МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

25

выпуск

2020

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 25.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2020.
192 с.
ISBN 978-5-4439-3461-7

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

Подготовлено на основе книги: Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 25. — М.: МЦНМО, 2019. — 192 с. ISBN 978-5-4439-1461-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3461-7

Содержание

Об эквивалентности трёх моделей плоскости Лобачевского

А. Б. Сосинский

В этой заметке я хочу объяснить, почему три наиболее популярные модели плоскости Лобачевского (модель Пуанкаре на полуплоскости, модель Кэли — Клейна на диске и модель Пуанкаре на диске) эквивалентны. Сначала мы это увидим наглядно с помощью физических опытов со стеклянной игрушкой, а затем докажем строго математически.

Для доказательства нам придётся не только строго определить, в каком смысле следует понимать «эквивалентность» моделей, но и понять, что такое модель геометрии вообще. Мы увидим, что модель геометрии — это и есть геометрия в том смысле, как это слово расшифровал Феликс Клейн.

Начнём с краткого описания трёх моделей[1] плоскости Лобачевского.

§ 1. Модель Пуанкаре на диске

Точки этой модели — это точки единичного открытого диска

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

прямые — открытые дуги окружностей, ортогональные окружности

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

ограничивающей наш диск, а также (открытые) диаметры окружности $\mathbb{A}$; окружность $\mathbb{A}$ называется *абсолютом*, и её точки не являются точками нашей «плоскости Лобачевского».

На множестве $\mathbb{H}^2$ с помощью явной (но совсем не очевидной) формулы вводится расстояние между точками, что позволяет измерять длины, углы,

[1] Я сохраняю за этими моделями их традиционные названия, но подчёркиваю, что эти наименования не справедливы: все три модели придумал и опубликовал (в 1868 году) итальянский математик Бельтрами.

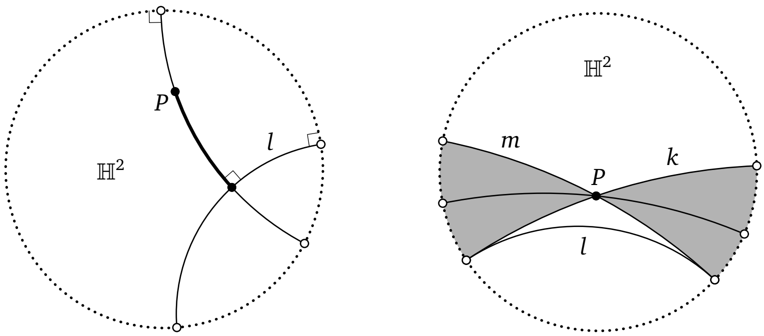


Рис. 1. Перпендикуляр и параллели в модели Пуанкаре на диске

площади и вообще строить геометрию на плоскости Лобачевского. При этом главную роль играет группа $G_{\mathbb{C}}$ изометрий этой «плоскости» (т. е. биективных преобразований множества $\mathbb{H}^2$, сохраняющих расстояние).

Однако здесь можно обойтись без сложной формулы для расстояний. Дело в том, что группу $G_{\mathbb{C}}$ можно определить чисто геометрически: она порождается отражениями относительно «прямых», т. е. инверсиями относительно окружностей, ортогональных абсолюту, и (обычными) отражениями относительно диаметров. Дальнейшая теория развивается без всяких формул и координат на основании свойств инверсии (читатель может познакомиться с этим по моей книге «Геометрии»[2)], посмотрев страницы 116–128).

Здесь мы ограничимся двумя картинками: одна изображает перпендикуляр, опущенный из точки P на «прямую» l (рис. 1, слева), а вторая (классическая!) картинка изображает две прямые m, k, проходящие через точку P и называемые *параллелями* к прямой l, между которыми располагаются все прямые, проходящие через P и не пересекающие l (рис. 1, справа).

§ 2. Модель Пуанкаре на полуплоскости

Точки этой модели — это точки открытой полуплоскости комплексной переменной

$$\mathbb{C}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) = y > 0\},$$

прямые — открытые полуокружности с центром на вещественной оси $\operatorname{Im}(z) = y = 0$, а также вертикальные полупрямые

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon x = \mathrm{const},\ y > 0\}.$$

[2)] *Сосинский А. Б.* Геометрии. М.: МЦНМО, 2017.

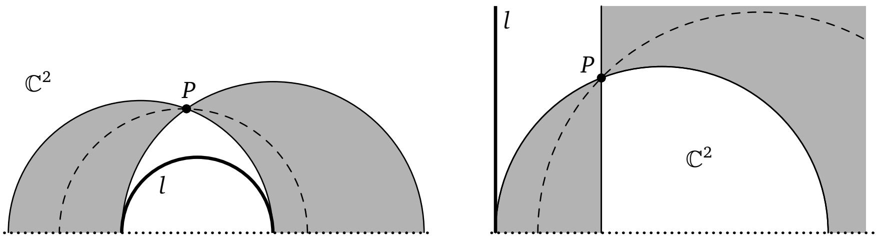


Рис. 2. Параллели в модели Пуанкаре на полуплоскости

Прямая $\mathbb{A}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:\ y=0\}$ называется *абсолютом,* её точки не являются точками нашего нового варианта «плоскости Лобачевского». Здесь тоже можно ввести расстояние с помощью явной формулы (в которую входят комплексные параметры), но можно определить группу $G_{\mathbb{R}}$ изометрий рассматриваемой модели чисто геометрически: она порождается отражениями относительно «прямых», т. е. (обычными) отражениями относительно вертикальных прямых или инверсиями относительно окружностей с центрами на оси Ox. Предлагаем читателю снова посмотреть на классическую картинку с параллельными (рис. 2).

§ 3. Модель Кэли — Клейна на диске

Точки этой модели — это точки единичного открытого диска

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

прямые — открытые хорды диска, *абсолют* — край диска. Здесь изометрии удобнее определять через расстояние, которое вводится как логарифм некоторого двойного отношения. Я не буду вдаваться в детали и ограничусь изображением странного вида перпендикуляра в этой метрике и классической картинкой с параллелями (рис. 3).

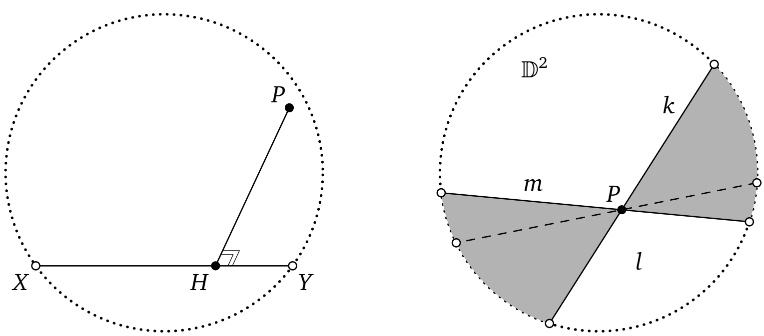
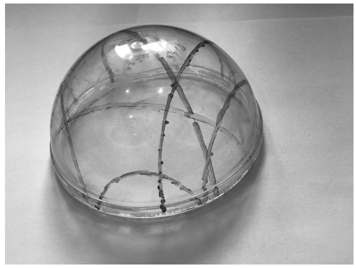


Рис. 3. Перпендикуляр и параллели в модели Кэли — Клейна

§ 4. Эксперименты с игрушкой

Сама игрушка представляет собой полусферу радиуса 5 см, сделанную из прозрачной пластмассы; на ней нарисованы полуокружности, ортогональные границе полусферы (см. фото); эту граничную окружность мы будем называть *экватором*. Можно считать, что полуокружности высечены из полусферы вертикальными плоскостями.

Покажем, как из этой игрушки можно получить модель Пуанкаре на диске. Для этого нам потребуется небольшой фонарик и стол в достаточно тёмной комнате. На стол положим лист белой бумаги, в его середину положим нашу полусферу (обозначим её S) экватором вверх, а источник света поместим на место «северного полюса» сферы (она касается стола «южным полюсом»). Что же мы тогда увидим?



Фотография игрушки

На листе белой бумаги появится диск (его мы обозначим D) радиуса 10 см с дугами окружностей, ортогональными его границе. Это и есть диск модели Пуанкаре! При нашей световой стереографической проекции экватор перейдёт в абсолют (=край) диска Пуанкаре D, полуокружности на полусфере перейдут в «прямые» модели Пуанкаре, и мы получим биекцию (обозначим её α) между точками полусферы S и точками диска D (рис. 4).

А теперь покажем, как из игрушки можно получить модель Пуанкаре на полуплоскости. Для этого мы постелим на стол большой белый лист

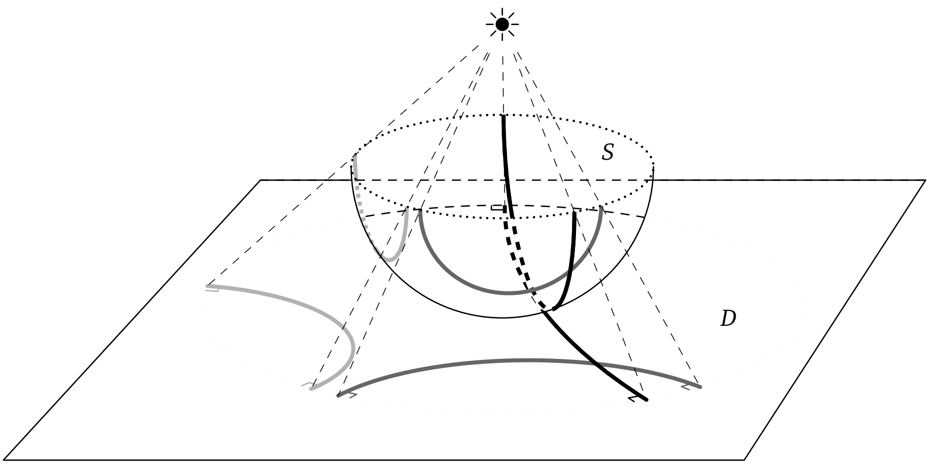


Рис. 4. Получаем модель Пуанкаре на диске

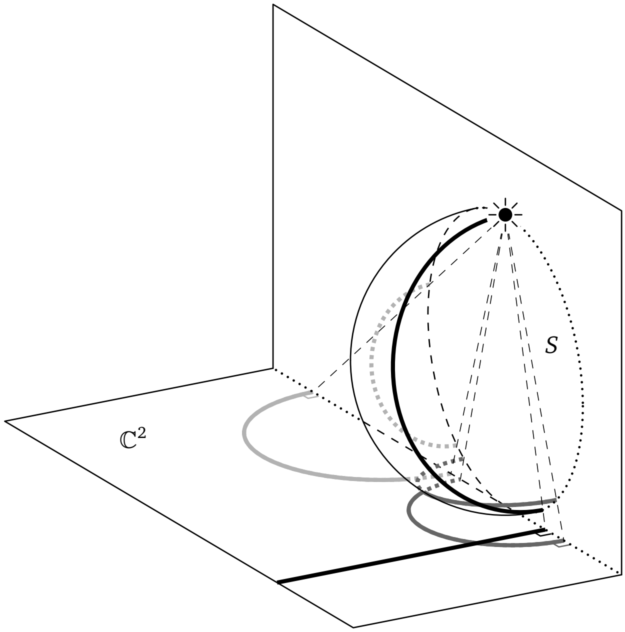


Рис. 5. Получаем модель Пуанкаре на полуплоскости

бумаги и приставим стол к стене комнаты. К стене мы прислоним нашу полусферу (снова обозначим её S) так, чтобы экватор прилегал к стене (чтобы полусфера не падала, её можно приклеить), и поместим источник света в самой верхней точке полусферы (рис. 5).

Тогда на столе появится изображение модели Пуанкаре на полуплоскости (мы обозначим её $\mathbb{C}^+$), вернее, её кусок — стол наш не бесконечен! При этом экватор перейдёт в абсолют полуплоскости (это прямая, по которой стол примыкает к стене), а полуокружности на S перейдут в «прямые» модели $\mathbb{C}^+$. Здесь, как и в предыдущем опыте, важную роль играет тот факт, что при стереографической проекции сохраняются углы, в частности сохраняется перпендикулярность. Мы получим биекцию (обозначим её β) между точками полусферы S и точками «бесконечного стола» $\mathbb{C}^+$.

А теперь легко показать эквивалентность двух моделей Пуанкаре: отображение $\beta \circ \alpha^{-1} : D \to \mathbb{C}^+$ превращает одну модель в другую, один абсолют в другой, «прямые» из модели на диске D в «прямые» из модели на полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

А как из нашей игрушки получить модель Кэли — Клейна? А очень просто: наш лист белой бумаги мы вешаем на стену, полусферу (снова обозначенную S) устанавливаем в метре от стены так, чтобы плоскость

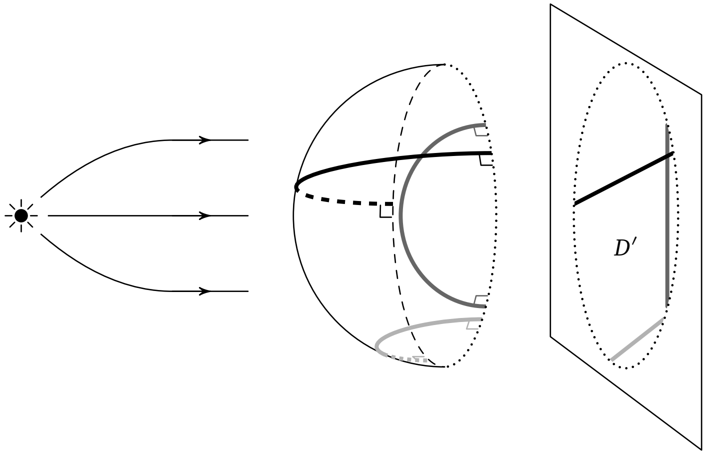


Рис. 6. Получаем модель Кэли — Клейна

её экватора была параллельна стене, а у противоположной стены (т. е. на достаточно большом расстоянии) включаем мощный точечный источник света (маленький фонарик тут не годится). Тогда на нашем листе бумаги появится изображение модели Кэли — Клейна в виде диска радиуса чуть больше 5 см (его мы обозначим D'). При этом экватор перейдёт в абсолют (край диска D'), а полуокружности на S перейдут в «прямые» модели Кэли — Клейна, т. е. в хорды диска D' (рис. 6). Мы получим биекцию (обозначим её γ) между точками полусферы S и точками модели Кэли — Клейна D'.

Теперь легко показать эквивалентность двух моделей на диске: она задаётся формулой $\alpha \circ \gamma^{-1} : D' \to D$.

Таким образом, мы наглядно установили эквивалентность трёх моделей плоскости Лобачевского и увидели, как одна модель переходит в другую с помощью нашей игрушки. А теперь мы хотим это доказать строго математически. Для этого нам потребуется два формальных определения: геометрии по Клейну и эквивалентности (=изоморфизма) геометрий.

§ 5. Геометрии по Клейну

Геометрий много. Так что же такое геометрия, что есть общего между двумерными геометриями Евклида, Лобачевского, Римана, Кокстера, проективной геометрией, сферической геометрией? Ответ на этот вопрос дал Феликс Клейн в знаменитой лекции, вошедшей в историю под названием «Эрлангенская программа».

На современном языке ответ Клейна кратко можно пересказать так: *геометрией* (*по Клейну*) называется множество, на котором биекциями действует некоторая группа. Подробнее это можно пересказать так: *геометрия по Клейну* (или короче — просто *геометрия*) — это пара $\langle X : G\rangle$, где X — множество произвольной природы (его элементы называются *точками*), а G — группа, действующая на множестве X; это значит, что любой элемент $g \in G$ представляет собой биекцию множества X на себя, нейтральный элемент $e \in G$ — тождественное отображение, обратный элемент $g^{-1} \in G$ — обратная биекция к g, произведение двух элементов группы G — просто композиция биекций.

Посмотрим, как это выглядит для перечисленных выше геометрий. Для евклидовой геометрии X — это множество $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ пар вещественных чисел, а G — группа отображений X на себя, сохраняющих расстояние d между точками, где

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Для двух моделей Пуанкаре мы уже описали X как открытый диск и полуплоскость соответственно, а G — как группу, порождённую отражениями относительно «прямых» (т. е. инверсиями и обычными отражениями, см. выше). Эти группы мы обозначили $G_{\mathbb{R}}$ для модели на полуплоскости и $G_{\mathbb{C}}$ для модели на диске. Таким образом, сами модели мы будем обозначать $\langle \mathbb{C}^+ : G_{\mathbb{R}}\rangle$ и $\langle \mathbb{H}^2 : G_{\mathbb{C}}\rangle$.

Для проективной плоскости точки множества X можно описать однородными координатами $(x : y : z)$, т. е. тройками вещественных чисел, которые не все равны нулю и заданы с точностью до ненулевого общего множителя (так что $(x : y : z)$ и $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ задают одну и ту же точку). Здесь группа G — группа двумерных проективных преобразований; каждое такое преобразование можно задать невырожденной матрицей 3×3, которая обычным образом действует на тройки (x, y, z), но результат действия определяется с точностью до множителя $\lambda \neq 0$, т. е. задаёт точку из X её однородными координатами.

Я не буду описывать в этих терминах модель Кэли — Клейна и геометрии Коксетера. Любознательный читатель может ознакомиться с этими вопросами в цитированной выше книжке «Геометрии».

§ 6. Эквивалентность геометрий

Пусть даны две геометрии $\langle X : G\rangle$ и $\langle Y : H\rangle$. Что значит, что они эквивалентны? Коротко это можно сказать так: должна существовать биекция между множествами точек X и Y и изоморфизм групп G и H, которые согласованы между собой. На современном формальном математическом языке это можно выразить так: две геометрии $\langle G : X\rangle$ и $\langle H : Y\rangle$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\beta\colon X \to Y$ и изоморфизм групп $\phi: G \to H$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "\phi(g)"] \\ X \arrow[r, "\beta"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна; это значит, что для любой точки $x \in X$ и для любого элемента группы $g \in G$ мы имеем $\beta(xg) = (\beta(x))\phi(g)$, т. е. две прогулки по диаграмме $x \mapsto xg \mapsto \beta(xg)$ и $x \mapsto \beta(x) \mapsto (\beta(x))\phi(g)$ приводят в одну и ту же точку.

Для тех читателей, которые не боятся современного математического языка, отмечу, что данное выше определение изоморфизма геометрий является частным случаем изоморфизма в теории категорий. Дело в том, что геометрии по Клейну образуют категорию: её объекты — геометрии $\langle X : G\rangle$, её морфизмы (их называют эквивариантными отображениями) — это пары (β, ϕ), где $\beta\colon X \to X'$ — отображение и $\phi: G \to G'$ — гомоморфизм групп, такие, что выполняется соотношение $\beta(xg) = (\beta(x))\phi(g)$, которое мы только что выписывали выше. Но я отвлёкся — пора вернуться к нашим моделям и доказательству их эквивалентности, т. е. их изоморфизма как геометрий по Клейну.

§ 7. Доказательство эквивалентностей

Докажем сначала, что модели Пуанкаре на диске и на полуплоскости эквивалентны, т. е. что геометрии $\langle \mathbb{H}^2 : G_{\mathbb{C}}\rangle$ и $\langle \mathbb{C}^+ : G_{\mathbb{R}}\rangle$ изоморфны. Для этого нам надо построить биекцию $\beta\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}^+$ и изоморфизм $\phi: G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{R}}$ такие, что $\beta(xg) = (\beta(x))\phi(g)$. Сделаем мы это так. Будем рассматривать диск $\mathbb{H}^2$ как лежащий в плоскости комплексной переменной $\mathbb{C}$ (т. е. считать, что $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$) и определим β формулой

$$\beta\colon z \mapsto i \cdot \frac{1+z}{1-z},$$

а ϕ зададим так: $G_{\mathbb{C}} \ni g \mapsto \beta \circ g \circ \beta^{-1} =: \phi(g) \in G_{\mathbb{R}}$. То, что β действительно является биекцией диска на полуплоскость, — это простое и популярное упражнение из начального курса комплексного анализа, а то, что ϕ — изоморфизм, удовлетворяющий условию $\beta(xg) = (\beta(x))\phi(g)$, сразу следует из определения.

Доказательство того, что модель Пуанкаре на диске изоморфна (как геометрия по Клейну) модели Кэли — Клейна, мы оставляем читателю.

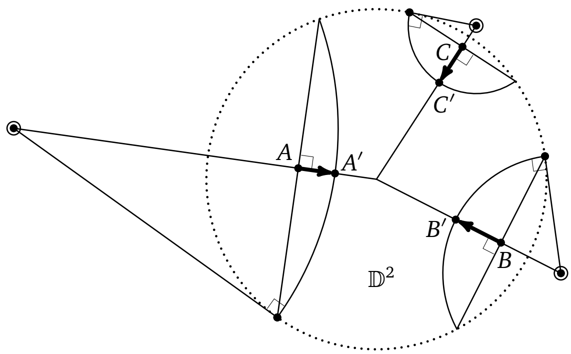


Рис. 7. Построение биекции $\beta\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$

На рис. 7 в качестве подсказки показано, как можно построить биекцию $\beta\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$. Если этой подсказки не хватит, читатель может всё это посмотреть в пунктах 10.1.2 и 10.1.3 цитированной выше книжки «Геометрии».

§ 8. Замечания про игрушку

На самом деле наша игрушка — в сущности — просто *модель плоскости Лобачевского на полусфере*, т. е. ещё одна геометрия по Клейну, изоморфная трём рассмотренным. Давайте дадим ей строгое определение.

Модель на полусфере — это геометрия по Клейну $\langle S : G_S\rangle$, точки которой суть точки открытой (т. е. без края) единичной полусферы S, а группа G_S определяется следующим образом. Как абстрактная группа, она изоморфна группе $G_{\mathbb{C}}$ (см. § 5); этот изоморфизм мы зафиксируем и обозначим $\sigma\colon G_S \to G_{\mathbb{C}}$. Группа G_S действует на полусферу S так: для любых $g \in G_S$ и $s \in S$

$$sg := \alpha^{-1}\big(\sigma(g)(\alpha(s))\big),$$

где $\alpha\colon S \to D$, биекция полусферы на диск Пуанкаре D, была определена в § 4. Ясно, что «прямые» в этой модели — это полуокружности, высекаемые на S плоскостями, перпендикулярными плоскости края S, и этот край играет роль абсолюта.

А откуда взялась игрушка? Не я её придумал, мне её подарила Анна Феликсон, которая, в свою очередь, про неё узнала от Саула Шлеймера и сама сконструировала тот вариант, который мне достался. Когда эта статья была сдана в печать, я узнал от Григория Гальперина, что эта игрушка описана в книге Б. Н. Делоне[3].

[3] *Делоне Б. Н.* Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М.: АН СССР, 1953. С. 111–112.

Я выражаю всем троим свою благодарность, особенно Анне, из за которой возникла эта заметка, а также неизвестному мне геометру, который эту модель придумал.

§ 9. Заключение

Читатель, возможно, удивился, что в этой статье, посвящённой геометрии Лобачевского, не сказано ни слова про аксиомы геометрии — евклидовой и неевклидовой. Это объясняется, во-первых, тем, что применение известных мне строгих (в современном смысле) изложений геометрии Лобачевского для доказательства содержательных теорем требует огромной предварительной работы (доказательства очень формализованных, скучных и не очень естественных утверждений).

Во-вторых, я считаю, что гениальную идею Евклида построения геометрии как дедуктивной системы — одно из высших достижений человеческого разума, идею, из которой в итоге возникло современное построение всей математики — сегодня скорее следует отнести к *истории геометрии*, а не к самой геометрии. Евклидова планиметрия — в наши дни лишь небольшая часть единой математики. Доказывать её теоремы на основании аксиом Гильберта крайне неудобно и непедагогично, проще это делать исходя из элементарной линейной алгебры.

Однако и такой подход, особенно когда линейная алгебра и евклидово пространство изучаются в координатах, мне (как и большинству геометров) тоже не по душе. Именно поэтому в нашей статье рассматривался подход Клейна к построению геометрических теорий. Читатель мог убедиться на примерах моделей плоскости Лобачевского, что этот подход, по своей наглядности и строгости, наиболее близок сердцу истинного геометра.

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ
asossinsky@yandex.ru

Об инверсных образах точки Фейербаха и обобщении теоремы Емельяновых

В. Д. Попов

В данной работе исследуется образ точки Фейербаха при инверсии относительно окружности, построенной на стороне треугольника как на диаметре. Доказаны некоторые свойства этого образа, с их помощью получены более простые доказательства ряда классических результатов о точке Фейербаха. Также получено обобщение теоремы Емельяновых о полюсах треугольника и связанных с ними окружностях, проходящих через точку Фейербаха.

§ 1. Введение

Точка Фейербаха является одной из наиболее известных замечательных точек треугольника. Она определяется как точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера. Одно только определение наводит на естественный и, следует признать, весьма непростой вопрос: а почему факт касания этих двух окружностей действительно имеет место быть? Соответствующую теорему доказал Карл Вильгельм Фейербах в 1822 году:

Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трёх вневписанных окружностей этого треугольника.

С тех пор было придумано свыше 300 других доказательств этой теоремы, причём многие из них используют инверсию. Многочисленность таких доказательств свидетельствует о том, что при изучении геометрических свойств точки Фейербаха инверсия является довольно полезным инструментом. В данной работе мы предлагаем новый способ изучения точки Фейербаха, основанный на рассмотрении её инверсных образов относительно некоторых окружностей. Этот подход позволит нам не только получить ряд новых красивых результатов, но и значительно упростить доказательства некоторых уже известных фактов (см. [2, 4, 6]). Доказательства проводятся для остроугольных треугольников (в других случаях рассуждения аналогичны).

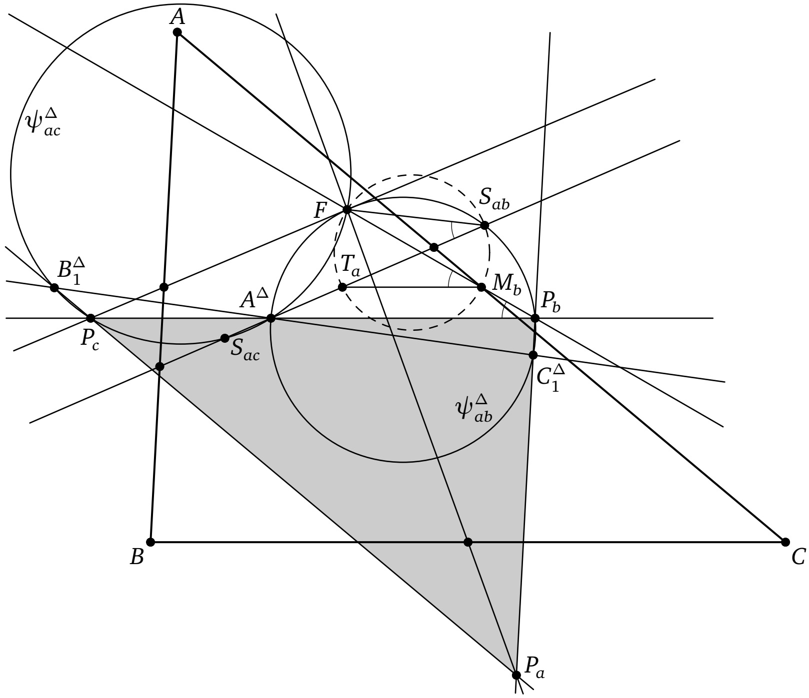


Рис. 1

Наиболее важным и интересным результатом данной работы, полученным с помощью применения такого подхода, следует считать следующую теорему, обобщающую теорему Емельяновых о семействе окружностей, проходящих через точку Фейербаха (см. [2]).

Теорема 1. *Рассмотрим произвольный треугольник ABC, его точку Фейербаха F и его серединный треугольник $M_aM_bM_c$. Обозначим через S_{ab} и S_{ac} точки Шарыгина, соответствующие стороне BC* (см. точные определения в следующем разделе). *Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F* (рис. 1). *Рассмотрим окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ и $\psi_{ac}^{\triangle}$, проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Тогда точка их пересечения, отличная от F, совпадает с точкой пересечения $A^{\triangle}$ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$.*

Таким образом, каждый треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха, порождает три пары замечательных окружностей, каждая из которых проходит через точку Фейербаха и одну из точек Шарыгина. Точку $A^{\triangle}$, фигурирующую в теореме 1, и аналогичные ей точки $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ на прямых P_cP_a и P_aP_b соответственно, назовём *обобщёнными полюсами треугольника ABC*. Смысл такого названия заключается в том, что если треугольник $P_aP_bP_c$ совпадает с треугольником $K_aK_bK_c$ (см. необходимые обозначения в следующем разделе), то точки $A^{\triangle}$, $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ превращаются в точки A_{00}, B_{00} и C_{00}, введённые Емельяновыми в статье [2] и названные ими *полюсами треугольника ABC*.

§ 2. Вспомогательные факты

Зафиксируем обозначения.

- A, B, C — вершины треугольника;
- O — центр описанной окружности;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- ω — вписанная окружность треугольника ABC с центром I;
- ω_a — вневписанная окружность с центром I_a, касающаяся стороны BC;
- G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB;
  G'_a — точка касания вневписанной окружности ω_a со стороной BC;
- λ_a — окружность, построенная на стороне BC как на диаметре;
- S_{ab}, S_{ac} — точки Шарыгина, т. е. точки пересечения окружности λ_a со средними линиями M_aM_b и M_aM_c соответственно;
- ε, ε_a — окружности девяти точек треугольника ABC и треугольника IBC соответственно;
- F — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек треугольника ABC (точка Фейербаха).

Мы начнём с того, что приведём доказательство теоремы Фейербаха. Это доказательство, найденное П. В. Бибиковым, является модификацией классического доказательства теоремы Фейербаха (см., например, [1]), использующего инверсию, однако более геометрично и менее счётно. Для начала дадим следующее определение.

Определение 1. Точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой, образуют *гармоническую четвёрку*, если

$$[AB, CD] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 1.$$

Понятие гармонической четвёрки точек тесно связано с инверсией. А именно, четвёрка точек A, B, C, D образует гармоническую четвёрку, если и только если точки A и B симметричны относительно окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре (см., например, [3]). Перейдём теперь к доказательству теоремы Фейербаха (с. 48).

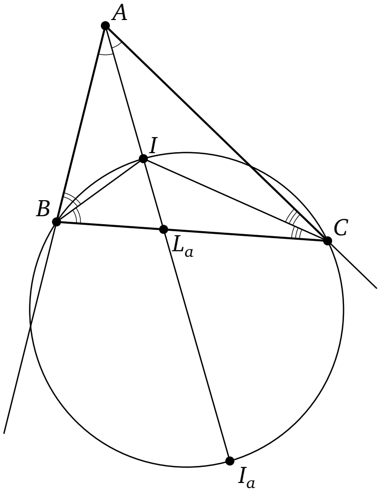


Рис. 2

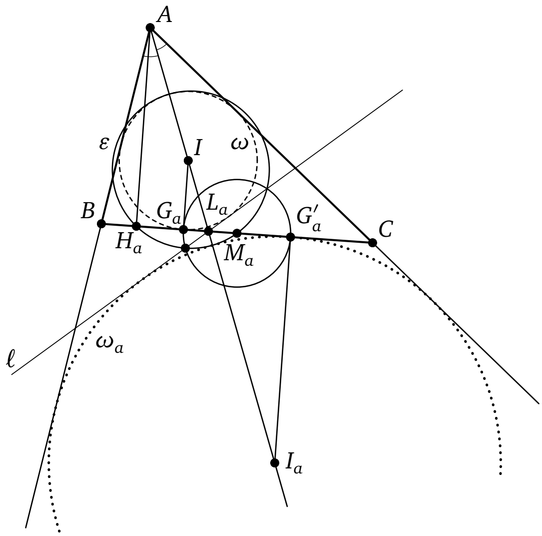


Рис. 3

Доказательство теоремы Фейербаха. Обозначим центр вневписанной окружности треугольника через I_a, а основание биссектрисы, проведённой из вершины A, через L_a. Тогда окружность, построенная на отрезке I_aI как на диаметре, является окружностью Аполлония (см. [3]) для пары точек (A, L_a). Из этого следует, что (A, L_a, I, I_a) — гармоническая четвёрка (рис. 2). Параллельно спроектировав её на прямую BC, мы получим новую гармоническую четвёрку (H_a, L_a, G_a, G'_a). Это означает, что точки H_a и L_a симметричны относительно окружности, построенной на отрезке $G_aG'_a$ как на диаметре (рис. 3). Так как $G_aB = G'_aC$, центр этой окружности совпадает с серединой M_a отрезка BC. Отсюда следует, что при инверсии относительно этой окружности окружность девяти точек ε переходит в прямую ℓ, проходящую через L_a. С другой стороны, эта инверсия оставляет вписанную и вневписанную окружности ω и ω_a на месте, так как обе они ортогональны окружности инверсии (поскольку $IG_a \perp M_aG_a$ и $I_aG'_a \perp M_aG'_a$). Покажем, что прямая ℓ касается окружностей ω и ω_a. Для этого достаточно доказать, что прямая ℓ симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажем это.

Пусть E_a — вторая точка пересечения отрезка AH_a с окружностью ε. Так как инверсия — конформное преобразование, угол между прямыми ℓ и BC равен углу между окружностью ε и BC (угол φ на рис. 4). Далее, этот угол равен углу $H_aE_aM_a$. Четырёхугольник OM_aE_aA является параллелограммом, поэтому $\angle H_aE_aM_a = \angle E_aAO$. Тогда $\angle BAE_a = \angle OAC = 90^\circ - \angle B$. Получаем, что $\varphi = \angle E_aAO = |\angle A - 2 \cdot (90^\circ - \angle B)| = |\angle B - \angle C|$.

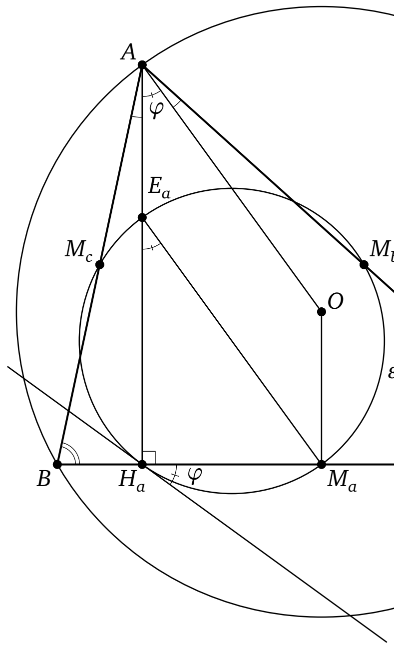


Рис. 4

Теперь рассмотрим прямую $B'L_a$, симметричную прямой BC относительно биссектрисы AL_a. Обозначим угол между $B'L_a$ и BC через φ' (рис. 5). Из треугольника $B'L_aC$ получаем, что $\varphi' = |\angle B - \angle C| = \varphi$. Это означает, что прямые ℓ и $B'L_a$ совпадают, что и требовалось доказать. □

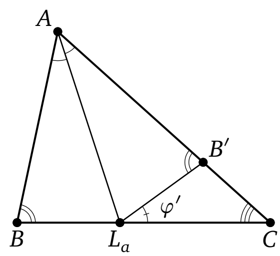


Рис. 5

В дальнейших рассуждениях нам понадобится результат так называемой задачи № 255, получившей широкую известность благодаря предисловию к задачнику И. Ф. Шарыгина [5], в котором она приведена под соответствующим номером.

Лемма 1 (задача № 255). *В точках S_{ab} и S_{ac} пересекаются тройки прямых (G_bG_c, BI, M_aM_b) и (G_bG_c, CI, M_aM_c). Эти точки лежат на окружности λ_a, построенной на стороне BC как на диаметре* (рис. 6).

Замечание. Пусть K_a, K_b и K_c — точки, симметричные точкам G_a, G_b, G_c относительно прямых AI, BI и CI соответственно. Прямая G_aK_b симметрична прямой G_bG_c относительно BI, поэтому точка S_{ab} лежит на G_aK_b. Аналогично точка S_{ac} лежит на G_aK_c (рис. 6).

С точкой Фейербаха оказывается тесно связанной задача, предложенная в 1998 году в финале Всероссийской олимпиады по математике в 10 клас-