Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Высшая школа экономики и менеджмента

С. А. АНИКИН
М. А. МЕДВЕДЕВА
О. И. НИКОНОВ

# МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

С. А. Аникин
О. И. Никонов
М. А. Медведева

# МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

*Рекомендовано методическим советом УрФУ*
*в качестве* ***учебного пособия*** *для студентов,*
*обучающихся по программе магистратуры по направлениям*
*подготовки 080500, 230700, 080100, 080200, 010300*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631
А67

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. Г. А. Тимофеева (завкафедрой «Высшая и прикладная математика» УрГУПС);
д-р физ.-мат. наук, проф. В. И. Максимов (Ин-т математики и механики УрО РАН)

Научный редактор д-р физ.-мат. наук Х. Н. Астафьев

**Аникин, С. А.**
**А67** Математика для экономистов: учебное пособие / С. А. Аникин, О. И. Никонов, М. А. Медведева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 72 с.
ISBN 978-5-7996-1108-8

В пособии рассматриваются математические модели в финансах и страховании. Первые две главы посвящены изложению классических подходов к моделированию ситуаций и процессов в названных областях, в третьей главе приводится вводное описание подхода, характерного для современной математической и экономико-математической литературы.

Рекомендовано для студентов, обучающихся по направлениям 080500 «Бизнес-информатика», 230700 «Прикладная информатика», 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Библиогр.: 29 назв. Табл. 3. Рис. 20.

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631

ISBN 978-5-7996-1108-8

© Уральский федеральный университет, 2014

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием финансовых и страховых инструментов. В первой главе приводятся классические результаты, восходящие к работе Г. Марковица, относящиеся к теории портфельных инвестиций. Дается математическая постановка задачи и ее решение как собственно для задачи Г. Маковица, так и для ее модификации, принадлежащей Дж. Тобину. На примерах иллюстрируется важная роль ковариаций в описываемых построениях. Также первая глава посвящена модели ценообразования на рынке капитала (CAPM), параметрам $\alpha$ и $\beta$ ценной бумаги, обобщениям модели CAPM.

Вторая глава работы посвящена математическим моделям в страховании. Здесь вводятся основные понятия, связанные с моделированием: функция выживания, кривая смертей, интенсивность смертности. Далее рассматриваются аналитические законы смертности: модели де Муавра, Вейбула, Мэйкхама и Гомперца. Приведен анализ моделей краткосрочного и долгосрочного страхования.

В третьей главе рассматриваются вопросы, относящиеся к введению в современный стохастический анализ. В отличие от первых двух глав, в которых рассматриваются классические подходы к построению стохастических моделей, в данной главе вводятся понятия, характерные для современных подходов к стохастическому моделированию. Определяется стохастический базис, поток $\sigma$-алгебр, фильтрация и стохастический процесс, согласованный с фильтрацией. Намечаются подходы к моделированию финансовых рынков, основанные на развиваемой теории.

Цель – представить в доступной для обучающихся форме основные понятия и положения теории портфельных инвестиций, модели ценообразования на рынке капитала, а также основные понятия страховой математики и стохастического финансового анализа.

# 1. ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

## 1.1. Теория Марковица–Тобина–Шарпа

В процессе составления портфеля финансовых активов или портфеля мероприятий, направленных на получение финансовой прибыли, (проекты, заказы, инвестиции) обычно преследуется цель – получить максимальный доход при минимальном риске. Однако стремление получить высокий доход обычно сопряжено с высоким риском. Теория портфеля позволяет находить рациональные компромиссы между ожидаемым доходом и риском финансовых операций.

Начало формирования теории портфеля связывают с работой Г. Марковича, впоследствии награжденного Нобелевской премией за свои результаты в этой области. Названная теория была развита для портфелей ценных бумаг, поскольку вложения в ценные бумаги можно теоретически рассматривать как бесконечно делимые, что упрощает построения, а богатая статистика позволяет достаточно точно аппроксимировать вероятностные характеристики этих финансовых инструментов.

Пусть рассматривается набор из $N$ видов ценных бумаг, причем доходность (норма дохода) ценной бумаги $i$-го вида описывается *случайной величиной* $r_i$. Портфель мы ассоциируем с $N$-мерным вектором $y$, каждая компонента которого $y_i \geq 0$ соответствует доле содержания ценных бумаг $i$-го вида (в их денежном выражении) в портфеле: $\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$. Ожидаемая (средняя) доходность портфеля находится по формуле

$$M_p = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \tag{1.1}$$

где $x_i$ – математическое ожидание (ожидаемое значение) доходности бумаги $i$-го вида, $x_i = M(r_i)$. Как правило, доходность измеряется в долях единицы или в процентах (числу 0,1 соответствует 10 %, 0,25 – 25 % и т. д.).

Ожидаемый разброс, отклонение доходности портфеля от среднего значения находится как среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_p^2 = M\left(\sum_{i=1}^{N} y_i r_i - M_p\right)^2.$$

Можно указать другое выражение для вычисления $\sigma_p^2$:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} y_i y_j \sigma(r_i)\sigma(r_j)\mathrm{cor}(r_i, r_j), \qquad (1.2)$$

где символ $\sigma_p^2$ означает дисперсию; символ $\mathrm{cor}(r_i, r_j)$ – коэффициент корреляции между величинами $r_i$ и $r_j$. Если портфель состоит из некоррелированных между собой ценных бумаг, то для разброса доходности портфеля справедлива следующая формула: $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \sigma_i^2(r_i)$.

Среднеквадратичное, или стандартное, отклонение $\sigma_p$ – показывает меру отклонения доходности портфеля от ее среднего значения. Эта величина $\sigma_p$, называемая иногда *степенью неопределенности*, и трактуется в рамках излагаемого подхода как *риск портфеля*, она измеряется в тех же единицах, что и доходность.

Стоимость (полезность) некоторого финансового результата, который характеризуется случайной величиной, может быть оценена как ее среднее значение, скорректированное с учетом премии за риск. В связи с этим стоимость портфеля можно оценить с помощью параметров $M_p$ и $\sigma_p$. Эти параметры являются ключевыми в теории портфеля.

Приведем пример расчета ожидаемой доходности и риска портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг. Предположим, что ожидаемые доходности $x_A$ акций *A* и $x_B$ акций *B* равны 20 и 40 % соответственно; $\sigma_A$ = 10 %, $\sigma_B$ = 50 %. Рассмотрим портфель, состоящий из $y \cdot 100$ % акций *B* и $(1-y)\cdot 100$ % акций *A*. Интерес представляет взаимосвязь доходности портфеля и риска при разных долях акций *A* и *B*, в частности, возможность минимизации риска путем рационального формирования портфеля. Результаты расчетов приведены в табл. 1.1 и на рис. 1.1. В каждой строке таблицы показаны значения риска портфеля $\sigma_p$, соответствующие корреляции и доходности.

Ожидаемая доходность портфеля рассчитана по формуле (1.1)

$$\mu = M_p(y) = yM_B + (1-y)M_A = y \cdot 40 + (1-y)\cdot 20.$$

Риск портфеля $\sigma_p$ найден в соответствии с равенством (1.2)

$$\sigma_p = \sqrt{y^2\sigma_A^2 = (1-y)^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B\mathrm{cor}(r_A, r_B)},$$

где $\mathrm{cor}(r_A, r_B)$ – корреляция доходностей акций *A* и *B*,

$$\mathrm{cor}(r_A, r_B) = \frac{\mathrm{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A\sigma_B};$$

$$\mathrm{cor}(r_A, r_B) = M[(r_A - x_A)(r_B - x_B)].$$

Таблица 1.1

Стандартные отклонения доходности портфеля ($)

| $\mathrm{cor}(A,B)$ | Доля акций $B$, % ($y$) | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 10 | 17 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| | Доходность портфеля $\left(M_p(y)\right)$ | | | | | | | | | | | |
| | 20 | 22 | 23,40 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 |
| –1 | 10 | 4 | 0,20 | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 |
| –0,8 | 10 | 5,83 | 5,32 | 6 | 10,30 | 15,62 | 21,21 | 26,91 | 32,65 | 38,42 | 44,20 | 50 |
| –0,6 | 10 | 7,21 | 7,52 | 8,25 | 12,17 | 17,09 | 22,36 | 27,78 | 33,29 | 38,83 | 44,41 | 50 |
| –0,4 | 10 | 8,37 | 9,20 | 10 | 13,78 | 18,44 | 23,45 | 28,64 | 33,91 | 39,24 | 44,61 | 50 |
| –0,2 | 10 | 9,38 | 10,63 | 11,49 | 15,23 | 19,70 | 24,49 | 29,46 | 34,53 | 39,65 | 44,81 | 50 |
| 0 | 10 | 10,30 | 11,88 | 12,81 | 16,55 | 20,88 | 25,50 | 30,24 | 35,13 | 40,05 | 45,01 | 50 |
| 0,2 | 10 | 14,14 | 13,01 | 14 | 17,78 | 22 | 26,46 | 31,05 | 35,72 | 40,45 | 45,21 | 50 |
| 0,4 | 10 | 11,92 | 14,06 | 15,10 | 18,92 | 23,07 | 27,39 | 31,81 | 36,30 | 40,84 | 45,41 | 50 |
| 0,6 | 10 | 12,65 | 15,03 | 16,12 | 20 | 24,08 | 28,28 | 32,56 | 36,88 | 41,23 | 45,61 | 50 |
| 0,8 | 10 | 13,34 | 15,94 | 17,09 | 21,02 | 25,06 | 29,15 | 33,29 | 37,44 | 41,62 | 45,80 | 50 |
| 1 | 10 | 14 | 16,80 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 |