



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт
фундаментального
образования**

**Т. А. МАТВЕЕВА
Н. Г. РЫЖКОВА
Л. В. ШЕВЕЛЕВА**

МАТЕМАТИКА

Курс лекций

Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Т. А. Матвеева, Н. Г. Рыжкова, Л. В. Шевелева

МАТЕМАТИКА

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве курса лекций для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки
230400.62 – Информационные системы и технологии,
090900.62 – Информационная безопасность*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 51(042.4)
ББК 22.1 я73-2
М33

Рецензенты:

проф., д-р физ.-мат. наук В. И. Гребенников (Институт физики металлов УрО РАН);

кафедра информационных технологий ГАОУ ДПО Свердловской области «Институт развития образования» (завкафедрой, проф., д-р пед. наук Л. И. Долинер)

Научный редактор – проф., д-р физ.-мат. наук Д. В. Александров

Матвеева, Т. А.

М33 Математика :  / Т. А. Матвеева, Н. Г. Рыжкова, Л. В. Шевелева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 216 с.

ISBN 978-5-7996-1194-1

В работе представлен материал по курсу математики, содержание которого соответствует учебным программам бакалавриата большинства инженерно-технических направлений в первом семестре.

УДК 51(042.4)
ББК 22.1 я73-2

ISBN 978-5-7996-1194-1

© Уральский федеральный университет, 2014

Оглавление

Введение	7
I. Алгебра матриц.....	8
Лекция 1. Матрицы и определители, их характеристики	8
1.1. Понятие матрицы	8
1.2. Определители второго, третьего, n -го порядка.....	10
1.3. Свойства определителей.....	12
1.4. Разложение определителя по элементам строки или столбца	15
1.5. Вычисление определителей n -го порядка (2 метода)	17
Лекция 2. Алгебра матриц.....	19
2.1. Основные операции над матрицами и их свойства.....	19
2.2. Обратная матрица	22
2.3. Решение матричных уравнений	25
2.4. Невырожденные системы линейных уравнений с неизвестными.....	26
II. Алгебра векторов	32
Лекция 3. Векторы, линейная зависимость векторов	32
3.1. Вектор. Линейные операции над векторами	32
3.2. Линейная зависимость векторов.....	34
Лекция 4. Линейные операции над векторами	39
4.1. Базис. Координаты вектора	39
4.2. Линейные операции над векторами, заданными в коор- динатной форме	41
4.3. Проекция вектора на ось	45
Лекция 5. Скалярное и векторное произведения векторов	47
5.1. Скалярное произведение двух векторов	47
5.2. Векторное произведение двух векторов	50
Лекция 6. Смешанное произведение трех векторов	54
6.1. Смешанное произведение трех векторов.....	54

III. Аналитическая геометрия	57
Лекция 6 (продолжение). Начала аналитической геометрии.	57
6.2. Предмет аналитической геометрии	57
Лекция 7. Плоскость и прямая в пространстве	61
7.1. Плоскость в пространстве	62
7.2. Прямая в пространстве	64
Лекция 8. Кривые второго порядка на плоскости	67
8.1. Основные понятия.....	67
8.2. Исследование формы кривых второго порядка по их каноническим уравнениям	69
8.3. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду	76
Лекция 9. Поверхности второго порядка	80
9.1. Основные понятия.....	81
9.2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям	82
9.3. Решение типичных задач.....	92
IV. Элементы линейной алгебры	96
Лекция 10. Линейные пространства	96
10.1. Линейные пространства.....	96
10.2. Примеры линейных пространств.....	97
10.3. Примеры нелинейных пространств	99
10.4. Линейная зависимость элементов линейного пространства	100
Лекция 11. Размерность и базис линейного пространства	102
11.1. Ранг матрицы. Базисный минор.....	102
11.2. Элементарные преобразования матрицы.....	106
11.3. Размерность и базис линейного пространства	107
11.4. Примеры базисов конкретных линейных пространств	109
11.5. Переход от одного базиса к другому.....	110
11.6. Связь координат элемента линейного пространства в старом и новом базисе.....	111
Лекция 12. Евклидовы пространства	113
12.1. Евклидовы пространства	113
12.2. Примеры конкретных евклидовых пространств	113

12.3. Простейшие свойства евклидова пространства	115
12.4. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства	117
12.5. Примеры ортонормированных базисов	118
12.6. Метод ортогонализации линейно независимых элемен- тов евклидова пространства	119
Лекция 13. Линейные операторы	120
13.1. Линейные операторы	120
13.2. Матричная запись линейных операторов	123
Лекция 14. Действия с линейными операторами	127
14.1. Действия с линейными операторами вида $\hat{A}: L^n \rightarrow L^n$	127
14.2. Свойства линейных операторов вида	128
14.3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому	128
14.4. Линейный оператор в евклидовом пространстве (сопряженный, самосопряженный, ортогональный)	130
Лекция 15. Системы линейных уравнений	135
15.1. Системы m линейных уравнений с n неизвестными	135
15.2. Однородные системы линейных уравнений	137
Лекция 16. Неоднородные системы линейных уравнений	142
16.1. Неоднородные системы линейных уравнений	142
16.2. Собственные значения и собственные векторы линей- ного оператора $\hat{A}$	144
16.3. Свойства собственных векторов и собственных значе- ний линейного оператора $\hat{A}$	146
Лекция 17. Теория квадратичных форм и ее геометрические приложения	150
17.1. Квадратичные формы	150
17.2. Приложения теории квадратичных форм к геометриче- ским задачам в пространствах R^2 и R^3	155

V. Введение в математический анализ 159

Лекция 18. Числовая последовательность и ее предел	159
18.1. Множества вещественных чисел (частные случаи)	159
18.2. Числовая последовательность, ее предел	161

Лекция 19. Число e	165
19.1. Монотонные последовательности	166
19.2. Число e	168
19.3. Подпоследовательности и их свойства	170
Лекция 20. Функция и ее предел.....	172
20.1. Определение функции	173
20.2. Предел функции	175
20.3. Односторонние пределы.....	179
20.4. Ограниченные функции.....	181
20.5. Бесконечно малые функции и их свойства	182
Лекция 21. Непрерывность функции в точке	183
21.1. Арифметические операции над функциями, имеющими предел	184
21.2. Переход к пределу в неравенствах	185
21.3. Непрерывность функции в точке	186
21.4. Свойства непрерывной функции	189
21.5. Классификация точек разрыва	190
Лекция 22. Замечательные пределы	193
22.1. Монотонные функции. Обратные функции	193
22.2. Непрерывность основных элементарных функций	195
22.3. Сложная функция и ее непрерывность	197
22.4. Гиперболические функции.....	199
22.5. Замечательные пределы.....	202
Лекция 23. Эквивалентные бесконечно малые функции	204
23.1. Сравнение бесконечно малых функций	204
23.2. Некоторые эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$	206
23.3. Раскрытие неопределенностей.....	207
23.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке	208

Программа курса **213**

Введение

Настоящая работа представляет собой компактное изложение вопросов курса математики, предусмотренных учебными программами большинства инженерно-технических направлений бакалавриата в первом семестре. Учебный материал структурирован на 23 лекции, каждая из которых носит законченный характер, строго выверена по объему на реальное лекционное время, имеет четкую внутреннюю структуру, что является важным для системного восприятия курса.

Стиль изложения учебного материала соответствует типу работы, поэтому в ней нет глав и параграфов, нет громоздких числовых обозначений определений, теорем, формул. Особое внимание уделяется обеспечению согласованности терминологии и обозначений с базовыми задачами.

Данное пособие предназначено, главным образом, для студентов, но может быть полезным и для молодых преподавателей высшей школы с методической точки зрения.

Приложением к учебному пособию является CD-ROM, содержащий электронную версию конспекта лекций. Последняя пронизана системой гиперссылок различных уровней, поэтому особенно удобна к использованию в период подготовки к экзаменам. Электронный конспект по сравнению с традиционным обладает повышенной информационной функцией, открыт для оперативных изменений и дополнений, что является важным для преподавателей и студентов в организации самостоятельной работы, может быть использован в системе дистанционного образования.

I. Алгебра матриц

Лекция 1. Матрицы и определители, их характеристики

Содержание

1. Понятие матрицы.
2. Определители второго, третьего, n -го порядка.
3. Свойства определителей.
4. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
5. Вычисление определителей n -го порядка (2 метода).

1.1. Понятие матрицы

Определение

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij} , где $i = 1, 2, \dots, m$ – номер строки, $j = 1, 2, \dots, n$ – номер столбца, таких, на пересечении которых расположены числа a_{ij} ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ – матрица размера } (2 \times 3).$$

Какое число матрицы A соответствует элементу a_{13} ?

Этот элемент стоит в первой строке ($i = 1$) и третьем столбце ($j = 3$).

Таким образом, $a_{13} = 3$.

Определение

Если $m = n$, матрица называется **квадратной** порядка n .

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

Определение

Главная и побочная диагональ квадратной матрицы –

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ главная диагональ

Частные случаи квадратных матриц

а) **треугольная матрица** – выше или ниже главной диагонали все элементы равны нулю.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

б) **диагональная матрица** – выше и ниже главной диагонали – нули, на главной диагонали произвольные числа.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) **единичная матрица** – диагональная матрица, на главной диагонали которой – единицы.

Пример

$E = (1)$ – единичная матрица первого порядка.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Таким образом, $E = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

Определение

Транспонированная матрица – матрица A^T , построенная из матрицы A , путем замены строк на столбцы и наоборот (строки и столбцы меняются ролями).

Пример

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2. Определители второго, третьего, n-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определение

Определителем второго порядка, соответствующим квадратной матрице второго порядка, называется число, обозначаемое $\det A$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, равное

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Правило

Определитель второго порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов на побочной диагонали.

Пример

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение

Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной матрице третьего порядка, называется число

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Правило треугольника

В выражение определителя со знаком '+' входят произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, расположен-

ных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; со знаком '-' ... (то же про побочную диагональ).

Пример

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0.$$

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице n -го порядка, называется число, равное сумме всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца и снабженных знаками «+» или «-» по некоторому определенному правилу (строгое определение этого понятия можно найти в учебной литературе, в данном курсе оно не требуется).

1.3. Свойства определителей

(уметь доказывать для определителей третьего порядка)

1°. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:

$$\det A = \det A^T.$$

Доказательство

Вычислить левую и правую части равенства по правилу треугольника и сравнить результаты.

2°. Перестановка любых двух строк (столбцов) меняет знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3°. Определитель с двумя равными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство

Рассмотрим $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ Переставим в этом определителе первую и вторую строки. По предыдущему свойству

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta.$$

Следовательно, $2\Delta = 0$. Отсюда $\Delta = 0$.

4°. Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример

Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 48 \\ 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Как это сделать? Мы знаем, что для того чтобы найти определитель, соответствующий квадратной матрице третьего порядка, можно воспользоваться правилом треугольника. Заметим, что в данном случае вначале рационально воспользоваться свойством 4°.

Таким образом,

$$\det A = \begin{vmatrix} 16 & 32 & 48 \\ 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 16 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 16 \cdot 3 (1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 7 + 5 \cdot 8 \cdot 1 - 7 \cdot 5 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 8) = 48 \cdot 2 = 96$$

Чтобы избежать основной ошибки, которую часто допускают при вычислении определителей, используя это свойство, нужно учесть следующее: если общий множитель имеют несколько строк (столбцов), то его **отдельно** выносят из каждой строки (каждого столбца).

5°. Определитель, у которого две строки (2 столбца) пропорциональны, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6°. Определитель, в некоторой строке которого каждый элемент равен сумме двух слагаемых, равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a'_1 + a''_1 & a'_2 + a''_2 & a'_3 + a''_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример

Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Можно вычислить определитель, используя уже известные нам приемы. Но чтобы упростить задачу, полезно применять вначале свойства, сформулированные выше, а затем воспользоваться известным алгоритмом.

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & 11 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \Downarrow 6^\circ \Downarrow = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \Downarrow 5^\circ \Downarrow = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

7°. Величина определителя не изменится, если ко всем элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на число k :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Замечание

В новом определителе без изменения записывается строка, которую умножали на k (*рабочая строка*).

1.4. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определение

Минором M_{ij} *элемента* квадратной матрицы a_{ij} называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i -й строки и j -го столбца.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12.$$

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* квадратной матрицы a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

8°. Величина определителя равна сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j} -$$

– формула разложения определителя третьего порядка по первой строке.

Для определителя n -го порядка:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad \text{– формула разложения по элементам } j\text{-го столбца;}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad \text{– формула разложения по элементам } i\text{-й строки.}$$

Замечание

В формулах разложения A_{ij} выражается через определители порядка $n-1$, т. е. на единицу меньше исходного.

9°. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов *другой* строки (столбца) равна нулю:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

10°. Величина определителя треугольной матрицы равна произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Доказательство

Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\det A = a_{11}A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Замечание

|| Перечисленные свойства используются при вычислении определителей.

1.5. Вычисление определителей n-го порядка (2 метода)

I. Понижение порядка по свойству 8° (формулы разложения).

II. Приведение определителя к треугольному виду (алгоритм на основе свойства 7°).

Пример

Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

Воспользуемся **первым методом** – понижение порядка определителя.

Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 2(-45) - (-63) +$$

$$+ 2(-6) - 3(-12) = -3.$$

Особое внимание при использовании данного метода следует уделить множителю $(-1)^{i+j}$.

Рассмотрим *второй метод* – приведение определителя к треугольному виду.

Для удобства использования данного метода выберем в качестве рабочей строки вторую строку, так как ее первый элемент равен единице и переставим первую и вторую строки. Обратите внимание, что при перестановке строк знак определителя изменяется на противоположный.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \updownarrow$$

Какова цель *первого* этапа вычислений?

Необходимо получить нули в *первом* столбце во второй, третьей и четвертой строчках, то есть всюду под элементом 1. Для этого домножаем каждый элемент рабочей строки на -2 и поэлементно складываем со второй строкой, получая, таким образом, ноль на первой позиции второй строки. Аналогично домножаем каждый элемент рабочей строки на -2 и поэлементно складываем с третьей строкой, получая, таким образом, ноль на первой позиции третьей строки; домножаем каждый элемент рабочей строки на -3 и поэлементно складываем с четвертой строкой, получая, таким образом, ноль на первой позиции четвертой строки.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Какова цель *второго* этапа вычислений?

Необходимо получить нули во *втором* столбце в третьей и четвертой строчках. Для этого домножаем каждый элемент второй рабочей строки на 4 и поэлементно складываем с третьей строкой, получая, таким образом, ноль на второй позиции третьей строки. Аналогично домножаем каждый элемент рабочей строки на -1 и поэлементно складываем с четвертой строкой, получая, таким образом, ноль на второй позиции четвертой строки.

Обратите внимание, что первая строка остается без изменений.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

После проделанных преобразований можно заметить, что переставив третий и четвертый столбцы, мы приведем определитель к треугольному виду. При этом знак определителя вновь меняется на противоположный!

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

Таким образом, определитель можно вычислить перемножив элементы, стоящие на главной диагонали.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)1 \cdot 3 = -3.$$

Лекция 2. Алгебра матриц

Содержание

1. Основные операции над матрицами и их свойства.
2. Обратная матрица.
3. Решение матричных уравнений.
4. Невырожденные системы n линейных уравнений с неизвестными.

2.1. Основные операции над матрицами и их свойства

Определим несколько отношений и операций над матрицами.

Рассмотрим матрицы $A = (a_{ij})$ размера $(m \times n)$, $B = (b_{ij}) - (m \times n)$.

Равенство матриц

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n.$$

Сложение матриц

Результатом *сложения матриц* A и B называется матрица C , элементы которой являются суммой соответствующих элементов исходных матриц.

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Умножение матрицы на число

$$C = kA$$

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij})$ размера $(m \times p)$, $B = (b_{ij})$ – $(p \times n)$, тогда их произведением называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $(m \times n)$:

$$C = AB$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Правило умножения матриц

1. Перемножать можно лишь матрицы согласованных размеров (число столбцов матрицы равно числу строк матрицы B).
2. Размер матрицы C равен произведению числа строк матрицы на число столбцов матрицы, т. е.
3. Чтобы получить элемент матрицы произведения c_{ij} , расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца следует перемножить соответствующие элементы i -й строки матрицы и j -го столбца матрицы и найти сумму полученных произведений.