительное развитие математики, чтобы это понятие – *исторически* – одно из первичных – в наше время было положено в *логическую* основу математики!

Итак, люди сначала имели дело **не с числами, а с множествами** предметов. **Каждое число есть общее свойство множеств**, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие.

5. Дальнейший процесс образования слов-числительных

Следует отметить, что первоначально у многих племён использовались только понятия «один» и «два» или «один», «два» и «три». Бóльшее количество предметов обозначалось словом «много».

Для расширения числового множества использовали простое повторение уже имеющихся низших числительных. Например, у австралийских племён использовались слова: 1 – гуна, 2 – баркула, 3 – баркула-гуна, 4 – баркула-баркула.

У древних славян, например, сначала использовались слова «один», «два» и «много». Позднее – «один», «два», «куча», «тьма» («тьма» – первоначально – тысяча, затем – десять тысяч). Появляются высшие счётные единицы (*числа великие словенские*): «*тьма*» (но уже не десять тысяч, а тысяча тысяч – современный термин – миллион, т.е. 10^6), далее – *легион* (тьма тём, т.е. миллион миллионов – 10^{12}), *леодр* (легион легионов – 10^{24}), *ворон* (леодр леодров – 10^{48}) и, наконец, *колода* – 10^{49} . «**И боле сего несть человеческому уму разумети**», – говорит автор древней славянской рукописи [10, с. 18].

6. Пальцево-ручная арифметика

В процессе счёта многие народы использовали **пальцевую арифметику** – пальцы рук и ног. Вот как описывает этот способ счёта у жителей Новой Гвинеи известный путешественник **Н.Н. Миклухо-Маклай** (1849–1888):

«Папуас загибает один за другим пальцы руки, причём издаёт определённый звук, например «бе, бе, бе...». Досчитав до пяти, он говорит «ибон–бе» (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет «бе, бе, ...», пока не доходит до «ибон-али» (две руки). Затем он идёт дальше, приговаривая «бе, бе, бе...», пока не доходит до «самба-бе» и «самба-али» (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого» [19, с. 17].

Названия некоторых числительных в ряде языков сходно со словами «рука» или «нога». Так, русское «пять» сходно со словом «пясть» (по-старославянски – кулак). У индусов слово «два» созвучно со словом «глаз». У жителей острова Ява слово «пясть» означает «рука». Малайское слово «лима» означает и «рука», и «пясть». Мы часто употребляем слово «пядь» – расстояние между раздвинутыми большим и указательным пальцами (малая пядь, ≈ 19 см) и расстояние между большим пальцем и мизинцем (большая пядь, ≈ 23 см). Термин «десять» (от «два – пять») естественно связан с количеством пальцев на двух руках.

Древние славяне при счёте первые десять предметов складывали в кучку (стопку), а с одиннадцатого – либо составляли новую кучку, либо одиннадцатый предмет клали на предыдущие десять. Отсюда выражение «один положил на десять», короче: «один на десять», откуда и образовалось «одиннадцать». Аналогично «два на десять» превратилось в «двенадцать». Если образовались две кучки по десять предметов, то скажут: «дважды десять», или «двадцать» [1, с. 29].

Применение при счёте пальцев рук и ног позднее привело к использованию систем счисления с основанием 5, а в дальнейшем – 10 – современной десятичной системе счисления. Э. Кольман в своей книге пишет, что **«ручной счёт сыграл столь же важную роль, как открытие огня в общем развитии первобытного**

человека» [19, с. 17].

Пальцевая арифметика служила (и служит!) для установления взаимно однозначного соответствия при счёте, при обмене предмета на предмет, позволяя фиксировать количество отсчитанных предметов. В дальнейшем с этой целью стали использовать камешки, зарубки, узелки.

7. Техника счёта на пальцах

Пальцевая арифметика применялась не только для счёта предметов, но и для выполнения некоторых арифметических действий, в частности, умножения. В качестве иллюстрации сказанного, приведём два случая умножения на пальцах.

7.1. Умножение чисел от 1 до 9 на 9

Задача № 1. Умножить число $a = 3$ на число 9.

Решение

- 1) Перенумеруйте пальцы обеих рук.
 - 2) Загните палец № 3 (данный множитель $a = 3$).
 - 3) Слева будет 2 незагнутых пальца – количество десятков искомого произведения
Справа будет 7 незагнутых пальцев – количество единиц искомого произведения.
- Ответ: $3 \times 9 = 27$.

Задача № 2. Умножить число $a = 7$ на число 9.

Решение

- 1) Перенумеруйте пальцы обеих рук.
 - 2) Загните палец № 7 (данный множитель $a = 7$).
 - 3) Слева 6 незагнутых пальцев – количество десятков искомого произведения.
Справа будет 3 незагнутых пальца – количество единиц искомого произведения.
- Ответ: $7 \times 9 = 63$.

7.2. Умножение числа a на число b , где $5 < a < 10$, $5 < b < 10$

Задача № 3. Умножить число $a = 6$ на число $b = 8$.

Решение

- 1) Найдём числа x и y , на которые данные числа a и b больше пяти:
 $x = a - 5 = 6 - 5 = 1$, $y = b - 5 = 8 - 5 = 3$.
 - 2) Вытянем на одной руке $x = 1$ палец; на другой руке $y = 3$ пальца.
 - 3) Количество невытянутых (загнутых) пальцев на одной руке $z = 5 - x = 5 - 1 = 4$.
Количество невытянутых (загнутых) пальцев на другой руке $t = 5 - y = 5 - 3 = 2$.
 - 4) Сложим числа x и y : $x + y = 1 + 3 = 4$ – количество десятков искомого произведения.
 - 5) Перемножим количество невытянутых пальцев z и t на каждой руке:
 $z \times t = 4 \times 2 = 8$ – количество единиц произведения.
- Ответ: $6 \times 8 = 48$.

Примечание. В общем виде имеем:

$$\begin{aligned} & [(a - 5) + (b - 5)] \times 10 + [5 - (a - 5)] \times [5 - (b - 5)] = \\ & = (a + b - 10) \times 10 + (10 - a) \times (10 - b) = \\ & = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab = ab. \end{aligned}$$

7.3. Умножение числа a на число b , где $10 < a < 20$, $10 < b < 20$ [9, с. 78].

Заметим, что пальцевый счёт, который постепенно исчезал после утверждения десятичной позиционной системы счисления, сохранялся в Европе до XVIII века.

8. Числовые суеверия

8.1. О числе 7

Первоначальной родиной всяких суеверий считается древний Вавилон. Вавилонские астрономы (они же – астрологи) наблюдали движения семи известных им небесных тел (Солнца, Луны, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна) и по ним предсказывали будущее. Возможно, отсюда получило начало приписывания особой роли числу семь.

Известно, что француз даёт самую сильную клятву словами: «крепко, как семь». У греков – семь чудес мира, семь мудрецов. У реки Нил семь рукавов. Счастливиый чувствует себя на седьмом небе (т.е. бесконечно счастливым).

Такое же происхождение и тот же смысл имеют русские пословицы и поговорки с числом семь: «У семи нянек дитя без глазу», «Семь раз отмерь, один раз отрежь», «За семь вёрст киселя хлебать», «Семеро одного не ждут». В них число семь означает «много», когда-то, вероятно, «бесконечно много». Про непонятное мы и теперь говорим, что истина – «за семью печатями».

8.2. О числе 13

Представление о числе 13 как приносящем несчастья, могло возникнуть в связи с тем, что, освоив числовой ряд до двенадцати («дюжины»), человек считал число 12 последним числом, символом полноты. А следующее за ним число 13 – «чёртова дюжина» – являлось лишним, потому «нечестивым» и приносящим несчастье.

В Париже существовали конторы для доставления «четырёхнадцатого», если где-нибудь на обеде число собравшихся оказалось «чёртовой дюжиной».

В некоторых американских высотных домах нет тринадцатого этажа и в гостиницах нет тринадцатого номера, так как население боится этих номеров.

В Англии за катафалком покойника должно следовать именно тринадцать карет.

Однако отметим следующее любопытное обстоятельство. Ни в Византии, ни на Западе не встречается храмов с тринадцатью куполами. А в древней Руси, напротив, это не только допускалось, но сделалось характерным канонem. Первый Софийский собор в Новгороде (989 г.) был дубовый с тринадцатью куполами. Такой же храм вскоре появился в Полоцке (XI век). Киевская София (XI век) – уже каменная, также тринадцатиглавая.

8.3. О числе 40

Это число у русских считалось «судьбинным». Так, полагали, что для охотников сороковой медведь – «судьбинный», но редко какой охотник уйдёт от сорок первого:

*Сорок медведей поддел на рогатину,
На сорок первом сплошал!* (Н.А. Некрасов)

Полная охота у русских вельмож состояла из сорока псарей, сорока егерей, со-

рока гусаров, из сорока гончих, сорока борзых собак и так далее – всего по сорок, как это видно из описания охот вельмож Шереметьева и Орлова [13, с. 24].

Заметим, что выражение «сорок сороков» употребляется в смысле очень большого числа. Название насекомого «сороконожка» означает лишь то, что у него много ножек!

Корень слова «сорок» или «сорочок» тот же, что в слове «сорочка» (рубаша). Это, возможно, связано с тем, что на изготовление полной шубы шло сорок штук соболей. Известно, что собольи шубы играли роль единицы ценности [13, с. 41].

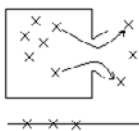
9. Фиксирование результатов счёта

С развитием хозяйства, возможностью делать запасы, с ростом обмена товарами приходилось не только измерять и считать, но и запоминать, фиксировать сосчитанные количества. С этой целью стали применять зарубки на деревьях, на палке, на кости, а также – узелки на шнуре [30, с. 15]. Вот несколько примеров использования старинных способов фиксации результатов счёта.

1) В Чехословакии была найдена лучевая кость волка длиной 18 см с 55 зарубками. Первые 25 из них сгруппированы по 5 штук. Этот древний документ является прообразом бирок, применявшихся многими охотничьими племенами [19, с. 24].

Интересно заметить, что латинское слово *calcularе* (по-русски – считать) – происходит от слова *calculus* (кальций) – камешек. Это напоминает нам о древнем способе счёта на камешках. Слово «число» – от латинского *cisелare* – означает «чеканить», т.е. делать зарубки.

2) Путешественник из Флоренции Америго Веспуччи (≈ 1454–1512) во время пребывания в Перу обнаружил пещеру, в которой хранились цветные шнуры с узлами. В государстве инков были коллекции шнуров, соответствующие современным бухгалтерским записям. Красный шнур служил для счёта воинов, белый – для счёта серебра, зелёный – зерна [19, с. 27].



3) Древний человек, державший в загоне стадо овец, утром выгонял животных на пастбище. Выпуская очередную овцу, он на верёвке завязывал один узелок. Вечером, когда пастух пригонял овец домой, хозяин, запуская овцу в загон, развязывал один узелок. Если узел оставался неразвязанным, – хозяин бежал на пастбище – искать заблудившуюся овцу.

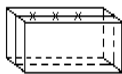
4) Вожди трёх племён договорились совместными усилиями прогнать с плодородной земли расположившееся на ней соседнее могущественное племя. Вожди понимают, что успех операции зависит от того, насколько удастся им *одновременно* выступить в поход. Сидя рядом под деревом, три вождя – каждый на своей верёвке завязывает одинаковое количество узлов. После этого они расходятся каждый к своему племени. Наутро, когда взошло Солнце, каждый вождь развязывает один узелок, произнося при этом ритуальное слово «клянусь!»

На следующее утро, глядя на восходящее Солнце и произнося слово «клянусь!», вожди снова развязывают ещё по одному узлу. И так – каждое утро, пока не останется на их верёвках ровно по одному узлу. Это будет означать, что завтра,

когда взойдёт Солнце, надо идти в поход. Воины трёх племён, выступившие *одно- временно*, успешно прогнали вражье племя и захватили новую богатую землю. При этом вожди будут благодарить богов за оказанную помощь. А надо бы низко кланяться идее взаимно однозначного соответствия, которая привела их к победе!

5) Однажды по телевизору была показана реклама, в которой каждый из воинов Тамерлана, отправляясь на поле брани с врагами, положил в общую гору камней свой один камень. Возвращаясь после битвы и проходя мимо образовавшейся горы камней, воин уносил с собой один камень. После этого на месте прежней горы осталось некоторое количество камней: не все воины вернулись с поля боя. Тамерлан, глядя на оставшиеся камни, долго горевал по воинам, погибшим в бою!

- 6) Деревянные бирки с зарубками служили «долговыми расписками». Один человек весной берёт в долг у другого несколько мешков семян для посева на своём участке. Получение каждого мешка сопровождалось тем, что хозяин делал одну зарубку на деревянной дощечке (бирке).



Затем бирку разрезали на две части: одну забирал «покупатель», другая оставалась у «продавца».

Осенью, когда убран урожай, должник возвращает мешки с зерном. При этом половинки бирок соединяются, и становится ясно, сколько мешков должны быть возвращены хозяину.

10. «Словесная алгебра»

Параллельно с развитием счёта возникают зачатки *словесной алгебры*. Некоторые её понятия неосознанно создаются народом в виде отдельных слов и терминов.

Во фразе из сказки «*В некотором царстве, в некотором государстве в давние времена жил царь Горох*» использованы неопределённые, неконкретные понятия. Не правда ли, здесь слово «*некоторое*» напоминает современное понятие о неизвестной, абстрактной величине x (икс)? Так и хочется приведённую выше фразу записать в более близкой нам современной форме: «*В x (иксовом) царстве, в y (игрековом) государстве, в t (тэ-тое) время жил царь Z* ».

Если мы произносим слово «дом», то это – общее, *абстрактное* понятие, соответствующее *неизвестной* величине x (здесь больше алгебры).

Если же мы говорим: «этот дом» (или «мой дом» или «дом № 7»), то это соответствует *конкретному*, вполне *определённому* числу a (или b , или c) – здесь ощущается больше арифметики. Итак:

«Дом» – абстракция, а «дом с мезонином», «этот дом», «дом № 5» – конкретика.			
x	a	b	c

Древний человек научился отличать частное, единичное от общего, абстрактного – почти алгебра!

Разумеется, древнему человеку, ох, как далеко было до алгебры! Но он в словесной форме пытался передать различие между *частным*, *единичным* и *общим*, *абстрактным*. В этом его заслуга: он делает лишь первые шаги к будущей науке – алгебре!

11. Выделение простейших геометрических понятий в процессе трудовой практики древнего человека

Профессор И.К. Андронов писал: «Созидание орудий заставило усматривать формы тел, из них отбирать и создавать такие, которые удовлетворяют наилучшим образом практически поставленным целям» [1, с. 25].

Выделим некоторые процессы.

11.1. Изготовление посуды



Этот процесс, использующий гончарный круг, приводит к понятиям *тела вращения, оси симметрии и объёма* сосуда. Человек естественным образом приходит к понятиям вместимости сосудов, т.е. к сравнению их объёмов, к зависимости объёма от размеров и формы тела вращения.

11.2. Оборудование каменной пещеры под жилище



Чтобы обезопасить себя от нежелательного посещения зверя, нужно закрыть вход в пещеру большим камнем. Но при этом вверху всё же остаётся проём, в который может влететь хищная птица. Чтобы этого избежать, человек старается из каменной глыбы вырубить такую её часть, форма которой как можно более соответствует форме входа в пещеру. Так человек постигает понятие *равенства фигур*.

Вырезая зубья пилы, человек старается сделать *равные зубья* – тогда пилить легче!

11.3. Изготовление орудий труда



Каменному топору придаётся форма *клина*. В нём делается *круглое* отверстие в форме *цилиндра* – для деревянной ручки. Заметим, что слово «*клин*» созвучно выражению: «свести к *линии*». А процесс обработки камня – «заточка» – соответствует слову «точить», откуда – современное геометрическое понятие «*точка*». Кстати, латинское слово *linum* означает «льняная нить»; оно созвучно с русским словом «*линия*». Прямая линия ассоциируется с туго натянутой нитью. Слово *κυλινδρος* – *греч.*) (*kylin-dros* – *лат.*) означает «вал», «каток», «вращение». Чтобы проделать цилиндрическое отверстие, нужно долго и упорно вращать что-то твёрдое, прочное.

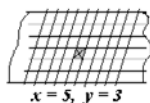
11.4. Изготовление одежды и обуви



Занимаясь этим промыслом, древний портной и обувщик приобщается к понятиям *формы, размера, равенства* фигур.

Игла и нить – разве не напоминают нам о геометрических терминах – *точке и линии*?!

11.5. Вышивка и вязание, ткачество



$x = 5, y = 3$

Издrevле люди украшали свой быт, занимаясь вышивкой и вязанием. В процессе вышивки конкретного рисунка нужно было сделать в таком-то ряду столько-то крестиков определённого цвета (например, в *третьем* ряду *пятая* клетка должна быть зелёной). Но ведь это – идея *системы координат*! Здесь же современный «адрес» клетки ($x = 5, y = 3$)!

В процессе изготовления ткани человек «общается» с различными *геометрическими фигурами*, (в том числе и с *равными*), с *симметричными* узорами и т.п.

11.6. Использование орнаментов

Чувство геометрической формы особенно развивалось при изготовлении и росписи (с применением орнаментов) глиняных сосудов, корзин, тканей, одежды, оружия, ковров, мозаики. Первоначально орнаменты, возможно, имели магическое значение, но позднее они обрели чисто эстетическое назначение.

Зачастую орнаменты представляли собою не что иное, как воспроизведение рисунков кожи различных животных, чешуи змей, панциря черепах...

Выполняя тот или иной орнамент, человек выделяет различные геометрические фигуры (квадраты, треугольники, круги, ромбы, спирали, полумесяцы и т.п.). Постигаются понятия *равенства* и *подобия* фигур, *симметрии*, *параллельности*.

Таким образом, человек познавал некоторые изначальные понятия пока ещё весьма и весьма отдалённой от него науки – геометрии. Но ведь известно, что любая, сколь угодно длинная дорога, начинается с первого шага! И таковыми они были, эти первые робкие шагочки! Они обязательно приведут человека к современной науке!

§ 3. ВЫДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ

Практическая деятельность человека привела его к необходимости измерять длину. Первоначально единицы измерения естественным образом связывались либо с размерами частей человеческого тела, либо с тем, что окружало человека, что всегда было ему доступно. Разумеется, такие единицы измерения были слишком субъективны.

Для определения расстояний на поверхности Земли естественно применялся шаг. Однако эта мера была неудобна для больших расстояний. В этих случаях использовались другие, подчас весьма экзотические единицы. Вспомним некоторые из них.

1) У сибиряков была единица длины – *бўка* – расстояние, на котором уже нельзя видеть раздельно рога быка.

2) У германцев – *стрела* – расстояние, которое пролетает стрела, выпущенная из лука. Позднее появилось выражение «на расстоянии ружейного (пушечного) выстрела».

3) В Испании – *сигара* – расстояние, при прохождении которого, идя обычным шагом, человек успевал выкурить сигару.

4) В Японии – *лошадиный башимак* – расстояние, проходимое лошадью, пока износится привязываемая к её ногам соломенная подошва, заменяющая подкову.

5) В Риме – *миля* (от лат. *mille* – тысяча) – расстояние, равное тысяче двойных шагов.

6) В Египте (позднее и у других народов) – *локоть* – расстояние от конца пальцев руки до локтя.

7) На Руси – *маховая сажень* – расстояние между кончиками пальцев рук, вытянутых в противоположных направлениях ($\approx 2,1$ м).

8) У многих народов – *ладонь* – ширина кисти руки.

9) У многих народов – *дюйм* (от голландск. *duim* – сустав пальца) – длина сустава большого пальца ($\approx 2,54$ см).

10) У многих народов – *фут* (от англ. *foot* – ступня ноги) – длина ступни ноги

человека ($\approx 30,48$ см).

11) В Англии – *ярд* – расстояние от кончика носа короля Генриха I до конца среднего пальца вытянутой руки ($\approx 0,9144$ м).

12) В Вавилоне, позднее в Греции – *стадий* – расстояние, которое проходит человек за промежуток времени от появления первого луча восходящего Солнца до момента, когда весь солнечный диск окажется над горизонтом (≈ 190 м) [13, с. 259–273], [28, с. 13–14].

§ 4. ЗАЧАТКИ АСТРОНОМИИ

Развитие земледелия привело к первоначальным наблюдениям за движением Луны, Солнца и планет, ибо изменения в росте растений связывались с фазами Луны, с количеством восходов Солнца, с расположением планет. Эти наблюдения позволяли рассчитать начало разлива рек, периода дождей и других явлений, от которых зависит жизнедеятельность человека. Позднее научились по созвездиям ориентироваться при плавании в море, при движении караванов с товарами по пустыне.

Ежедневные наблюдения восхода и захода Солнца постепенно привели к понятиям *дня и ночи, суток* [30, с. 69]. Изменения фаз Луны стали основой для введения *лунного месяца*. Предпочтение отдавалось наблюдениям за Луной: это было связано с тем, что движения по пустыне из-за дневной жары в основном совершались ночью, при Луне.

Годом стали считать промежуток времени между двумя периодами разлива рек.

Вавилоняне изобрели *солнечные часы*. День они делили на двенадцать частей – 12 часов. Там же возникла семидневная *неделя* – по числу известных тогда семи небесных светил.

Давно было замечено, что в ночном небе звёзды образуют устойчивые фигуры – *созвездия*. В каждом из них отдельные звёзды не меняют своего положения относительно других звёзд. Однако в целом же – созвездия, Солнце, планеты – участвуют в суточном движении, как тогда считалось, вокруг Земли. Понадобилось очень много тысячелетий для того, чтобы установить истинную механику движения всех небесных тел – объектов Солнечной системы и всего мироздания. Тем не менее и до сих пор остаются неразгаданными многие загадки нашего звёздного дома.

ВЫВОДЫ к I ЭТАПУ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

1. В период первобытнообщинного строя, в ходе трудовой деятельности человека идёт процесс выделения **основных понятий математики**:

«множество», «много-мало», «больше-меньше», «число», «счёт», «форма», «объём», «фигура», «равенство», «точка», «линия», «прямая», «подобие», «симметрия», «взаимно однозначное соответствие», «единичное и общее», *идея координат*.

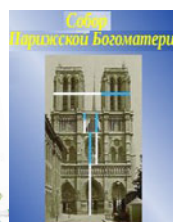
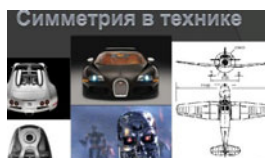
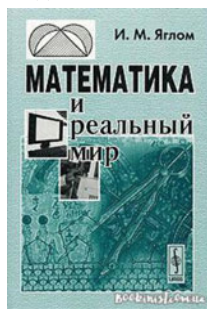
Появились зачатки счёта и измерений.

2. В книге [28] Г.Н. Попова читаем:

«Просветлённое сознание человека начинает работать интенсивней. Накопленные полезные знания приводятся в систему. Взаимные влияния народов, вступающих в сношения, содействуют дальнейшему расширению круга уже приобретённых знаний. Человек, трепетавший перед грозными явлениями природы, начинает относиться к ним более сознательно: он инстинктивно чувствует, что накопленные знания облегчают ему борьбу за существование. *Прежде – раб случайности – теперь он становится господином положения* (выделено мною. – А.Х.). Он шаг за шагом отвоевывает у природы её тайны, и каждая новая победа в этом направлении приближает его к познанию истины. Ещё полный суеверий и предрассудков, завещанных ему рядом предшествующих поколений, он закладывает фундамент того величественного синтеза упорядоченных знаний, которые мы в настоящее время именуем *наукой*» [28, с. 9].

3. В заключение ещё раз отметим мысль, высказанную известным голландским математиком и историком науки Д.Я. Стройком, который утверждал, что создаваемые математические понятия

«...могут иметь ценность ... лишь при условии, что они выражают какую-то зависимость, какую-то закономерность реального мира, мира чувственных восприятий, в котором человек живёт как существо общественное» [31, с. 8–9].



Математика – всегда и везде – с нами!

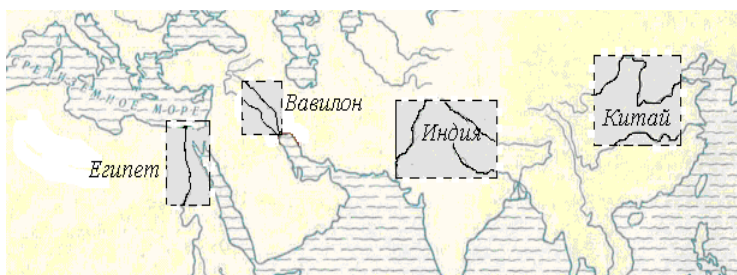
II ЭТАП РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ:

ВЫДЕЛЕНИЕ В ПРОЦЕССЕ ТРУДОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА
КОНКРЕТНЫХ ТИПОВЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
И СОЗДАНИЕ ПРАВИЛ ИХ РЕШЕНИЯ
В ПЕРИОД РАННИХ РАБОВЛАДЕЛЬЧЕСКИХ
ДЕСПОТИЧЕСКИХ ГОСУДАРСТВ
(Египет, Вавилон, Китай, Индия)
($\approx 5 (?)$ тыс. л. до н.э. – $\approx VII$ век до н.э.)

§ 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭПОХИ РАННИХ РАБОВЛАДЕЛЬЧЕСКИХ ГОСУДАРСТВ

1. Где и почему возникли ранние рабовладельческие государства?

1. В течение пятого, четвёртого, третьего тысячелетий до н.э. складывались новые, более совершенные формы общественного уклада. Человечество сделало шаг вперёд – первобытные общины постепенно объединялись для совместной жизнедеятельности. При этом происходило установление централизованного управления – **выделялись древние государства.**



Наиболее интенсивно этот процесс происходил вдоль великих рек Африки и Азии, в субтропическом поясе и вблизи него. В долине реки Нил образовался древний **Египет**, вдоль берегов Тигра и Евфрата возникает Месопотамия (**Вавилон**), на реках Инд и Ганг – **Индия**, а древний **Китай** – вдоль Янцзы и Хуанхэ.

2. Почему эти государства располагались именно вдоль рек? Прежде всего потому, что река – это вода, источник орошения, кладёзь пищи, наконец, транспорт – средство общения людей. Речной ил – прекрасное средство для удобрения земель. Поэтому в этих местах – плодородные земли, тёплый климат, что позволяет собирать до трёх урожаев в год.

Все названные выше государства были земледельческими. Однако площадь, пригодная для земледелия, была невелика – лишь в долинах рек. Её старались увеличить путём проведения каналов, строительства плотин, водохранилищ, дамб, осушения болот. Но всё это связано с организацией массовых общественных работ, проводившихся под руководством государственных чиновников и по указанию верховных правителей – царей.

3. С целью завоевания чужих плодородных земель часто происходили войны. При этом пленников не убивали, а обращали в рабов (для использования на тяжёлых строительных работах). Между прочим, целью набегов на соседние племена был и захват женщин, ибо было замечено, что при образовании межплеменных семейств потомки оказывались более здоровыми, сильными, выносливыми.

4. Интенсивное земледелие создавало сравнительно большие излишки продуктов, что повысило уровень жизни населения и способствовало расслоению общества. Уже стало необязательным каждому трудиться на земле, чтобы прокормить себя. Появились землевладельцы и арендаторы, выделились ремесленники, чиновники, жрецы, писцы, воины, крепостные и рабы. Местные вожди, обогащаясь, становились вполне самостоятельными царьками. Таким образом, образовались устойчивые общественные *классы*. А в результате раздоров и войн победители создавали обширные владения, управляемые единым монархом.

5. Зачастую жрецы были и государственными чиновниками – правителями областей. А для проведения строительных работ – строительства храмов, дворцов, складов, дамб, каналов, пирамид и т.д. – требовалось, с одной стороны, иметь огромные массы людей-строителей. А с другой – технически грамотных руководителей. Нужны были и специалисты-землемеры для выделения земельных наделов, межевания участков и определения величины налога.

2. Характеристика развития культуры и науки в ранних рабовладельческих государствах

1. Наука и техника в целом носили застойный характер, прогресс совершался медленно, так как **рабский труд был дешёвым**, и не было стимула для совершенствования орудий труда.

2. Цари менялись, чередовались периоды культурного подъёма, затем – застоя и упадка и снова – оживления, но в целом – уклад жизни столетиями и тысячелетиями практически не менялся. Крайне неторопливо развивалась и наука. Она была достоянием избранных, привилегированных классов. Хранителями заветов старины, знаний, умений и высшей мудрости предков являлись немногие посвящённые, в основном жрецы и писцы. Они – носители научных знаний – передавали их новым поколениям под большим секретом, ибо не были заинтересованы в широком распространении и развитии знаний.

3. Воля царя и жреца – непреложный закон. Их указания не обсуждаются: это – «истина в последней инстанции». «Не смей сомневаться!», «жрец сказал!» – не сомневайся, не задавай никаких вопросов, – таковы были правила игры. Отсюда – догматизм в науке, отсутствие каких-либо попыток обоснования тех или иных правил, рекомендаций, применявшихся иногда в течение тысячелетий. Поэтому современным исследователям бывает сложно датировать события, устанавливать время, когда были сделаны какие-то открытия, когда созданы дошедшие до нас письменные источники.

4. Дальнейшее развитие общества привело к возникновению письменности в виде иероглифов, клинописи и т.п. Писали на специально изготовленных папирусах, на глиняных табличках, на листьях пальмы, на коре, коже и – позднее в Китае (во II веке н.э.) – на бумаге. Стали возникать школы, постепенно развивались культура и искусство.

5. Развитие искусства тормозилось в силу существования неких канонов в сюжетах произведений, в изображении человека, в частности, царской особы, животного и растительного мира.

6. В науке (в том числе и математике) Египта, Вавилона, Индии и Китая – общие корни (общественное устройство), поэтому мы видим много общего, схожего. Подчас одинаково решаются некоторые задачи, хотя вряд ли можно предположить о наличии научных связей учёных этих древних государств.

7. Многие из добытых знаний погибли из-за несовершенства, недолговечности носителей письменности. Но иногда древние рукописи гибли не только от времени. Так, в 221 г. до н.э. китайский царь приказал уничтожить все научные книги. Подобные акты вандализма мы будем, к сожалению, встречать и в более поздние периоды истории.

3. Прикладная направленность развития математики в ранних рабовладельческих государствах

Можно утверждать, что математика, как и другие науки, возникла и развивалась как прикладная наука. Она была призвана решать практические задачи повседневной жизни людей, в том числе для 1) учёта произведённой продукции; 2) распределения урожая; 3) межевания земельных участков; 4) определения величины налога; 5) учёта сбора налогов; 6) дележа наследства; 7) вопросов, связанных со строительными работами; 8) расчётом календаря и т.п.

Рассмотрим подробнее достижения учёных древнего Египта, Вавилона, Китая, Индии в развитии математики этого периода.

§ 2. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ЕГИПТА

(Египет – «колыбель геометрии»)

1. Египет – страна древней развитой культуры

1. Объединение Египта в единую страну в основном произошло в третьем тысячелетии до н.э. в долине Нила. Эта река играла огромную роль в жизни страны. Если взглянуть на карту древнего Египта, то вся земля, находившаяся под властью фараонов, представится в виде плодородной ленты, окаймлённой горными хребтами. А посередине по всей длине ленты струится знаменитейшая, может быть, в истории человечества река, бывшая на протяжении тысячелетий свидетельницей возникновения и развития одной из древнейших цивилизаций, имевшей огромное значение в культурном строительстве человечества. Река эта – Нил, и её греческое название Нейлос (наводнение).

Неслучайно, что Нил обожествляли, ему поклонялись люди, о нём слагали гимны [27, с. 31–32].

Слава тебе, о Нил!
Вышел ты из земли,
Чтобы жизнь разлилась
По Египту.

Ты даёшь изобилие, о Нил,
Наделяешь хлебом людей.
Ты несёшь на себе суда
Через камни порогов.

Тайны Нила не разгадать,
Где родился он, не найти,
О пещерах, где он рождён,
Не написано в свитках ...

2. О писцах и школе. Писцы в Египте – особая каста людей. Они вели учёт населения и скота, ведали государственной перепиской. Писцы находились в привилегированном положении. В папирусах говорится: *«Писец никому не подчиняется, но ему подчиняются все»*. Или: *«Нет писца, который не кормится от вещей дома царя»*.

подавляющее большинство народа было безграмотным. Но писцов готовили в специализированных школах. В них дети обучались 12 лет с пятилетнего возраста. О нравах и методах воспитания в школе рассказывает следующее поучение для учеников: *«Пиши твоей рукой и читай твоим ртом и спрашивай совета того, кто знает больше тебя, ибо ухо мальчика на спине (выделено мною. – А.Х.), и он слушает, когда его бьют»*.

Среди школьных поучений встречаются и такие, которые описывают преимущества грамотного человека и профессии писца: *«Сделайся писцом! Он освобождён от повинностей, он охранён от всяких работ, он удалён от мотыги и кирки. Ты не будешь носить корзину, избавит это тебя от доли гребущего веслом. Сделайся писцом! Гладки его члены, и станут твои руки мягкими. Когда ты выходишь, ты разодет, тебя возвеличивают, тебя вопрошают придворные...»* [27, с. 47].

В Британском папирусе есть наставление, автор которого убеждает своего ученика хорошо учиться и стать писцом. Он описывает, сколь тяжкий труд и незавидная судьба у представителей других профессий. В частности, он пишет:

«Я не видел кузнеца посланником и ювелира посланником, но видел кузнеца за работой у печи. Его пальцы были подобны крокодиловой коже; он издавал запах хуже, чем гнилая икра...»

В одном из дошедших до нас папирусов сказано: *«Мудрые писцы ...достигли того, что их имена пребывают вовеки, (хотя) они ушли, закончив свои жизни. А ведь они не делали пирамид. Книги поучения стали их пирамидами... Полезнее книга, чем надгробие..., полезнее свиток, чем молельня...Они ушли, и имя их было бы забыто, но писания заставляют их помнить»* [25, с. 117].

3. О медицине. Египетские врачи умели лечить многие болезни, оказывали помощь при переломах и вывихах, пломбировали зубы, готовили лекарства. В одной рукописи даётся совет: каждые три дня принимать касторку для очистки желудка.

4. Об астрономии. Изучение движения небесных тел требовалось для умения ориентироваться по звёздам, для определения периода разлива Нила, что было связано с началом полевых работ. Имелся календарь и систематический отсчёт времени. Основные меры времени – сутки, лунный месяц, год, который делился на 12 месяцев по 30 дней. К 360 дням добавлялись 5 дней, соответствующих главным праздникам. На потолках египетских храмов и гробниц сохранились подробные карты звёздного неба.

5. О часах. Египтяне изобрели солнечные, водяные и песочные часы, даже часы с боем: на железный лист падал грузик, подвешенный к тлеющему шнуру!

6. О живописи. Стены храмов, домов, колонны расписывались изображениями богов, фараонов, сценами из их жизни, жизни земледельцев и ремесленни-