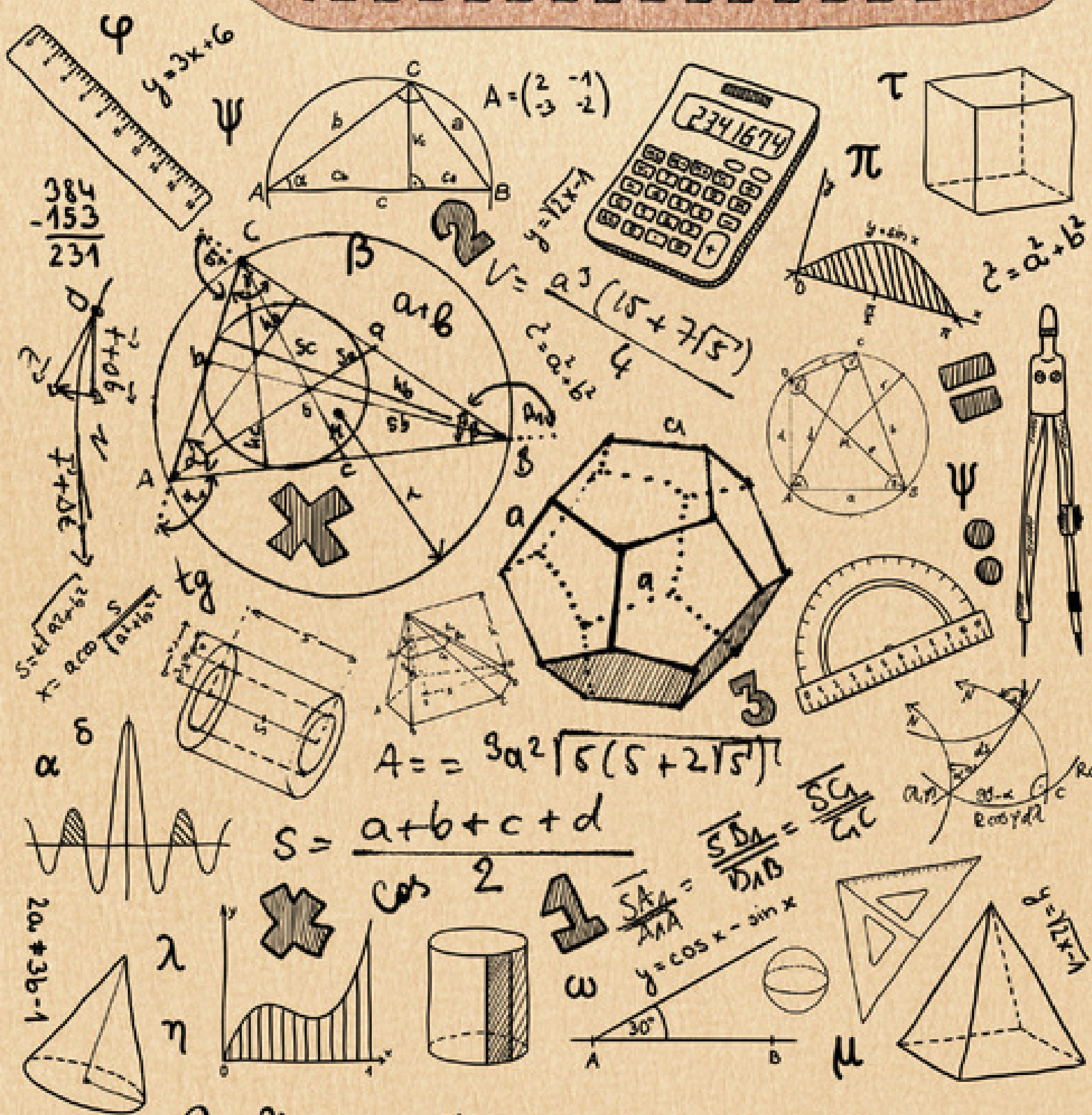
МАТЕМАТИКА ДЛЯ «ГИКОВ»



От бутылки Клейна до теории хаоса

РАФАЕЛЬ РОУЗЕН

Рафаель Роузен

Математика для гиков

«АСТ»

2015

УДК 61
ББК 5

Роузен Р.

Математика для гиков / Р. Роузен — «АСТ», 2015

ISBN 978-5-17-096852-7

Возможно, вам казалось, что вы далеки от математики, а все, что вы вынесли из школы – это «Пифагоровы штаны во все стороны равны». Если вы всегда думали, что математика вам не понадобится, то пора в этом разубедится. В книге «Математика «для гиков» Рафаэля Розена вы не только узнаете много нового, но и на практике разберете, что математикой полон каждый наш день – круглые крышки люков круглы не просто так, капуста Романеско, которая так привлекает наш взгляд, даже ваши шнурки, у которых много общего с вашей ДНК или даже ваша зависть в социальных сетях имеет под собой математические корни. После прочтения вы сможете использовать в разговоре такие термины как классификация Дьюи, Числа Фибоначчи, равновесие Нэша, парадокс Монти Холла, теория хаоса, подготовитесь к тексту Тьюринга, узнаете, как фильм получает Оскар, и что это за эффект бразильского ореха.

УДК 61
ББК 5

ISBN 978-5-17-096852-7

Содержание

Рафаель Роузен
Математика для гиков

* * *

Посвящается Натаниэлю, Джолине и всем остальным членам моей семьи

Благодарность

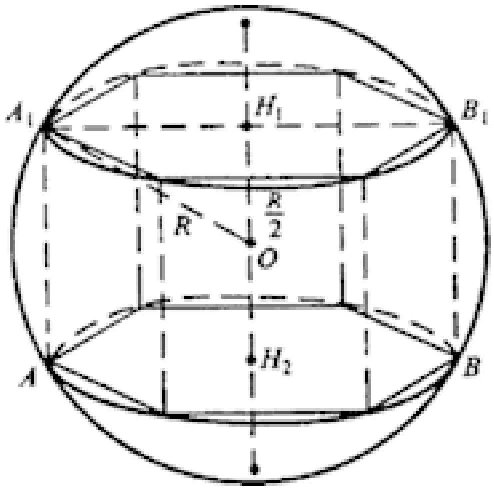
Я бы не смог написать эту книгу без помощи множества людей. Я бы хотел выразить особую благодарность профессору математики в Университете штата Канзас Дэйву Окли, а также президенту Математической ассоциации Америки и профессору математики в колледже Харви Мадд Френсису Су за их время и помощь. Когда я потерялся в математических дебрях, их простые объяснения помогли мне найти из них выход. И конечно, я хотел бы поблагодарить моих редакторов, которые поддерживали меня на протяжении всего писательского процесса.

Я также хочу выразить благодарность Джолине и Натаниэлю за их терпение, пока я часами работал над завершением данного проекта. Моя любовь к вам безгранична.

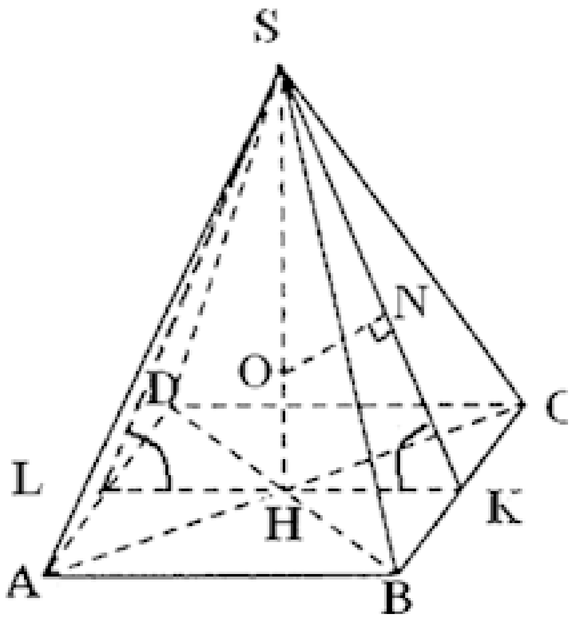
0. Вступление

0.1. Что значит быть помешанным на математике?

Возможно, вам нравились уроки математики в школе, а сейчас вы разгадываете логические головоломки в свободное время. А может, вас заинтересовали разные отсылки к математике из поп-культуры – *Доказательство, Числа, Игра в имитацию, Игры разума* – и вы хотите узнать о ней больше. Может быть, вы инженер или физик и ежедневно используете сложные математические принципы. Возможно, вам сложно дается понимание этой науки, но вы стремитесь хоть одним глазком взглянуть на мир, который многие люди считают завораживающим. А может, вы своего рода гик: в конце концов, существует столько же разновидностей математических гиков, сколько и различных теорем.

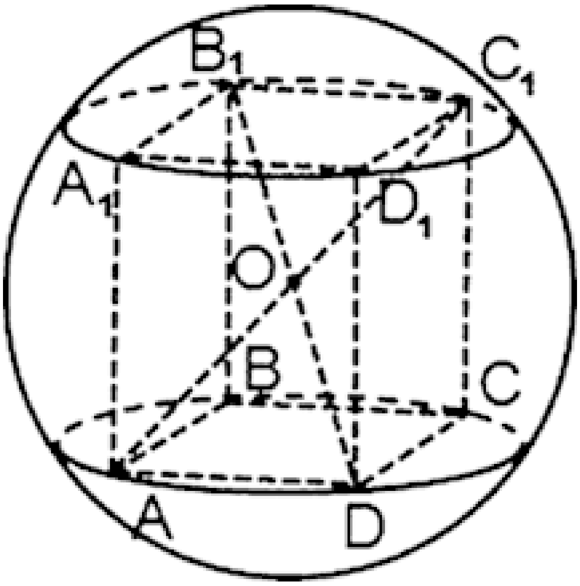


Кем бы вы ни были, на страницах этой книги я надеюсь показать, что математика – это не только ряд механических упражнений, которые вы выполняете в классе. Вам не придется ничего запоминать, и никакого теста в конце не будет. Я надеюсь убедить вас, что математика – это то, что встроено в структуру реальности: коллекция фигур, примеров, чисел, доказательств и, скажем, маленьких сокровищ. Математика находится в воздухе, которым вы дышите, на тротуарах, по которым вы ходите, и в автобусах, на которых вы каждое утро добираетесь до работы. Что это значит? Чтобы узнать это, вам придется продолжить чтение.

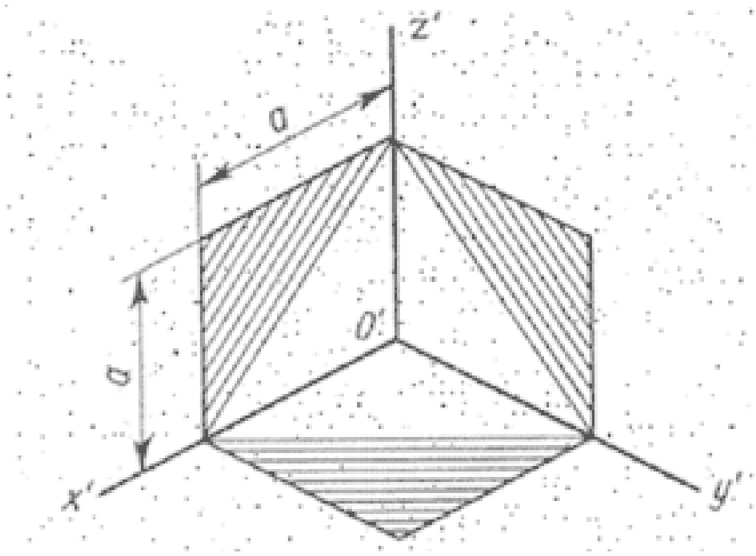


Кроме того, что я хочу показать, что математика – это живая составляющая мира, в котором мы живем, я также надеюсь убедить вас, что математика прекрасна. Я не имею в виду, что уравнения хорошо смотрятся на бумаге или что знаки «плюс» и «минус» похожи на каллиграфию. Я говорю о том, что изучение математики похоже на любование закатом, на чтение стихотворения или на прослушивание вашей любимой группы. В математике есть красота, от которой может перехватить дыхание. Вы когда-нибудь выходили из кинотеатра после потрясающей драмы, которая полностью захватила ваше сознание актерской игрой, декорациями и операторской работой? Хотите верьте, а хотите нет, но математика именно такая и есть. Некоторые математики даже убеждают, что эта наука должна быть включена в список культурных эталонов, куда входят Шекспир, Моцарт и Микеланджело. Эти математические знатоки считают, что все люди должны изучать математику, так как не изучение ее было бы преступлением, которое можно приравнять к не чтению *Гамлета*. Другими словами, люди не должны изучать математику, только чтобы получить хорошую оценку на экзамене. Вместо этого они должны изучать ее, чтобы обогатить свою жизнь.

Наше путешествие по поиску математики в нашей повседневной жизни приведет нас от пиццы к пончикам, от онлайн-покупок к системе навигации в наших смартфонах. Мы ближе ознакомимся с ситуациями, когда вы целую вечность стоите на остановке, но автобусов так и нет, а потом вдруг два или три автобуса приезжают одновременно. Мы остановимся на изучении странных овощей из вашего ближайшего супермаркета и поймем, как музыка преобразовывается в файл на вашем iPod. Мы даже разберемся с тем, почему дополнительные дороги могут только ухудшить пробки.



Как только вы узнаете об этих завораживающих математических понятиях, которые скрываются в мире вокруг, вы начнете ценить эту науку еще больше, настолько, что сможете поделиться этим с другим пассажиром, когда автобус будет опаздывать… опять.



1. Часть 1. Фигуры

1.1. Красота капусты Романеско

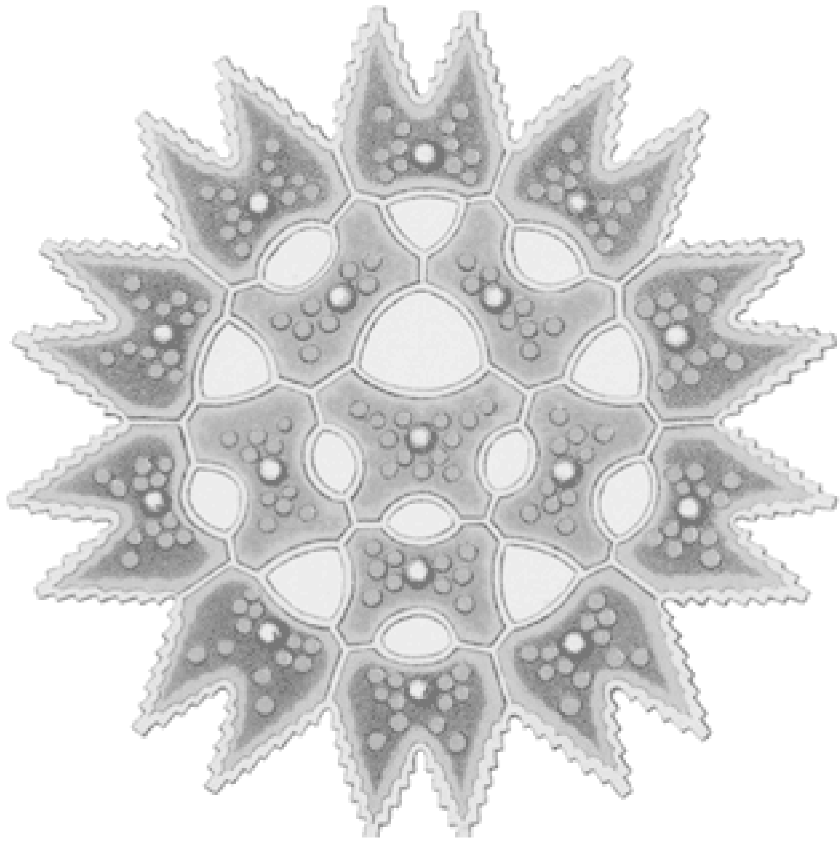
Математическое понятие: самоподобие

Вы когда-нибудь рассматривали фрукты и овощи в местном супермаркете? Некоторые из них выглядят просто жутко: например, желтый цитрон пальчатый выглядит как осьминог из произведения Г. Ф. Лавкрафта. Другие же странным образом прекрасны. Сладкий картофель обладает замечательной неоднородной формой, похожей на бесформенные глыбы земли; в луке есть такие же кольца, которые можно найти в стволах деревьев; а если разрезать яблоко поперек, можно увидеть, что семена расположены в форме звезды. Это каким-то чудным образом доставляет удовольствие. Даже декоративная капуста – которая продается в садовых магазинах – имеет особую геометрическую привлекательность.

Но ничто не может сравниться по красоте в овощном отделе с капустой романеско. На самом деле, от нее трудно отвести взгляд. Романеско – это один из сортов *Brassica oleracea,* или просто капусты, она имеет форму сосновой шишки, но на ее поверхности находится изобилие других шишек меньшего размера, а на поверхности этих меньших шишек находятся еще шишки и так далее. Каждая шишка меньшего размера выглядит как и исходная, самая большая шишка, так что если вы решите срезать с изначальной шишки маленькую шишку и сфотографируете ее, а потом положите это изображение рядом с фотографией целого соцветия, то вы просто не сможете определить, где какая шишка.

Математики скажут, что форма капусты романеско самоподобна. Если вы увеличите изображение капусты и внимательно присмотритесь к деталям, то увидите то же самое, что бы вы увидели, не увеличивая это изображение. При самоподобии объект выглядит одинаково, несмотря на его масштаб. Это также отличительная черта фракталов, которые изучал математик Бенуа Мандельброт, благодаря которому они получили широкую известность. Его книга «Фрактальная геометрия природы» (1982) помогла представить этот вид объектов миру. (Эта книга, по сути, стала переработкой его книги «Фракталы: форма, случайность и размерность» 1977 года.) Мандельброт выявил множество форм в природе, которые имели самоподобную структуру: изрезанная береговая линия, облака и изысканный узор жилок в листьях. Кажется, что природа любит самоподобные формы; чем больше вы будете их искать, тем больше вы их найдете.

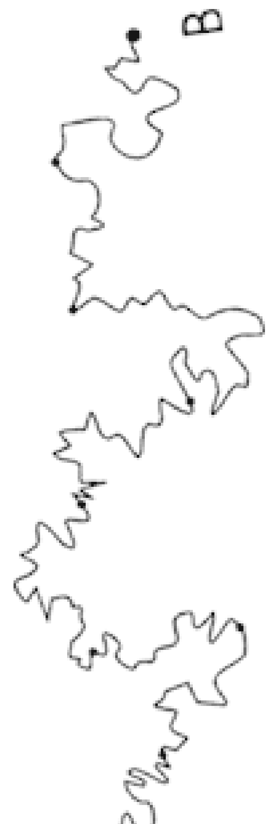
Бенуа Мандельброт также изучал то, что сейчас называется множеством Мандельброта, это множество комплексных чисел в последовательности, которая не уходит в бесконечность. Когда вы изображаете множество Мандельброта на графике, оно приобретает округлую выпуклую форму, которая интересна математикам отчасти оттого, что чем больше вы увеличиваете какую-то часть, тем больше деталей вы видите. На самом деле, когда вы увеличиваете изображение, вы вновь и вновь начинаете видеть исходную форму множества Мандельброта.



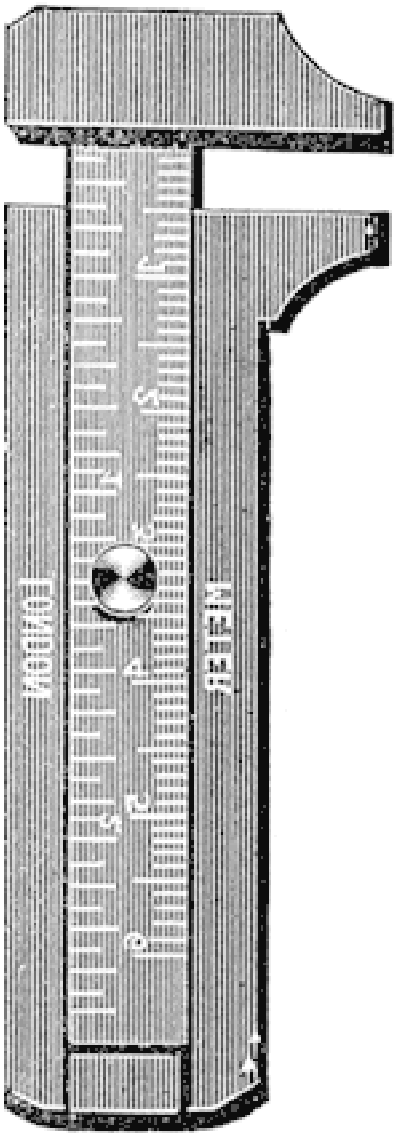
1.2. Измеряем длину береговой линии: не так просто, как кажется

Математическое понятие: система измерений

Что может быть проще измерения длины чего-либо? Если мы, например, хотим узнать длину стола, то для этого можно использовать рулетку. Если мы хотим узнать дистанцию от одного города до другого, мы можем записать показания одометра в машине. Или можно взять карту и с помощью линейки высчитать дистанцию между двумя городами, а потом, используя масштаб карты, перевести сантиметры в километры или дюймы в мили.



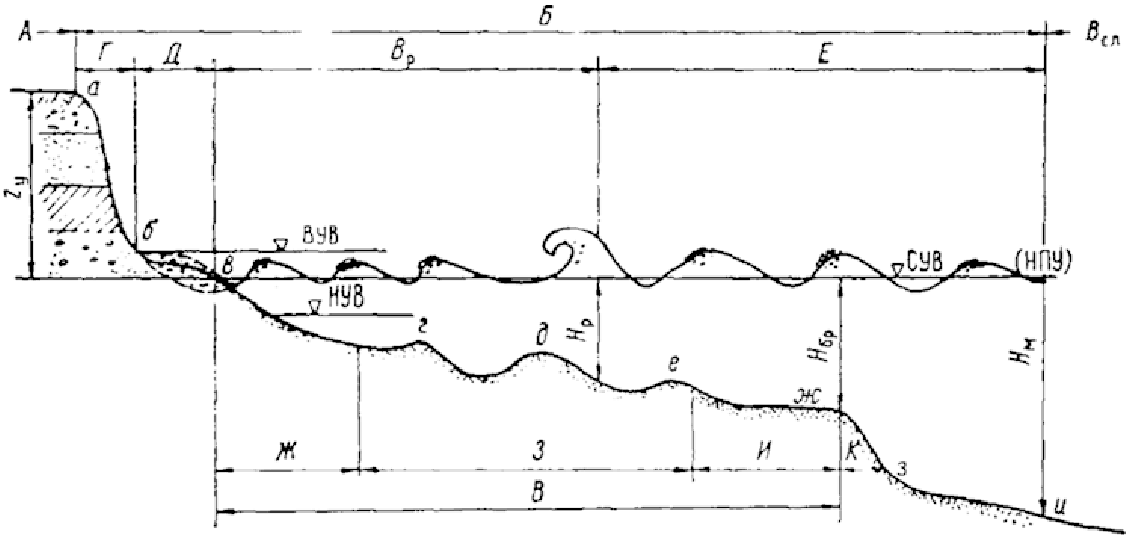
Но вот измерение береговой линии – это более сложный процесс. Оказывается, что длина каждой отдельно взятой береговой линии зависит от длины устройства, которое используется для ее измерения. Как правило, чем меньше измерительное устройство, тем длиннее береговая линия. Теоретически, по мере того, как измерительное устройство становится все меньше и меньше, длина береговой линии увеличивается до бесконечности. Как такое возможно?



Как и многие другие формы в природе, береговые линии имеют изрезанную и неправильную форму. Таким образом, чем ближе вы рассматриваете ее, тем больше деталей замечаете. Например, если бы вы смотрели на Северную Америку с высоты спутника, то береговая линия казалась бы относительно гладкой, без особых отличительных черт. Но если вы сами идете по береговой линии, помимо всего прочего, вы замечаете узкие заливы, небольшие выступы берега и камни. А если вы опуститесь на колени, то сможете разглядеть каждый камешек и листик. Если вы воспользуетесь микроскопом, то ваши измерения дойдут и до молекул. На каждом новом уровне детализации ваши единицы измерения уменьшаются от километра до метра, от сантиметра до микрометра; и каждый раз территория измерения увеличивается. Если бы вам надо было измерить береговую линию Великобритании, используя палку длиной 100 км (около 62 миль), то конечная длина составила бы более 2800 км (примерно 1700 миль). Но если бы вы уменьшили палку до 50 км (31 миля), новая длина береговой линии составила бы 3400 км (2100 миль).

Парадокс береговых линий показывает, что хотя математика может предоставить измерения с необыкновенной точностью, она также может показать неопределенность, свойственную самой структуре реальности.

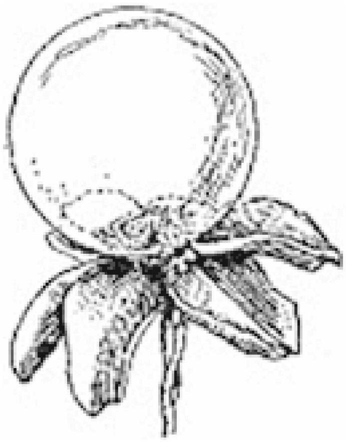
Побережье Канады – самая длинная в мире береговая линия, примерно 152 100 миль. Но вы только представьте, насколько она была бы длиннее, если бы ее измерили рулеткой.



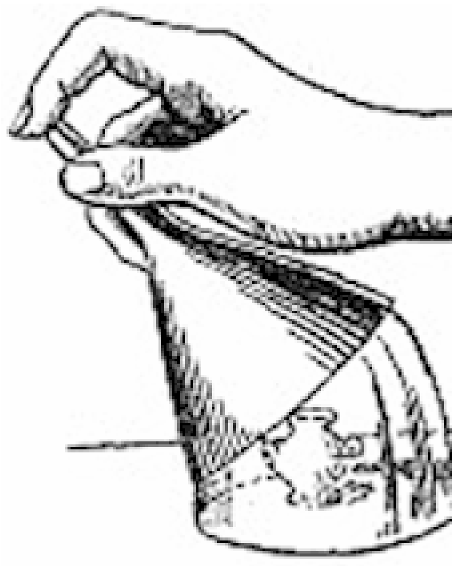
1.3. Пузыри забавны и эффективны

Математическое понятие: объем

Представьте солнечный день в парке в самый разгар лета. Вполне возможно, там есть ребенок, который пускает мыльные пузыри. Неважно, пускаете ли вы их с помощью пластиковой палочки или большого обруча, сделанного из соломинок и веревки, мыльные пузыри – с их мерцающей поверхностью и шаровидной формой – это воздушное воплощение веселья.



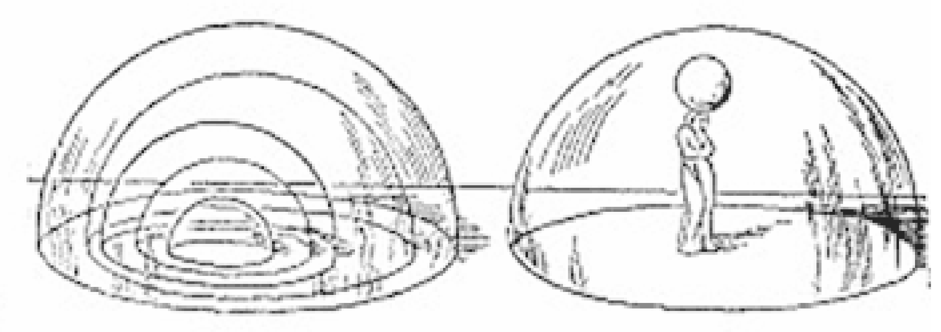
Они также являются кладезем для математических размышлений. Математики уже давно знают, что если вы хотите поместить определенный объем воздуха в форму с наименьшей площадью поверхности, то эта форма – шар. А что, если вы хотите поместить два объема воздуха? Есть подозрение, что лучшим способом будет использовать двойной пузырь. Двойной пузырь – это форма, когда два пузыря соединены. (Вы, возможно, видели его, когда использовали пену для ванн.) Обычно пузыри отделены плоской мембраной; если один пузырь больше другого, то мембрана немного выпирает в сторону большего пузыря. В 19 году математики Джоэл Хасс, Майкл Хатчингс и Роджер Щлафли опубликовали статью, в которой доказали, что форма двойного пузыря – это наиболее эффективная форма для заключения двух одинаковых объемов воздуха. Но что, если два объема воздуха разные? Является ли двойной пузырь и в этом случае лучшим способом заключения воздуха в форму с наименьшей площадью поверхности?



Ответ положительный. В 2000 году математики Фрэнк Морган, Майкл Хатчингс, Мануэль Риторе и Антонио Рос опубликовали статью, в которой доказали, что двойной пузырь – это лучший способ заключения любых двух объемов воздуха в форму с наименьшей площадью поверхности. Они показали, что двойной пузырь имеет меньшую площадь поверхности, нежели другие бесчисленные формы, которые могут принять два соединенных между собой пузыря, включая тот странный случай, когда один пузырь обхватывает середину второго, как пончик. (В математике форма пончика имеет специальное название – тор, – которое возникает в подобласти топологии.) Более того, эта математическая команда доказала это без использования компьютера.

Это один из тех случаев, когда математика может использовать человеческий разум для исследования процессов, которые происходят в природе, чтобы разгадать их тайны. Все, что вам нужно, это бумага и карандаш.

Мыльные пузыри не лопаются дольше, чем пузыри из других веществ, как, например, из чистой воды, из-за эффекта Марангони, который описывает явление переноса вещества вдоль границы сред с разным поверхностным натяжением. Он назван в честь итальянского физика Карло Марангони, который опубликовал свою находку в 1865 году. По существу, когда дело касается мыла, эффект Марангони стабилизирует границы пузыря, делая его прочнее и долговечнее, нежели простой пузырь.



1.4. Скрывается ли математика за картинами Джексона Поллока?

Математическое понятие: фракталы

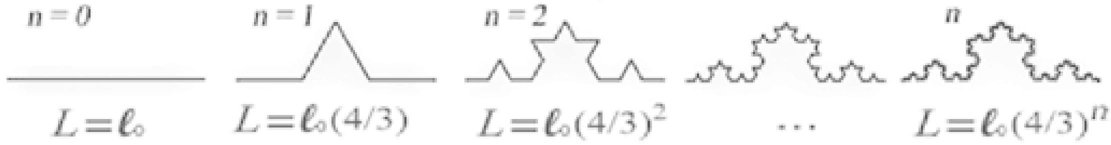
Джексон Поллок создал одни из самых культовых картин XX века, и некоторые исследователи утверждают, что их притягательность берет начало в математике. Если быть совсем точным, то ученые утверждают, что в своих картинах в технике разбрызгивания, которые Поллок закончил в 1940-х, он использовал фракталы, являющиеся геометрическими элементами, которые повторяют друг друга в больших и маленьких масштабах. Некоторые также утверждают, что работы Поллока зачаровывают, так как в них схвачены некоторые фрактальные качества окружающего мира. (Фракталы часто возникают в природе, например в текстуре облаков.)

Фракталы обладают размерностью физических величин, также как линии (одна величина) и мячи (три величины), но, в отличие от этих объектов, фракталы имеют величины, которые включают в себя дробную метрическую размерность. Вообще, математики подразделяют фрактальные величины по шкале от 0 к 3. Некоторые одномерные фракталы, такие, как сегментированная линия, имеют фрактальную размерность от 0,1 до 0,9. Двухмерные фракталы, такие, как контур береговой линии, имеют фрактальные размерности, колеблющиеся от 1,1 до 1,9. И трехмерные фракталы, такие, как кочан цветной капусты, имеют фрактальную размерность от 2,1 до 2,9.

В конце 1990-х физик Ричард Тэйлор заметил, что картины Поллока в технике разбрызгивания имеют фрактальные свойства, и предположил, что можно определить фрактальные характеристики его работ. Используя определенный вид анализа, человек предположительно мог бы выяснить, была ли та или иная картина написана Поллоком. Техника Тэйлора заключалась в том, чтобы отсканировать фотографии работ Поллока и перенести их на компьютер, а затем наложить сетку на цифровые изображения. Потом компьютер делал анализ картины, сравнивая рисунок как на всей картине, так и на ее маленьком участке в 2 см. Тэйлор обнаружил, что в картинах Поллока действительно есть фракталы. Например, было установлено, что одна картина – «Номер 14» – содержит фрактальную размерность 1,45, что соответствует размерности многих береговых линий.

Спустя годы, однако, исследователи из Университета Кейс Вестерн Резерв нашли доказательство, что техника Тэйлора не выявляла работы Поллока достоверным образом. Один докторант обнаружил, что незаконченный скетч, который она сделала с помощью фотошопа, прошел тест Тэйлора. Другое исследование показало, что две картины студентов Кейс Вестерна также прошли тест Тэйлора, в то время как две подлинные картины Поллока его не прошли. Исследователи также пришли к выводу, что этот тест не содержал достаточного количества данных, которые бы с точностью определяли принадлежность картин.

Пит Мондриан

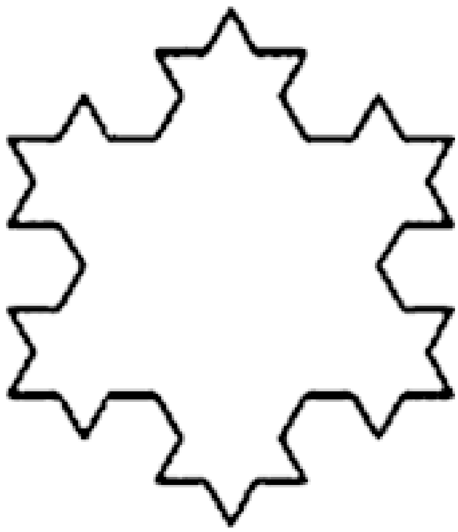


За более явными примерами математики в искусстве обратитесь к работам Пита Мондриана, который в своих работах для большего эффекта использовал прямые линии и четырехугольники.

1.5. Снежинка Коха

Математическое понятие: фракталы

Есть что-то странное в фракталах (см. главу 1.4), это трудно объяснить, но легко показать на примерах. Одним из таких примеров является снежинка Коха, форма которой основана на кривой Коха, которая впервые была упомянута шведским математиком Нильсом Фабианом Хельге фон Кохом. Чтобы создать снежинку Коха, для начала нужно взять равносторонний треугольник (тот, у которого все стороны имеют одинаковую длину). Теперь поделите каждую сторону на три равные части. Используя среднюю часть каждой стороны, образуйте другой равносторонний треугольник остриями наружу так, что эта средняя часть станет его основанием. Продолжайте процесс бесконечно.



В результате такого процесса возникает странное явление: в итоге получается, что снежинка Коха имеет бесконечную длину. Каждый раз, когда вы создаете треугольник посередине одной из сторон снежинки, вы увеличиваете длину на одну треть. А так как процесс продолжается бесконечно, так и периметр снежинки увеличивается бесконечно.

Вот еще один странный результат: несмотря на то, что периметр увеличивается безгранично и становится все больше и больше, пространство, которое занимает снежинка, – хоть и постоянно увеличивается – имеет границу. Если представить круг, нарисованный вокруг изначального треугольника, то станет ясно, что снежинка Коха никогда не выйдет за пределы этого круга. Она может приблизиться к кругу, но никогда не выйдет за его пределы. Поэтому в каком-то смысле математический объект с бесконечной длиной окружен конечной площадью. Странно!

Фрактал Cesaro

Некоторые фракталы формируются не путем добавления, а путем удаления. Снежинка Коха создается путем добавления пиков к центру сегментов линий, а чтобы создать вид под названием фрактал Cesaro, нужно эти пики убрать. Результатом будет снежинка, которая будет выглядеть, будто ее пожевала акула. Однако в итоге чем сложнее они обе будут становиться, тем более похожими они станут для человеческого глаза.

1.6. Вы живете в четвертом измерении?

Математические понятия: бутылки Клейна, геометрия, топология

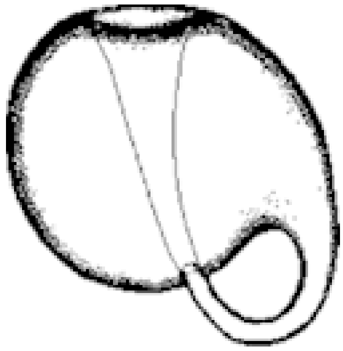
Бутылки Клейна странные. Позвольте мне объяснить как следует. Чтобы их понять, нужно представлять четвертое измерение – пространство, которое существует под прямым углом к нашему трехмерному пространству, – и хоть они и странные, бутылки Клейна могут содержать секрет судьбы нашей вселенной.

Бутылка Клейна впервые была описана немецким математиком Феликсом Клейном в 1882 году, ее оригинальное название звучало как *Kleinsche Fläche,* что в переводе с немецкого значит «пространство Клейна», но скорее всего было перепутано с *Kleinsche Flasche,* отсюда и название – «бутылка Клейна». В любом случае, это название и закрепилось. Бутылка Клейна представляет собой поверхность – двухмерная труба, – и, подобно шару, бутылка Клейна не имеет границ. Она также является неориентируемой поверхностью, то есть направления будут меняться по ходу движения вдоль поверхности.

Но бутылки Клейна получили известность по другой причине: у них нет внутренней и внешней сторон. Они попросту сливаются в одно пространство. (Бутылку Клейна можно назвать аналогом ленты Мебиуса (см. главу 1.7), у которой есть только одна сторона. На самом деле, если разрезать бутылку Клейна пополам, то в итоге получатся две ленты Мебиуса.) Еще одним известным фактом является то, что бутылка Клейна не может существовать в трехмерном пространстве. Чтобы, скажем, создать ее из листа бумаги, вам для начала нужно будет сложить из него цилиндр. Затем вместо того, чтобы соединить оба конца друг с другом, образуя пончик, вы скручиваете один конец. А это невозможно сделать, если не «поднять» один конец цилиндра в четвертое измерение. Так как мы живем в трехмерном пространстве, лучшее, что мы можем сделать – это продеть один конец сквозь цилиндр и соединить скрученный конец с другим концом. Полученная фигура проходит сама через себя, но если бы мы были жителями четырехмерного пространства, то бутылка Клейна вовсе не пересекала бы саму себя.

Чтобы понять почему, представьте, что вы живете в двухмерном пространстве. Теперь представьте, что в этом пространстве есть ограниченная линия, вроде двухмерной веревки. Если кто-нибудь попросил бы вас сложить из нее цифру восемь так, чтобы веревка не пересекала себя, то вы бы понятия не имели, как это сделать. Как такое может быть возможно?

Чтобы это сделать, вам нужно было бы «приподнять» линию в трехмерное пространство; в этом случае фигуру можно было создать без пересечения.

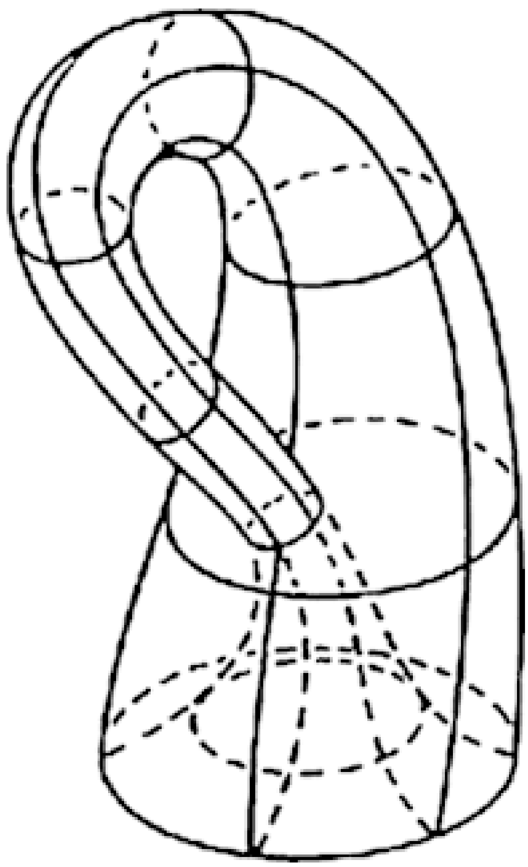


Вернемся к связи между бутылками Клейна и судьбой вселенной. Будущее вселенной – включая судьбу звезд, галактик и даже самого космоса – зависит отчасти от общего вида вселенной. Ученые называют множество возможных форм вселенной, которые были бы совместимы с их наблюдениями: некоторые формы напоминают лист бумаги, который бесконечно простирается во всех направлениях – трехмерное пространство, известное как Евклидово пространство с размерностью, равной 3, – другие же «замкнуты», это значит, что хоть они и очень большие, они в конце концов замыкаются. (Примером такой замкнутой фигуры является шар. Если вы начнете идти от одной точки на поверхности шара и будете идти по прямой, то непременно вернетесь на начальную позицию.) Однако насколько нам известно, вселенная может принимать разные формы. Мы живем на сферическом объекте, но наша окружающая обстановка подсказывает нам, что мы живем на бесконечно большой плоской равнине, то место, где мы живем во вселенной, дает нам основание полагать, что вселенная простирается по прямым линиям во всех направлениях, но на самом деле на расстояниях, за которыми мы не можем наблюдать, вселенная может выглядеть как седло или цилиндр. Или же она может иметь форму бутылки Клейна.

Так что если вы думали, что четвертое измерение не имеет никакого отношения к вашей повседневной жизни – подумайте еще раз. В действительности вы можете в нем жить.

Феликс Клейн

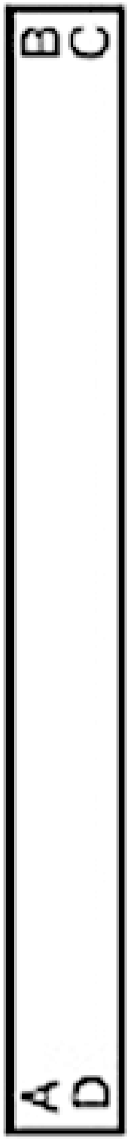
Родился в 1849 году, преподавал математику в Геттингенском университете и проявлял небывалый интерес к геометрии. Он также был известен своим браком с внучкой философа Георга Вильгельма Фридриха Гегеля!



1.7. Построим более эффективную конвейерную ленту

Математические понятия: лента Мебиуса, топология

В математике маленькие вещи могут иметь большие последствия. Возьмите, например, полоску бумаги любой длины. Держите концы этой полоски в разных руках и поверните ее на 180 градусов. Теперь приклейте концы друг к другу. Вы только что создали настоящий математический парадокс из простых канцтоваров. Объект, который вы сделали, называется лентой Мебиуса.



Ленты Мебиуса – особое явление в математике, так как они неориентируемые, то есть имеют лишь одну сторону. Это может прозвучать как что-то невообразимое, но вы сами можете доказать ее односторонность. Возьмите карандаш и начинайте чертить линию в любой точке ленты. (Убедитесь, что вы чертите линию, параллельную ленте, чтобы карандаш не сошел с бумаги.) В конце концов карандаш вернется на начальную позицию. А что особенно важно, так это то, что черта остается на всей поверхности ленты. Если бы у ленты было две стороны – внешняя и внутренняя, – то карандашная линия была бы только на одной из сторон, вторая осталась бы нетронутой.

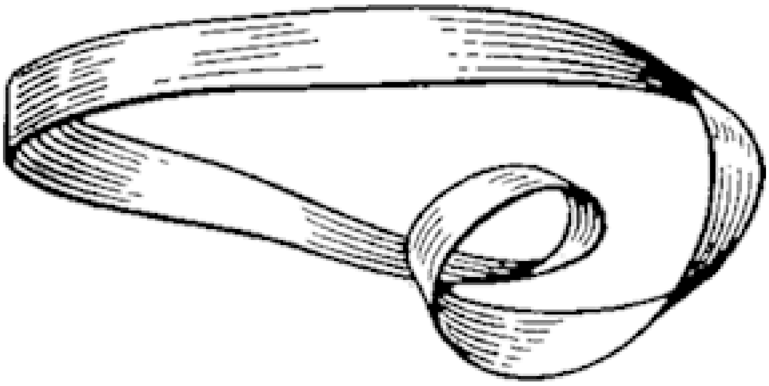
Этот странный односторонний объект похож на экзотику – он таковым и является, – но ленты Мебиуса время от времени встречаются и вне книг по математике и классных досок. Например, в 1957 году компания B.F. Goodrich создала конвейерную ленту Мебиуса. Такой способ позволял ленточному конвейеру работать дольше, так как вся поверхность ленты изнашивалась равномерно. Те же цели преследовали и некоторые магнитофонные ленты и ленты для пишущих машинок: эта форма позволяла использовать максимум поверхности лент, что повышало их практичность. Ленты Мебиуса также есть и в мире электроники – а именно в некоторых резисторах (что позволяло им противостоять потоку электроэнергии) – и в биологии: некоторые конфигурации молекул имеют структуру ленты Мебиуса.

Лента Мебиуса была названа в честь Августа Фердинанда Мебиуса, немецкого математика, жившего в XIX веке, который ее и изобрел. (Оказалось, что та же лента была изобретена практически в то же самое время другим немецким математиком, Иоганном Бенедиктом Листингом, который ввел в использование математический термин «топология».) У Мебиуса была отличительная родословная: его предком был Мартин Лютер, один из богословов, который помог начать Реформацию в начале XVI века, а еще он учился вместе с Карлом Фридрихом Гауссом, одним из самых выдающихся математиков в истории.

Лента Мебиуса служит отличным примером простого объекта, который может сделать каждый, но который имеет глубокий математический подтекст. И нет ничего лучше, чем держать математику в своих руках.

Музыкальные аккорды

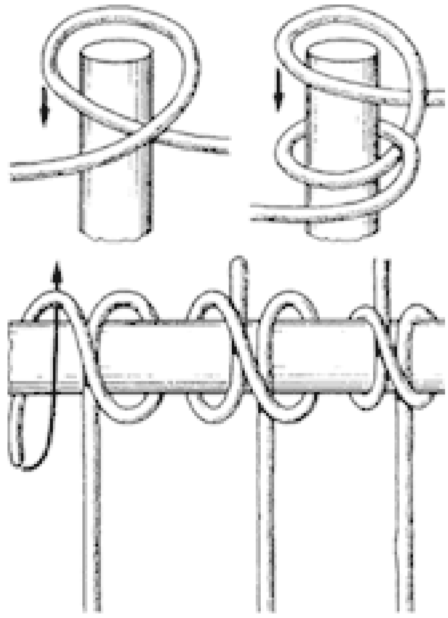
Музыка и математика имеют интересную связь. Теоретики музыки иногда изображают на бумаге, как различные аккорды из двух нот связаны друг с другом, принимая во внимание то, что можно записывать их двумя способами (C-F или F-C, например). Чтобы показать эту связь на листе бумаги, нужно скрутить его и сделать из него ленту Мебиуса.



1.8. Математическая связь между вашими шнурками и вашей ДНК

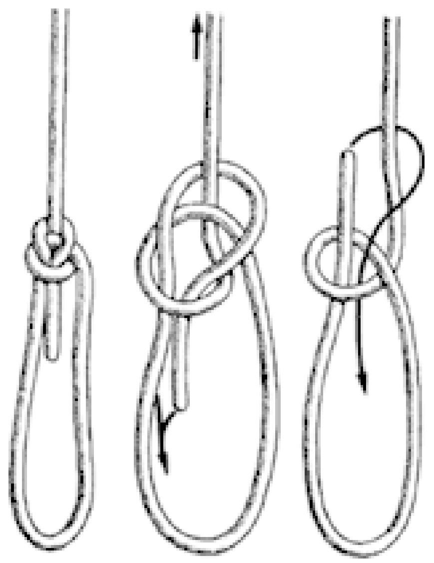
Математические понятия: теория узлов, кривые

Вы не ожидаете найти математику в паре ваших ботинок. Но поглядите вниз на ваши завязанные шнурки. Эти перевязанные узлы на самом деле могут привести к сложным математическим мыслям.



Этот раздел математики известен как теория узлов. Узлы в математике, однако, отличаются от узлов в вашей повседневной жизни одним значимым способом: у них нет свободных концов, то есть они замкнуты. На самом деле, вы можете сделать такой узел самостоятельно. Возьмите кусок веревки – или сваренные спагетти, или лассо – и завяжите обычный узел. Теперь возьмите концы и соедините их с помощью скотча. В итоге у вас может получиться крендель, но в любом случае это будет математический узел!

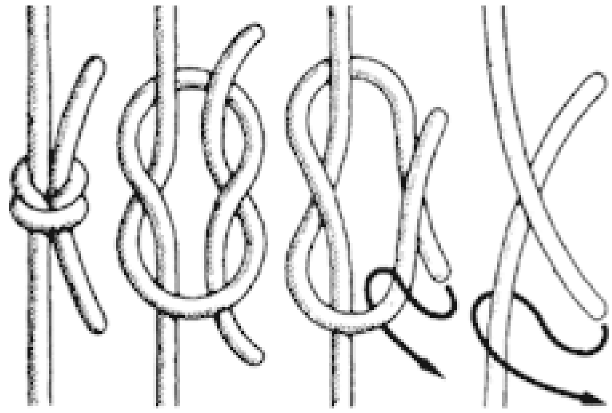
И хотя отчасти теория узлов хорошо нам знакома, в ней есть свои особенности. В своей книге об узлах Колин Адамс дал следующее определение узлу в математике: «это замкнутая кривая в пространстве, которая не пересекает себя ни в одной точке». Такое определение может натолкнуть вас на мысль о том, какой же узел является простейшим. Таким узлом является простая окружность, такой узел называют «незаузленным». (А еще его называют тривиальным.) Также самыми простыми узлами являются «восьмерка» и «трилистник».



Что конкретно происходит в течение одного дня теоретика, занимающегося узлами? Они обычно стремятся узнать, можно ли развязать тот или иной узел, не разрезая его, или можно ли определить, что узел на самом деле является тривиальным, но в необычной форме. Но теория узлов больше волнует не математиков вовсе. Биологи интересуются теорией узлов из-за ДНК – молекулы, которая кодирует материалы, необходимые для всех живых организмов, – которая иногда может содержать узлы, а они, в свою очередь, могут влиять на то, как информация в молекуле ДНК может интерпретироваться клеточными механизмами организма. Химики также заинтересованы в узлах. Многие из них хотели бы разобраться со сцепленными молекулами, так как в зависимости от узла определенная молекула может совершенным образом поменять свое поведение. (При одной конфигурации вещество может вести себя как масло, а при другой – как гель.) Даже один или два поворота могут иметь существенные последствия.

Гипотезы Тейта

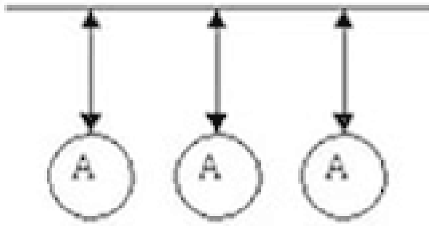
Математик XIX века Питер Гатри Тейт создал классификацию узлов, согласно количеству их пересечений. Он также выдвинул три гипотезы, включая альтернирующие узлы (при проходе такого узла пересечения чередуются «сверху» и «снизу»), хиральные узлы (они не эквивалентны своему зеркальному отражению) и число закрученности (геометрическая величина, которая описывает зацепления в узлах). Все три гипотезы не так давно были доказаны.



1.9. Что скрывает карта метрополитена?

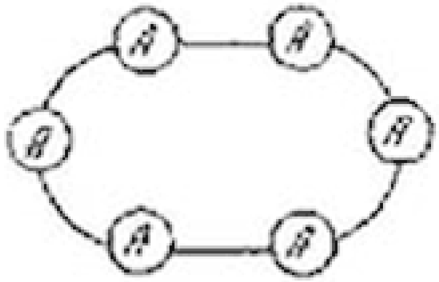
Математическое понятие: топология

"Шина"

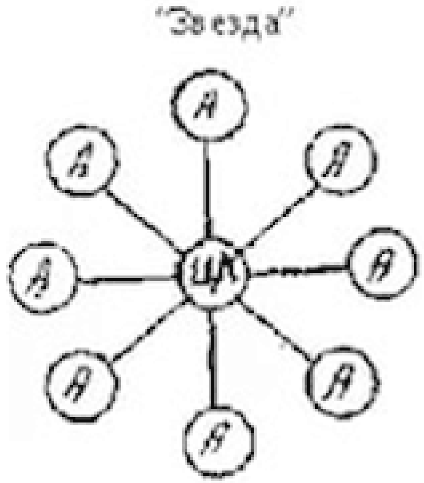


Посмотрите на карту метро любого города в мире. Что вы видите? В отличие от атласов, в которых показывается каждый поворот и изгиб дороги, карта метро выглядит довольно просто. Она состоит из прямых линий, окружностей и кривых. (Для примера откройте карты метро Лондона, Бостона или Вашингтона.) Однако поезда метро редко следуют таким совсем не сложным маршрутам: поезда проезжают целую серию препятствий на пути от одной станции до другой. Но несмотря на такое расхождение, карта метро все равно помогает путешественникам в навигации. Как так получается, что эти карты выбрасывают такое количество информации и все равно остаются полезными?

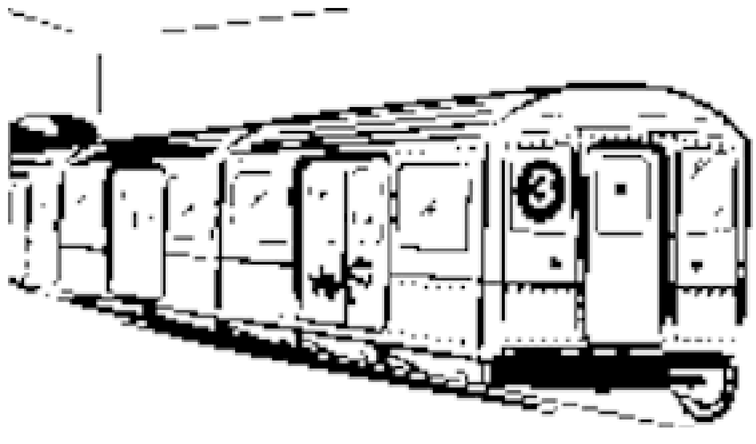
"Кольцо"



Ответ скрывается в области математики, которая известна как топология. Топология связана с геометрией и изучает то, как формы меняются, когда их растягивают, сжимают, тянут, перекручивают или искажают. (Слово «топология» от греческого «место», «учение».) Однако изменения, изучаемые топологией, должны подчиняться правилу: изменения не должны нарушать оригинальную целостность фигуры. Например, фигуры, которые были порезаны или приклеены друг к другу, не могут считаться допустимыми предметами для топологического изучения. С другой стороны, создаются новые формы, когда вы до конца натягиваете резинку, скручиваете ее в шар или перекручиваете в форму кренделя – все это допустимо. Вкратце, в топологии вы должны быть способны вернуть новую форму в ее первоначальное состояние за одно непрерывное движение. Если вы можете это сделать, то с точки зрения топологии эти две формы эквивалентны.



Теперь отношение карты метро и настоящего маршрута поездов становится ясным. Карта метро – это топологическая трансформация физического маршрута подземки. В некотором смысле карта показывает версию маршрута поездов, которая была растянута и разглажена, будто она сделана из жвачки для рук. Согласно топологии, две формы – схема метро и маршрут, который в действительности существует в системе общественного транспорта, – идентичны.



Самое большое метро в мире

Шанхайское метро в Китае является самым длинным метро, судя по длине маршрутов, его пути имеют протяженность более 330 миль. Но метро Нью-Йорка имеет самое большое количество остановок в мире – 468 станций.


New York City Subway Map
Legend
THE BRONX
MANHATTAN
QUEENS
BROOKLYN
STATEN ISLAND

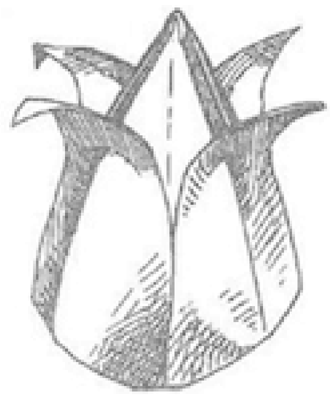
1.10. Оригами

Математические понятия: геометрия, топология

Оригами – это японское искусство складывания фигурок из бумаги, в Соединенных Штатах оно является времяпрепровождением для детей. Многие из нас видели журавлей, стаканчики и шарики, заполненные воздухом, из бумаги. Но немногие подозревают, что оригами тесно связано с математикой.

Одним захватывающим свойством оригами является умение выйти за рамки традиционной математики, особенно геометрии. Используя лишь сложенную бумажку, человек может поделить угол на три равные части, это задание неподвластно циркулю и линейке в традиционной геометрии. Человек может также использовать оригами, чтобы удвоить куб, это еще одна задача, с которой геометрия справиться не может. (Удвоение куба – это проблема, которой занимались еще в Древнем Египте и Греции. Чтобы удвоить куб, нужно было создать куб, объем которого был бы вдвое больше объема заданного куба. Такую процедуру невозможно закончить, так как сторона большего куба будет равна кубическому корню из 2, а эту длину нельзя построить с помощью циркуля и линейки.)

На самом деле, математическое изучение оригами привело к созданию своих геометрических аксиом, совокупности принципов и определений, похожих на те, что изучал Евклид, известный математик, который жил в Греции более 2000 лет назад. Эти семь принципов известны как правила Фудзиты; они описывают все варианты получения одной новой складки на листе бумаги. Математика в оригами также привела к теореме Кавасаки, которая гласит, что в совокупности углов, которые исходят из одной точки, сумма переменных углов равна 180 градусам.

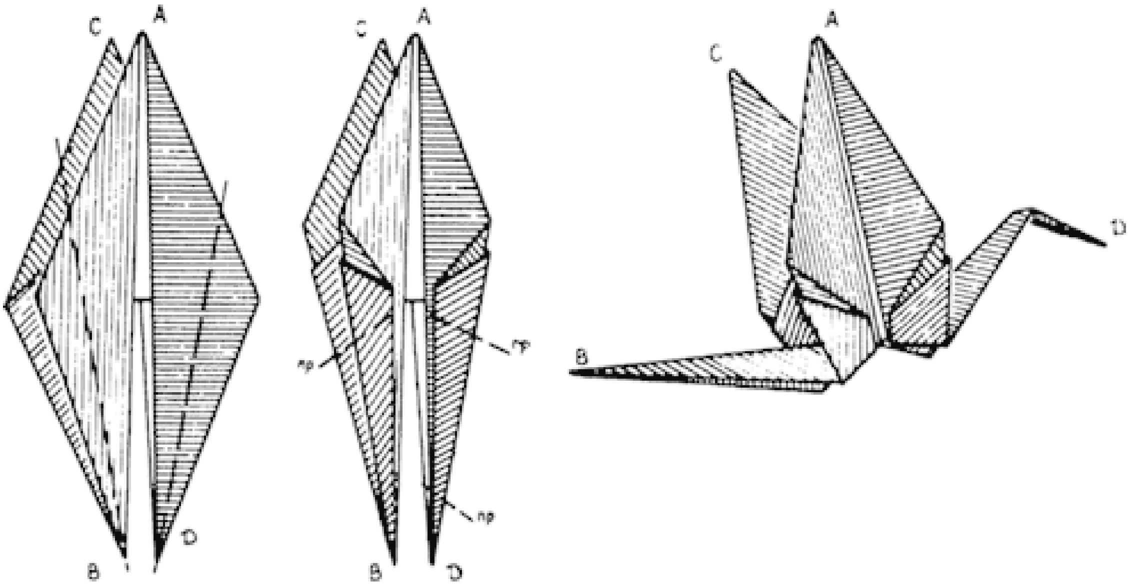


Сам предмет изучения оригами часто является математическим, помимо того что он становится практически независимой математической областью, которая имеет свои аксиомы и доказательства. Некоторые люди создают трехмерные фигуры из модульных компонентов оригами, которые имеют форму треугольников или пятиугольников. Некоторые люди делают оригами-версию платоновых тел, пяти правильных многогранников (это трехмерные фигуры, у которых все грани являются правильными многоугольниками). Другие же создают гиперболические параболоиды, имеющие форму седла и напоминающие нечто среднее между квадратом и бабочкой. И наконец, некоторые используют оригами, чтобы доказать теорему Пифагора.

В некотором смысле оригами и математика, кажется, делят одну ДНК. И нет ничего лучше, чем создавать что-то своими руками, чтобы лучше понять какое-то математическое понятие. Забудьте о карандашах и графиках, попытайтесь найти математику в складывании листов бумаги!

Праздничное дерево с игрушками-оригами

Каждый год в сотрудничестве с организацией OrigamiUSA Американский музей естественной истории создает Праздничное дерево, украшенное фигурками оригами. На елку вешают примерно 800 фигурок. В 2014 году тема основывалась на фильмах «Ночь в музее», поэтому среди фигурок можно было найти Теодора Рузвельта, Тираннозавра Рекса и статую с острова Пасхи.

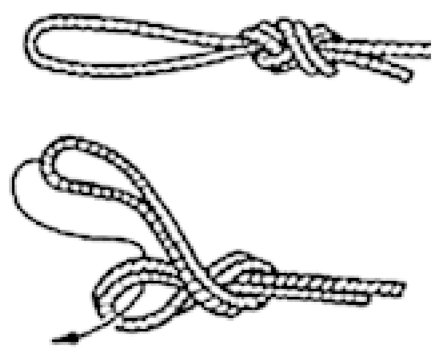


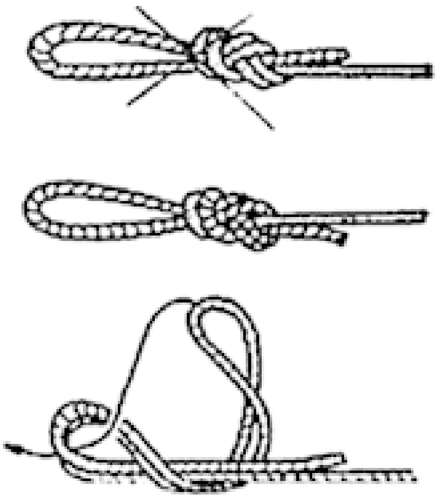
1.11. Математика скрывается за запутанными наушниками

Математическое понятие: теория узлов

Это один из раздражителей современного мира. Вы ищете в кармане или сумке свои наушники и видите, что они спутаны в какой-то невообразимый узел, который невозможно распутать. Вы достаете садовый шланг из подвала – и смотрите-ка – он каким-то образом превратился в узел. Вы достаете из упаковки рождественскую светодиодную гирлянду, которая лежала на чердаке, и обнаруживаете сплошной ком из узлов. Почему так много вещей в нашей жизни постоянно запутываются, несмотря на наши попытки всеми способами избежать этого?

Оказывается, существует математическое объяснение тому, что длинные гибкие вещи, такие, как шнуры, шнурки и веревки, завязываются в узлы. Два физика из Калифорнийского университета в Сан-Диего опубликовали исследование на эту самую тему в 2007 году. По существу, есть только несколько вариантов, при которых скомканные веревкоподобные объекты оставались незапутанными – например, когда секции веревки остаются параллельными самим себе, не касаются друг друга и не имеют точек пересечения – и много-много вариантов, при которых веревка запутывается. Вообще, шнурок или веревка запутываются в течение нескольких секунд. Все, что для этого нужно – это один свободный конец, который пересекает часть самой веревки. На этом этапе свободному концу уже ничего не стоит запутаться в остальной части веревки.





Во время своего исследования команда из Сан-Диего поместила веревки разной длины на 10 секунд во вращающуюся коробку, которая работала от мотора. Они проанализировали получившиеся узлы с помощью математической теории узлов, пытаясь найти математическое уравнение (в этом случае полином Джонса), которое бы соответствовало каждому узлу. (Теория узлов классифицирует узлы по количеству пересечений.) Они обнаружили, что в 96 % случаев узлы были простыми, то есть число пересечений варьировалось от 3 до 11. Команда также обнаружила, что чем короче была веревка – меньше полуметра, – тем меньше узлов на ней образовывалось, но если длина приближалась к 2 или 6 метрам, то вероятность запутывания резко возрастала, вплоть до 50 %. Если же веревка была длиннее, то вероятность сильно не возрастала.

Поэтому вы можете сколько угодно ругать свои наушники, но когда в следующий раз кропотливо будете распутывать их, попытайтесь оценить математику, скрывающуюся за ними.

Изобретения против спутывания

Запутанные телефонные шнуры породили целую индустрию. В те времена, когда люди полностью полагались на телефонные аппараты с проводом, изобретатели создали специальные устройства против спутывания: от вращающихся на 360 градусов частей до трубок, которые вставлялись в витой шнур, для того чтобы оградить людей от этого ежедневного раздражителя.

$$\log(r)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = z\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

1.12. Почему велосипедные шестерни разных размеров

Математические понятия: геометрия, передаточное отношение

В прошлом велосипеды выглядели чудаковато. В XIX веке у велосипедов были огромные передние колеса и крохотные задние колеса. Педали прикреплялись непосредственно к переднему колесу, которое могло достигать почти 5 футов (более 150 см) в диаметре, а человек должен был запрыгивать на сиденье как на лошадь. Такие велосипеды вскоре вышли из моды, отчасти из-за того, что если велосипед наезжал на кочку, то человек мог запросто перелететь через руль. Позднее производители начали делать велосипеды, используя шестерни и цепи, такое нововведение не только позволило человеку сидеть по центру велосипеда и улучшило тем самым баланс, но также позволило менять передачи в зависимости от местности. Вам необязательно менять передачи, когда вы едете по ровной поверхности, но когда вы поднимаетесь на холм, смена передачи может показать разницу между непринужденной ездой на велосипеде или толканием его в гору. Но как на самом деле работает смена передач? Каким образом они помогают ехать в гору или с горы эффективнее?

Ответ зависит от передаточного отношения. Когда вы подсоединяете шестерню большего размера к шестерне меньшего размера, то если вы проворачиваете одну, то и вторая тоже будет вращаться, но с другой скоростью. Давайте представим, что передняя шестерня в три раза больше, чем задняя. За один оборот передней шестерни задняя будет выполнять три оборота. Подумайте об этом с точки зрения окружности колеса. (Если вы помните уроки математики в школе, длина окружности равна числу Пи, умноженному на диаметр окружности.) Если диаметр передней шестерни равен 3 дюймам, то длина ее окружности равна 3π, то есть примерно 9,42 дюйма. Поэтому если вы поставите точку на крае шестерни, а потом провернете ее один раз, то путь этой точки в пространстве – если перевести его на бумагу – будет равен 9,42 дюйма.

Теперь давайте представим, что задняя шестерня равна 1 дюйму в диаметре. Тогда длина ее окружности составит 3,14 дюйма, и с каждым поворотом путь этой точки будет равен 3,14 дюйма. Но при каждом обороте передней шестерни – 9,42 дюйма – задняя шестерня должна сделать три оборота. (Согласно разнице в диаметре, кстати, передаточное отношение для этих шестерней будет составлять 3:1.)

Следовательно, вы можете сделать так, чтобы задняя шестерня вращалась три раза за одно вращение педалей (хотя вам и придется нажимать в три раза сильнее), что идеально для спуска с горы.

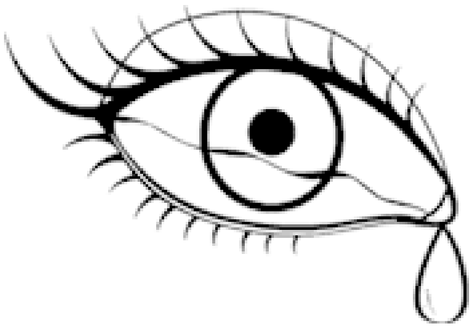
Шестерни в игрушках

Шестерни не только полезны, но с ними еще и весело играть. Во многих игрушках на рынке сейчас содержатся шестерни, включая Gears! Gears! Gears, Gear & Rotor Fun и наборы BlueLotus Rotatable Building Gears Sets. Некоторые такие игрушки продуманы до мелочей: на сайте Brickowl.com можно найти 57 разных видов шестерней для наборов Lego, включая шестерни с 40 зубцами, шестерни с 24 зубцами и внутренним сцеплением и скошенные шестерни с 20 зубцами.

1.13. Развеиваем мифы: капли дождя и слезинки имеют разную форму

Математическое понятие: геометрия

Капли дождя являются не тем, чем вы думаете. По крайней мере, их форма отличается от той, какую вы, возможно, сразу же представляете. В мультфильмах, на синоптических картах и картинках капли дождя обычно изображены в форме слезы с закругленным низом и двумя сторонами, которые сверху сужаются в одну точку.



В реальности капли дождя имеют совершенно другую форму. Все капли дождя сначала представляют собой сферические объекты, так как вода в атмосфере ловит частички дыма и пыли. Как только капелька обретет достаточный вес, она начинает падать. Когда она падает, поверхность натяжения капли – вызванная водородной связью между молекулами воды – удерживает круглую форму капли. Когда капля набирает скорость, однако, давление воздуха, действуя на нижнюю часть капли, делает ее плоской, как дно сковородки. В этот момент капля дождя больше напоминает верхнюю часть булочки для гамбургера. Если капля становится слишком большой, а это иногда случается, когда на пути к земле она сливается с другими каплями, она распадается на несколько маленьких капель – предел прочности составляет примерно 4 мм в диаметре.

Окружность капель дождя

Капли дождя отличаются по размеру. В среднем, маленькая капелька во время небольшого шторма может достигать 0,5 мм в окружности, но во время сильной бури она может достигать 5 мм в окружности.

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$$

1.14. Почему знаки дорожного движения имеют разную форму?

Математическое понятие: фигуры

Все знают, что знак «Движение без остановки запрещено» является восьмиугольником; то есть имеет восемь равных сторон. Но не все знают, почему этот знак имеет такую форму. Почему восемь сторон? Почему не три или десять?

Этому есть два объяснения.

1. В отличие от квадратных знаков, которые используются повсеместно, восьмиугольные знаки могут быть прочитаны с разных направлений. Водитель А будет знать, что водитель Б должен был остановиться, согласно знаку, даже если водитель А приближался с другой стороны и не видел лицевую сторону знака.

2. Инженеры транспортного планирования своевременно поняли, что сообщение можно донести не только с помощью слов на знаках, но и с помощью самой формы знаков. Поэтому они создали стандартизованные знаки, придерживаясь идеи, что чем больше сторон было у знака, тем о большей опасности этот знак свидетельствовал. Например, круглый знак – можно предположить, что у него бесчисленное количество сторон, – используется для запрета движения. Треугольные знаки используются для предупреждений, чтобы оповестить, что дальше дорога сужается или есть опасность диких животных на дорогах.

Так что в следующий раз, когда сядете за руль, обратите внимание на форму знаков дорожного движения. Эти формы могут спасти вам жизнь!

История знаков дорожного движения

Первый знак дорожного движения в США появился в Детройте в 1915 году и представлял собой квадратную металлическую пластину с черными буквами на белом фоне. Но именно Ассоциация государственных дорожных ведомств Миссисипи Вэлли в 1923 году настоятельно рекомендовала разнообразить формы знаков. И в 1935 году было решено, что знак «Движение без остановки запрещено» будет красным.

1.15. Почему здание Пентагона имеет такую форму?

Математическое понятие: геометрия

Пентагон – это штаб-квартира Министерства обороны США, которая находится недалеко от Вашингтона, а в переводе с английского «pentagon» означает «пятиугольник». Это здание является одним из самых больших административных зданий в мире, площадь которого в два раза превышает площадь Эмпайр-стейт-билдинг. Там работают примерно 25 000 человек. На самом деле здание Капитолия в Вашингтоне могло бы вместить в себя лишь одну из пяти сторон Пентагона. Но почему Пентагон имеет форму пятиугольника?

После начала Второй мировой войны США решили, что им нужен новый объект для их разрастающегося Военного ведомства. Был выбран Арлингтон, экспериментальная ферма под руководством Министерства сельского хозяйства, она располагалась рядом с Арлингтонским кладбищем, местом захоронения солдат и ветеранов войны. Из-за дорог и других особенностей местности это место имело пятиугольную форму, поэтому планы для нового здания Военного ведомства органично вписались в форму этого пространства. Но власти вскоре передумали строить военный объект вблизи такого эмоционального места и решили перенести его в другое место, которое раньше было месторасположением Гувер Филд, первого аэропорта Вашингтона. Менять архитектурные планы было уже поздно, так что, хотя архитекторы изменили некоторые элементы дизайна, форма пятиугольника осталась.

К счастью для всех, у такой формы были свои преимущества. Пройти из одной точки здания в другую можно меньше чем за десять минут, и архитекторы могли с легкостью расположить объекты и коммуникации общего пользования по всему зданию.

Пентагон

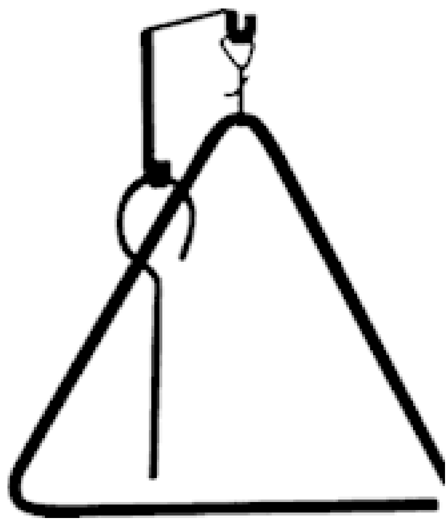
Пентагон охватывает примерно 583 акра, а его площадь составляет более 6 миллионов квадратных футов. В здании семь этажей… о которых нам известно.

1.16. Треугольники

Математические понятия: фигуры, геометрия

Вы когда-нибудь замечали, как часто треугольники появляются в вашей повседневной жизни? Неважно, едете ли вы на работу на велосипеде (в центре велосипедной рамы есть треугольник) или мчитесь по автомагистрали (можно увидеть треугольники в опорах линий электропередачи), но треугольники возникают вновь и вновь. Есть ли в этом причина или производители велосипедов и инженеры используют эту фигуру с тремя сторонами развлечения ради?

Оказывается, есть хорошее объяснение тому, что треугольники так часто возникают в среде, созданной руками человека. Треугольники – на редкость устойчивая фигура, а это делает их идеальным выбором для структур, которые должны быть стабильными. Представьте, что углы треугольника соединены шарнирами: сами по себе углы будут подвижными, а вот треугольник будет устойчивым. Вы даже можете представить треугольник из соломинок, изгибы которых будут образовывать углы. Несмотря на изгибы, треугольник останется стабильным, будто сделан из сплошного пластика. Можете ли вы назвать другие места, где вы видели треугольники?



Концерт для треугольника

Треугольник – музыкальный инструмент – впервые исполнил соло-партию в Концерте для фортепиано с оркестром № 1 Франца Листа. Один скептически настроенный критик окрестил эту партию «Концертом для треугольника».

1.17. Почему крышки люков круглые?

Математические понятия: фигуры, геометрия

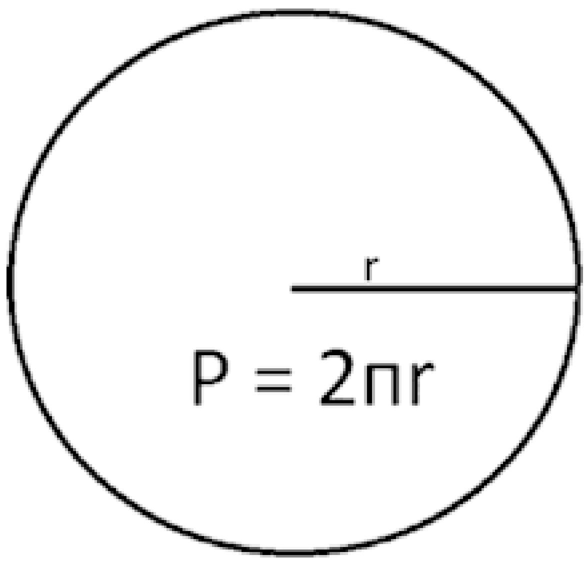
Небо голубое. Камни твердые. Трава зеленая. Существуют аспекты в мире, с которыми мы сталкиваемся каждый день, это часть нашей жизни, которая нам настолько близка, что мы о ней почти не задумываемся. Иногда математика может заставить нас взглянуть на эти повседневные вещи под другим углом, с новым пониманием.

Одной из таких вещей являются крышки люков. Они обычно круглые, но почему? Разве им не подойдет любая другая форма?

Оказывается, что круг – это идеальная форма, чтобы закрыть люк, потому что круг является одной из немногих форм, которая не может провалиться в отверстие, имеющее ту же форму. Чтобы в этом разобраться, представьте люк в форме треугольника. Допустим, этот треугольник не является равносторонним. (Возможно, одна сторона равна одному футу, а две других равны двум футам каждая.) Если мы поднимем крышку так, чтобы она стояла перпендикулярно земле, то короткой стороной треугольника крышка может с легкостью упасть в люк. А все это потому, что две другие стороны люка будут иметь длину в два фута, а объект длиной в один фут может запросто поместиться в отверстие длиной в два фута. Единственным способом предотвратить падение крышки будет создание крышки такой формы, чтобы при любом повороте ни одна сторона не была больше или меньше любой другой стороны. Круг под это описание подходит идеально.

Люки в космосе

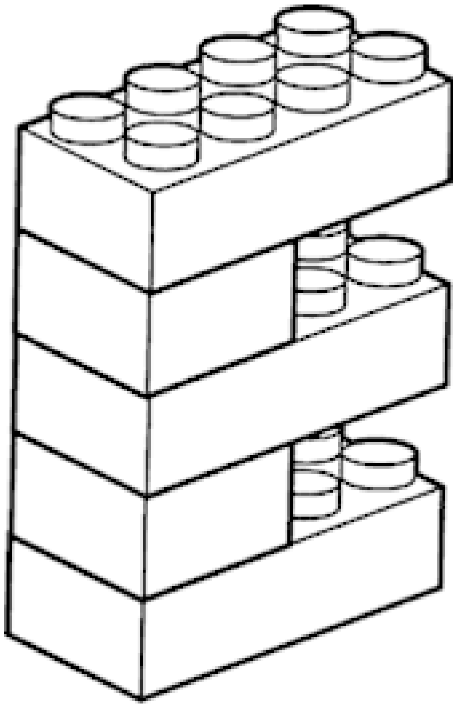
Ходят слухи, что в результате испытания ядерного оружия под землей в 1950-х одна крышка люка улетела в космос. Эта легенда не подкреплена доказательствами, но возможно, берет свое начало из реального случая, произошедшего во время операции Plumbbob, серии испытаний ядерного оружия в 1957 году. Во время одного такого испытания кусок металла весом 2000 фунтов взлетел в воздух со скоростью 66 км/сек (41 миля в секунду). Эту крышку так нигде и не нашли.



1.18. Наборы Lego

Математическое понятие: сложная система

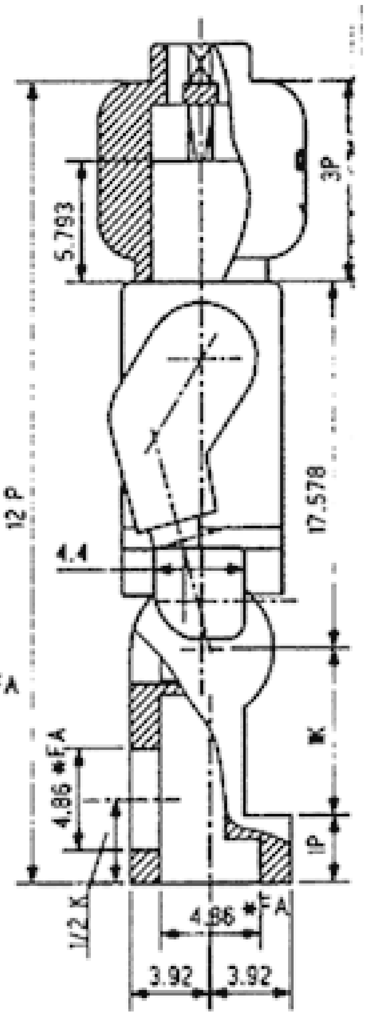
Мир игрушек – это очередное место, где можно найти математику. Когда я был ребенком, я думал, что наборы Lego – это лучшая игра во всем мире. Было в этом что-то крайне отрадное, когда ты сидишь перед коробкой разобранного конструктора и думаешь, что хочешь построить. Как оказалось, наборы Lego предназначены не только для игр. Они также могут показать аспекты математики, которые в других случаях не были бы очевидными.



А именно, конструктор Lego играет роль в изучении сложной системы. Марк Чангизи и другие исследователи из Института Дьюка недавно провели исследование, чтобы получить ответ на вопрос, который кажется обманчиво простым. У всех систем есть компоненты: в телах есть клетки, у компьютера есть процессор, в экосистемах есть птицы и деревья. Исследователи хотели узнать, если система – неважно, состоит ли она из животных, клеток или электронных частей, – становится больше, увеличивается ли количество разновидностей компонентов? Сравним внутренний механизм наручных часов и старинных напольных часов. В напольных часах точно будет больше отдельных частей, но попадут ли эти детали в большее количество категорий, чем у наручных часов?

Исследователи доказали, что количество категорий в разных системах действительно возрастает по мере того, как масштаб объекта увеличивается. Они составили график и увидели, что у количества категорий и количества компонентов есть интересная закономерность. А именно, число разновидностей компонентов возрастало пропорционально количеству деталей, согласно степенному закону. (Степенная функция выглядит как $Y = kXa$. Y и X – это две переменные, которые мы хотим изучить; в этом случае Y обозначает количество компонентов, а X – количество разновидностей компонентов. В этой формуле k – это любое число, называемое константой, а a – это показатель переменной X.) Исследование также показало, что хотя количество разновидностей компонентов возросло вместе с количеством деталей, скорость замедлилась, когда количество деталей становилось все больше и больше.

Но когда они посчитали количество деталей и их разновидность в наборах Lego, они увидели, что количество разновидностей деталей росло быстрее, чем в других системах. Другими словами, чем больше набор Lego, тем больше разновидностей деталей в нем содержится. Любители Lego, коим является сам Чангизи, опасаются, что такой рост возник из-за разницы дизайна разных наборов. На сегодняшний день наборы Lego выпускаются в разных тематиках, включая «Звездные войны», «Ниндзяго», «Черепашек-ниндзя» и «Властелина колец». Некоторые опасаются, что такой количественный рост привел к специализациям деталей, то есть большое количество деталей подходит только одной теме или даже одному набору. У любителей оригинальных деталей Lego такая перемена вызывает только грусть. Но игрушки Lego продолжают быть разносторонними в другом смысле: они приходятся по душе широкому сегменту населения, включая математиков.



Мастер Lego

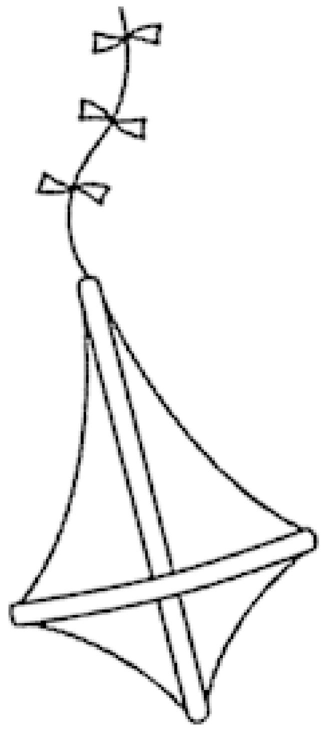
Кто занимается дизайном наборов Lego, которые мы можем купить в магазинах? Эти таланты также работают над моделями в полный рост в парках Legoland по всему миру. Чтобы стать мастером Lego, потребуются годы практики, и эти специалисты часто выявляются на публичных конкурсах.

1.19. Давайте полетим на… Четырехугольнике

Математическое понятие: фигуры

Без воздушных змеев весна и лето просто не были бы самими собой. Но их очарование выходит за рамки трепета управления куском материи во время легкого ветра. Традиционные американские воздушные змеи являются хорошим примером особого вида четырехугольника. Обычный воздушный змей имеет четыре стороны, как квадрат или прямоугольник. Но в отличие от этих двух фигур, стороны воздушного змея группируются друг с другом по длине. Поэтому две короткие стороны примыкают друг к другу так же, как и две длинные стороны. Именно такое расположение сторон придает воздушному змею эту отличительную форму вытянутого ромба.

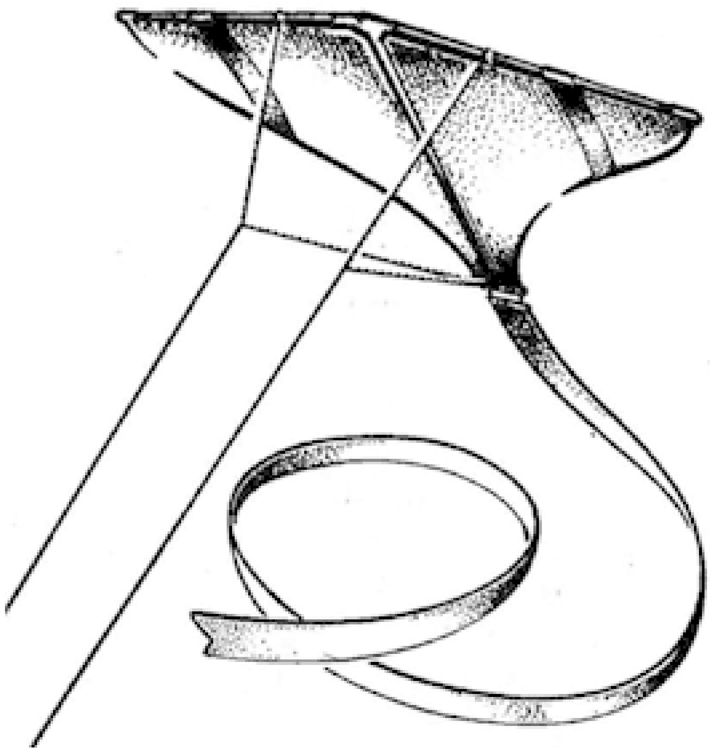
Форма воздушного змея интересна также и тем, как множество змеев может быть сложено, чтобы покрыть плоскость (которая является идеализированной плоской поверхностью, как лист бумаги, не имеющий толщину). Вы можете взять любого воздушного змея с любым углом между сторонами и использовать его вместе с бесчисленным множеством идентичных змеев, чтобы полностью покрыть плоскость так, чтобы между отдельными фигурами не оставалось зазоров. Такое покрытие называется мозаичным размещением. (Представьте плитку в вашей ванной, тогда вы поймете, о чем идет речь.) Воздушные змеи играют роль и в мозаике Пенроуза – особом виде разбиения плоскости, где отдельные детали формируют узоры, которые не повторяются в обычном порядке.



Форма воздушного змея также определяет свои идеальные летные условия. Воздушные змеи в форме ромба лучше всего летают во время легкого ветра, но им нужен хвост для устойчивости. Треугольные змеи могут летать в практически безветренную погоду. А шестисторонние змеи, которые появились в Японии сотни лет назад, очень маневренны, их обычно используют в соревнованиях. (Если вы заставите упасть воздушного змея противника, то вы выиграли!)

Площадь воздушного змея

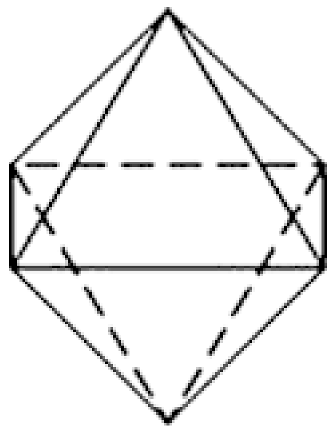
Существует два способа узнать площадь воздушного змея. Если вы знаете длину двух диагоналей, тогда вы можете умножить эти длины и разделить результат на 2. Или если вы знаете длину короткой и длинной стороны, а также градус угла между ними, тогда вы можете воспользоваться тригонометрией: умножьте длину короткой стороны на длинную, а потом умножьте результат на синус угла.



1.20. Что общего у герпеса и столовой соли?

Математическое понятие: Платоновы тела

Не все трехмерные фигуры созданы равными. Подумайте о тех фигурах, которые существуют или могли бы существовать. Некоторые, как форма картофелины, бугорчатые и неровные. Другие, как звезда, аккуратные, с прямыми линиями. Шары гладкие и круглые, а фигурки в тетрисе имеют острые углы.



Однако некоторые фигуры особенные. Они обладают характеристиками, которые изучались тысячелетиями. Такая историческая группа включает в себя платоновы тела. Эти трехмерные фигуры названы в честь философа, который жил в Афинах в 400-х годах до н. э., они построены с помощью двухмерных фигур, таких, как квадраты, треугольники или пятиугольники. Но двухмерные фигуры должны соответствовать некоторым условиям, чтобы быть способными превратиться в платоново тело.

1. Во-первых, они должны быть правильными, то есть все их линии должны быть одной длины и все углы должны находиться под одинаковым градусом.

2. Во-вторых, они должны совпадать, то есть быть идентичными. Если вы положите одну фигуру на другую, то они должны полностью совпасть по размеру. (Другими словами, вы не сможете сделать платоново тело из треугольников разного размера.)

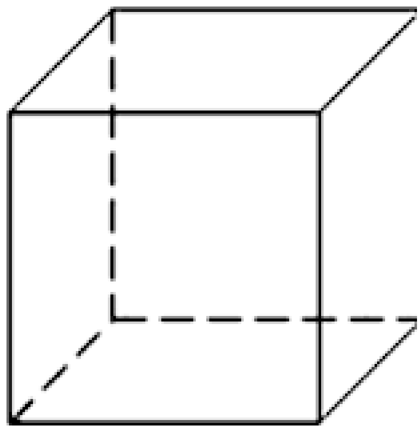
3. В-третьих, в каждой вершине – место на каждой фигуре, где соединяются линии, – должно быть одинаковое количество фигур.

Существуют пять и только пять платоновых тел.

1. Тетраэдр имеет четыре стороны, все они являются треугольниками.

2. Гексаэдр, или куб, состоит из шести квадратов.

3. Октаэдр имеет восемь сторон и выглядит как две пирамиды, соединенные основаниями. (Как и у тетраэдра, все стороны октаэдра являются треугольниками.)

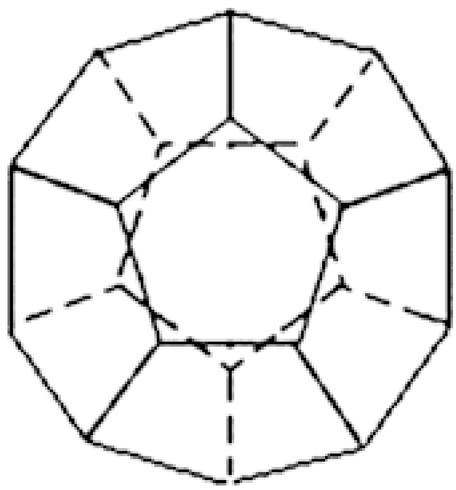


4. Додекаэдр имеет двенадцать сторон, каждая сторона представляет собой пятиугольник.

5. Икосаэдр имеет двадцать сторон, каждая из которых является треугольником.

А если вы задумались, почему существует только пять платоновых тел, то у Евклида – древнегреческого математика – есть ответ на этот вопрос. Он нашел доказательство и включил его в Книгу 13 в его «Началах». Найдите этот труд, если вам интересно.

Но эти фигуры считались не просто математическими загадками. В своем диалоге «Тимей» Платон, греческий философ, утверждает (от лица одного из персонажей), что каждое тело соответствует одному элементу природы. Тетраэдр ассоциировался с огнем, куб – с землей, октаэдр – с воздухом, икосаэдр – с водой, а додекаэдр – с расположением созвездий в небе.



Сотни лет спустя, в конце 1500-х, Иоганн Кеплер использовал платоновы тела, чтобы объяснить структуру Солнечной системы. Он хотел понять, почему планеты расположены так, как они расположены. Кеплер сопоставил орбитам (которые он представил как круг) планет платоновы тела. Начиная с внутренней части Солнечной системы, порядок платоновых тел начинался с октаэдра, который соответствовал Меркурию, затем шли икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр и куб. (Согласно Кеплеру, существовали лишь пять планет.)

И хотя объяснения Кеплера оказались неверными, один факт остался неоспоримым: платоновы тела действительно являются частью природы. Например:

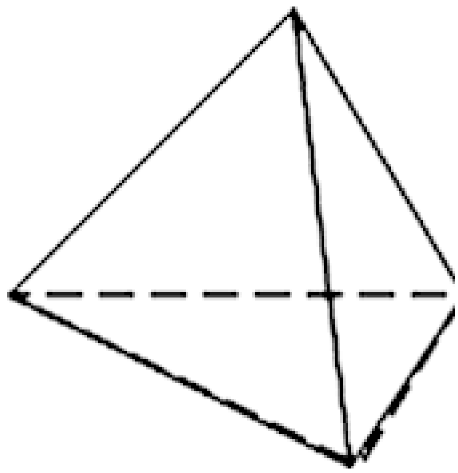
• Многие минеральные кристаллы принимают форму кубов, включая столовую соль (хлористый натрий); если бы вы прошлись по берегу Мертвого моря, то обязательно наступили бы на большие кубы соли, которые прибило к берегу из глубин моря.

• Алмазы и плавик часто образуют кристаллы в форме октаэдров.

• Такие вирусы, как герпес, часто имеют форму икосаэдров.

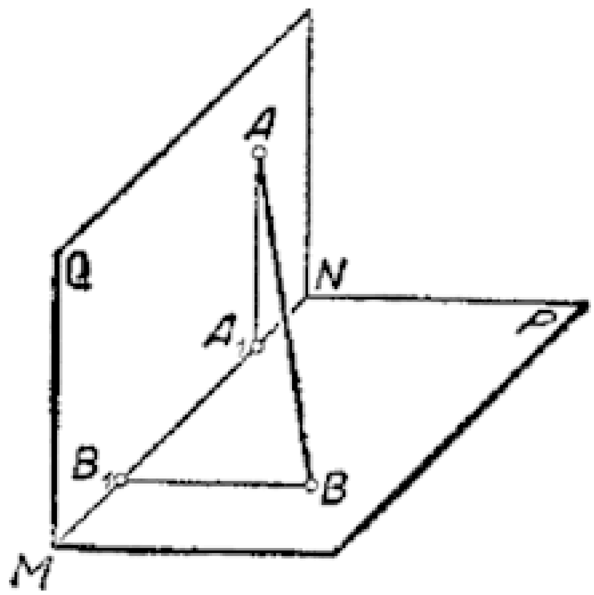
• Атомы часто образуют связи в форме тетраэдра. Молекулы метана и ионы аммония состоят из четырех атомов водорода в форме тетраэдра в окружении атома углерода или азота.

Платоновы тела – это не просто что-то, записанное в древнегреческих трудах, они в буквальном смысле летают в воздухе, которым мы дышим, и находятся в земле, по которой мы ходим.



Двугранный угол

Каждое платоново тело содержит так называемый двугранный угол, который является внутренним углом между двумя гранями. Так как каждая грань платонова тела одинакова, значит, все двугранные углы этого тела тоже будут равными. Например, в кубе двугранный угол равен 90 градусам, как и угол при вершине. Но в тетраэдре двугранный угол равен 70,6 градуса, а угол при вершине – 60 градусам. Чем больше двугранный угол, тем больше тело будет напоминать шар.


A
Q
N
A_1
P
B_1
B
M

1.21. Почему на мячике для гольфа есть впадинки?

Математические понятия: физика, геометрия

Когда вы смотрите, как Тайгер Вудс делает первый удар на открытом чемпионате США по гольфу, вы можете не представлять, что за этим моментом скрывается математика, которая помогает его мячу лететь сквозь воздух. Но это правда, а все благодаря геометрии впадинок на мяче.

Сотни лет назад мячи для гольфа делали из дерева или резины, а поверхность их была абсолютно гладкая. Согласно легенде в мире гольфа, когда гольфисты вновь и вновь использовали один мяч, они заметили, что старые, неровные мячи летели дальше, чем новые, гладкие. Позже ученые поняли, что ямки или впадинки позволяют воздуху вокруг мяча оставаться ближе к изогнутой форме мяча, уменьшая турбулентность в воздухе за мячом, которая и вызывает торможение. Традиционно ямки имеют форму круга, но недавно их стали делать в форме шестиугольников. Производитель Callaway утверждает, что шестиугольные ямки покрывают больше поверхности мяча, следовательно, на нем меньше плоской поверхности между каждой ямкой и, естественно, меньше торможения.

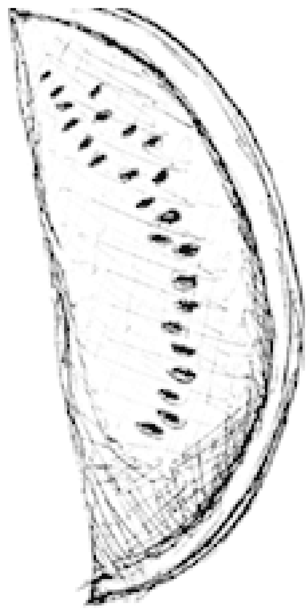
Ямки

Мячи для гольфа бывают разных размеров, но в основном имеют 300–500 ямок. Обычный мяч для гольфа имеет 336 ямок.

1.22. Гаусс и пицца

Математическое понятие: фигуры

Проведите эксперимент: возьмите газету и оберните ей арбуз, словно хотите подарить его другу на день рождения. Что же получается? Неважно, как усердно вы стараетесь, но на нем всегда будут складки и загибы, которые будут торчать в разные стороны; бумага никогда не будет лежать ровно на поверхности арбуза. (Чтобы бумага повторила форму арбуза, вам необходимо взять ножницы и разрезать ее на части, но даже в этом случае вам скорее всего, придется время от времени приглаживать складки.) В действительности невозможно сложить такую ровную поверхность, как лист бумаги, в форму шара, не разрезая и не сгибая его.



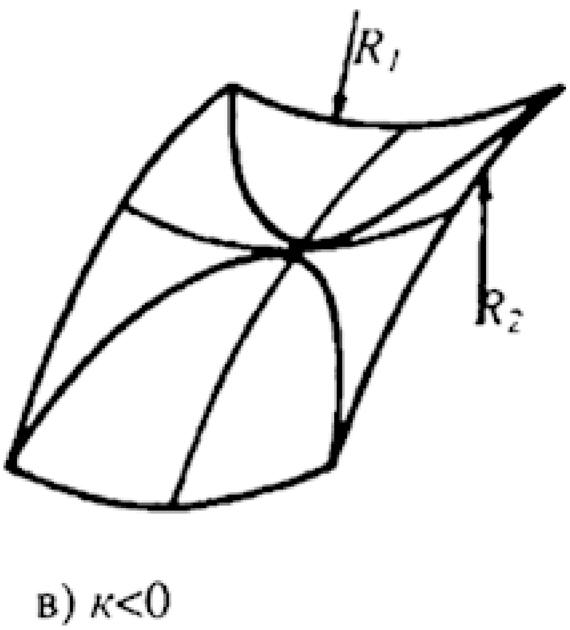
Обратное действие будет таким же трудным. Очистите грейпфрут так, чтобы у вас остался один кусок в форме шара, и попытайтесь его разгладить. Шкурка неизбежно порвется. Вы не сможете ее полностью разгладить, если не порежете или не порвете ее. Но почему превращение плоской поверхности в круглую или круглой в плоскую такое трудное? Что мешает плоской и круглой поверхностям спокойно преобразовываться одна в другую?

Ответ скрывается в куске пиццы и в работах Карла Фридриха Гаусса, немецкого математика, который родился в 1777 году и умер в 1855 году. (Гаусс занимает особое место в истории математики. Его считают одним из величайших математиков со времен Древней Греции и обычно называют Принцем Математики. Не забывайте, что он был учителем Августа Фердинанда Мебиуса – см. главу 1.7.) Гаусс доказал теорему об искривлении поверхности, которая известна как *theorem egregium* (от лат. – «выдающаяся теорема»).

Чтобы понять теорему Гаусса, представьте человека, которого уменьшили до одного дюйма и поместили на поверхность цилиндра. Если человек начинает идти, он может найти множество маршрутов, которым он может следовать. Например, он может пройти вдоль верхушки цилиндра по прямой линии. Или он может пройти вдоль изогнутой части цилиндра по кругу, пока не вернется в отправную точку. (Нам придется представить, что этот человек надел уж очень липкие ботинки.) Он также мог бы идти по спирали, кружась вокруг цилиндра и одновременно продвигаясь вдоль его длины. Теорема Гаусса гласит, что можно измерить кривизну этого цилиндра, используя все эти маршруты, их нужно умножить друг на друга, и получится значение. Плоская поверхность имеет нулевую кривизну – в конце концов, она плоская, – а криволинейная траектория имеет положительную кривизну. (Вогнутая кривая – которая выгнута внутрь – будет иметь отрицательную кривизну.) Когда вы умножаете кривизны, то в итоге умножаете положительное значение на ноль, в результате чего получается ноль (так как любое число, умноженное на ноль, дает ноль). Получается, что цилиндр имеет нулевую гауссовскую кривизну.

В теореме Гаусса также говорится о поверхности фигуры. Утверждается, что вы можете сгибать и растягивать поверхность и она будет иметь ту же гауссовскую кривизну, что и изначально, до тех пор, пока вы не нарушите ее целостность. Поэтому неважно, как сильно вы будете мять или деформировать цилиндр, гауссовская кривизна от этого не изменится.

Это приводит нас к пицце. Если вы когда-нибудь пытались держать большой кусок пиццы ровно в руке, особенно если на этом куске много расплавленного сыра и пеперони, то вы знаете, что конец пиццы всегда падает и вам становится трудно его есть. С другой стороны, если вы сложите кусок продольно, то конец вовсе не падает, а смотрит прямо, а начинка остается там, где ей и место. В чем же дело? Итак, если вы посчитаете кривизну не согнутого куска пиццы, то получите ноль. (Любые возможные траектории, по которым может пройти однодюймовый человек на поверхности куска являются плоскими.) А это значит, что вы можете сколько угодно двигать или сгибать этот кусок, но его кривизна будет все равно равна нулю.



в) $\kappa<0$

А теперь посмотрите на кусок пиццы, конец которого смотрит вниз. Траектория от корочки до конца будет изогнутой, а траектория от одной стороны до другой – прямой. Теперь если мы сложим кусок, то траектория от одной стороны до другой будет кривой, а от корочки до конца – прямой.

Что же все это значит? Неважно, как согнут кусок, одна возможная траектория должна быть прямой (так как плоская кривая имеет нулевую гауссовскую кривизну, и нам нужен ноль в расчетах, чтобы получить в результате ноль). Если траектория между сторонами плоская, то траектория от начала до конца будет кривой. Если траектория от начала до конца плоская, то траектория между сторонами будет кривой.

Вернемся к изначальной задаче: мы не можем аккуратно обернуть арбуз бумагой или разровнять кожуру от грейпфрута потому, что плоские и круглые объекты имеют разную гауссовскую кривизну. Так что в следующий раз, когда будете заказывать пиццу, подумайте о гауссовской кривизне и смело сгибайте ваши куски пиццы.

Карл Гаусс

Карл Гаусс был вундеркиндом. Однажды в школе его попросили сложить все числа от 1 до 100. Сообщается, что он нашел решение за считанные секунды. Он предложил разбить сумму на 50 пар чисел – 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и т. д., сумма каждой такой пары составляла 101. Поэтому результат составлял 101 × 50, или 5050.

1.23. Геодезические купола

Математическое понятие: геодезический купол

Вы когда-нибудь были в тематическом парке Epcot и стояли под гигантской сферой под названием «Космический корабль “Земля”»? Если да, то вы знакомы со структурой геодезического купола. Геодезические купола состоят из треугольных деталей, расположенных рядом друг с другом так, что вершина одной из них находится рядом с основанием другой. Таким образом, вместо гладкой сферы или купола мы получаем слегка угловатый геодезический купол (напоминающий диско-шар).

Геодезические сферы и купола (разрезанные напополам сферы) чрезвычайно легкие и прочные, они стали популярными в середине 1900-х благодаря Бакминстеру Фуллеру, инженеру, который хотел с помощью изобретений решить человеческие проблемы. Создание структуры из треугольных деталей дает более стабильную конструкцию, нежели из квадратных. Фуллер представлял геодезические купола как эффективное, доступное жилье. Экономия возникала бы из формы: сферы покрывают определенное пространство минимальной площадью поверхности, тем самым в теории снижая затраты на строительные материалы. Открытое внутреннее пространство также позволяет воздуху легко перемещаться, тем самым потенциально сокращая затраты на обогрев и кондиционирование помещения. На самом деле, геодезические купола – это воплощение сентенции Фуллера «делать больше с меньшими затратами».

Вы также можете думать о геодезических куполах как о платоновых телах (см. главу 1.20). Как и эти красивые фигуры, геодезические купола созданы из одного вида многоугольников – треугольников, – только в геодезических куполах эти треугольники как бы выталкиваются так, что они становятся ближе к линии воображаемой сферы, обволакивающей купол. И, как и в случае с платоновыми телами, геодезические купола демонстрируют мощь и величие геометрии.

Если вы хотите своими глазами увидеть геодезический купол, вам не обязательно ехать в Disney World. Его можно увидеть и в ботаническом саду Миссури в Сент-Луисе, если посетите Климатрон, купол высотой 70 футов и 175 футов в диаметре, он построен из алюминиевых жердей и панелей из оргстекла.

Конец ознакомительного фрагмента.