Горная
книга

В.Л. Саваторова
А.А. Белый

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНДУКТИВНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

ПРЕПРИНТ

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ГОРНАЯ КНИГА»
2010

УДК 536.2
С 12

Книга соответствует «Гигиеническим требованиям к изданиям книжным для взрослых» СанПиН 1.2.1253-03, утвержденным Главным государственным санитарным врачом России 30 марта 2003 г. (ОСТ 29.124—94). Санитарно-эпидемиологическое заключение Федеральной службы по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека № 77.99.60.953.Д.014367.12.09

Саваторова В.Л., Белый А.А.

С 12 Математическое моделирование процессов кондуктивной теплопередачи в гетерогенных средах с периодической структурой: Отдельные статьи Горного информационно-аналитического бюллетеня (научно-технического журнала). — 2010. — № 9. — 98 с. — М.: Издательство «Горная книга»

ISSN 0236-1493

В данной работе производилось математическое моделирование процессов кондуктивной теплопередачи в гетерогенных средах с периодической структурой. Метод асимптотического усреднения использовался для получения усредненных уравнений теплопроводности в средах с эффективными свойствами. Эффективные характеристики материала определялись для случаев различной геомерии и различного состава его отдельных компонент. Были проведены численные расчеты температурного распределения при различных геометрических и физических характеристиках отдельных неоднородностей.

УДК 536.2

ISSN 0236-1493

УДК 536.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНДУКТИВНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

В данной работе производилось математическое моделирование процессов кондуктивной теплопередачи в гетерогенных средах с периодической структурой. Метод асимптотического усреднения использовался для получения усредненных уравнений теплопроводности в средах с эффективными свойствами. Эффективные характеристики материала определялись для случаев различной геомерии и различного состава его отдельных компонент. Были проведены численные расчёты температурного распределения при различных геометрических и физических характеристиках отдельных неоднородностей.
Ключевые слова: математическое моделирование, кондуктивная теплопередача, уравнение теплопроводности, метод асимптотического усреденения, структурно неоднородные среды

1. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНДУКТИВНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Теплопередача — процесс передачи энергии от более горячего тела к более холодному. Существует три вида передачи тепла. Прежде всего, это кондуктивный механизм передачи тепла, не сопровождаемый переносом вещества, и конвективный механизм, при котором перенос тепла обусловлен движением жидкой или газообразной фазы в порах твердого материала. Для твердых тел с аномально высокой пористостью при значительных градиентах температур необходимо учитывать также перенос тепла излучением. Для описания теплопереноса в большинстве природных материалов при внешнем воздействии, при котором еще не происходит их плавления, вклад излучения в процессы теплопереноса пренебрежимо мал. Наличием жидкости или газа в порах и трещинах твердого материала здесь также будем пренебрегать, сосредоточившись на описании кондуктивного механизма переноса тепла.

Обозначим через $\vec{j}$ плотность кондуктивного теплового потока, определяющего количество тепловой энергии, переносимой через единицу поверхности в единицу времени в направлении нормали к поверхности. Эта величина очевидно должна быть связана с градиентом температуры $\vec{\nabla} T$. В случае, когда градиент температуры не слишком велик, мы можем разложить $\vec{j}$ в ряд по степеням $\vec{\nabla} T$, ограничиваясь лишь первыми членами разложения. Поскольку $\vec{j}$ должно обращаться в нуль вместе с $\vec{\nabla} T$, постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает. Таким образом, для изотропного материала из общих соображений может быть записано соотношение:

$$\vec{j} = -k\vec{\nabla} T, \tag{1}$$

где k — величина, характеризующая свойства материала.

Следует отметить, что соотношение (1) было впервые получено из экспериментов по исследованию распространения тепла в твердых телах и известно как *закон Фурье*, а величина k носит название коэффициента теплопроводности.

Для анизотропных твердых тел поток тепла может не совпадать по направлению с нормалью к изотермической поверхности, и закон Фурье в общем случае имеет вид:

$$j_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{2}$$

где k_{ij} — симметричный тензор второго ранга, который для изотропных сред представляется в виде: $k_{ij} = k\delta_{ij}$.

В уравнении (2) и деле по тексту везде, где это не будет оговорено отдельно, будет предполагаться суммирование по повторяющимся индексам.

В отсутствие процессов массопереноса в твердом теле, когда основным механизмом переноса тепла будет кондуктивная теплопередача, уравнение теплопроводности может быть получено из закона сохранения энергии с учетом закона Фурье. Уравнение теплового баланса для единицы объема изотропного твердого тела с учетом термодинамических соотношений можно записать в виде:

$$T\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} = div\left(k\vec{\nabla}T\right) + \rho q\ , \tag{3}$$

где $\tilde{S}$ — энтропия единицы объема твердого тела, ρ — плотность материала, q — объемный источник тепла.

Производная $\tilde{S}$ может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} = \frac{\partial\tilde{S}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c_V\rho}{T}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{4}$$

где ρ — плотность, а c_V – удельная теплоемкость твердого тела при постоянном объеме определяемая через изменение внутренней энергии как $c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$.

В результате с помощью соотношений (3) — (4) уравнение теплопроводности представляется в виде:

$$c_V\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div\left(k\vec{\nabla}T\right) + \rho q\ . \tag{5}$$

При условии $\frac{c_p - c_V}{c_p} = 1$ (c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении) теплообменом между участками сжатия и расширения твердого тела можно пренебречь, и уравнение теплопроводности принимает более простой вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div\left(k\vec{\nabla}T\right) + \rho q\ . \tag{6}$$

При незначительном изменении температуры в диапазоне упругих напряжений теплоемкость твердого тела при постоянном объеме мало отличается от теплоемкости при постоянном давлении. Поэтому, как в уравнении (6), так и в дальнейшем, мы будем опускать индекс у теплоемкости.

Существенное отличие теплоемкости твердого тела при постоянном объеме от теплоемкости при постоянном давлении наблюдается при высоких температурах и напряжениях сопоставимых с приделом прочности материала, характерных, например, для распространения интенсивных ударных волн в твердых телах. Поведение твердых тел при подобном экстремальном воздействии достаточно подробно было описано в книге Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера.

Для анизотропного твердого тела с учетом закона Фурье, записанного в виде (2), уравнение теплопроводности (7) при условии отсутствия объемных источников тепла будет выглядеть следующим образом:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \qquad (7)$$

В соотношениях (6), (7) плотность, теплоемкость и теплопроводность, вообще говоря, являются функциями температуры и давления, а также зависят от состава вещества и его агрегатного состояния.

Для сред, не обладающих аномально высокой пористостью, при нагружении в области упругих деформаций изменение плотности твердых тел достаточно мало, и плотность может рассматриваться как независящая от давления величина. Для большинства твердых тел коэффициент теплового расширения достаточно мал, что позволяет считать плотность твердого тела постоянной величиной при рассмотрении процессов теплопроводности. Следует отметить, что при рассмотрении области температур, в пределах которой возможны процессы фазовых переходов первого рода (например, плавление) плотности веществ уже нельзя рассматривать как постоянные величины, что приводит к необходимости учета изменения плотности в соотношении (7).

Описание процессов теплопроводности в условиях возможных фазовых переходов не будет здесь обсуждаться.

Как правило, во многих работах предполагается, что при решении задач распространения тепла в твердых телах теплоемкость и коэффициент теплопроводности также считаются постоянными величинами. Однако, при решении практических задач необходимо иметь представление о том, когда данное предположение оправдано. Поэтому остановимся более подробно на рассмотрении данного вопроса.

Экспериментальные исследования показывают, что для большинства материалов, используемых на практике, теплоемкость и коэффициент теплопроводности можно считать независящими от давления величинами в широком диапазоне напряжений, при которых выполняется условие $\left(c_p - c_V\right)/c_p = 1$, используемое при выводе уравнения (7).

В тоже время экспериментальные данные указывают, что теплоемкость и теплопроводность твердых тел может существенно зависеть от температуры. Так в **приложении** приведены результаты экспериментальных изменений данных величин при различных значениях температуры для разных типов материалов.

2. ОБСУЖДЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ ВИДОВ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОЕМКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрим зависимости теплоемкости и теплопроводности твердых тел от температуры в рамках моделей переноса тепловой энергии свободными электронами и атомными колебаниями. Относительно простые результаты удается получить только для твердых тел с кристаллической решеткой с периодической структурой. Основные модели описания теплоемкости кристаллов в рамках квантовой теории были предложены в 1907 году Эйнштейном и в 1912 году Дебаем. Подробное изложение данных теорий представлено в монографиях П.В. Павлова, А.Ф. Хохлова и Ч. Киттеля. Ниже мы приведем краткое описание данных теорий, необходимое для получения зависимости теплоемкости и теплопроводности твердых тел от температуры.

Допустим, трехмерная решетка кристалла устроена так, что на объем V приходится N элементарных ячеек, на каждую из которых приходится r атомов. В этом случае у кристалла будет $3rN$ степеней свободы, и для описания полного спектра колебаний трехмерной решетки получается система $3rN$ связанных уравнений движения. Решение этой системы приводит к существованию $3r$ ветвей колебаний, дисперсионные соотношения для которых могут быть записаны виде:

$$\omega = \omega^{s}_{\vec{k},\nu}, \ \left(\nu = 1, 2, 3; \ \ s = 1, 2, 3, \ldots, r; \ \ \vec{\kappa} - \textit{волновой вектор}\right).$$

Вследствие периодичности кристаллической решетки с периодом a, зависимость частоты ω от волнового вектора оказывается также периодической. Область физически различных значений $\vec{\kappa}$ имеет ширину, пропорциональную $1/a$. Все остальные значения могут быть приведены к значениям из указанной области, которую выбирают так, чтобы точка $\vec{\kappa} = 0$ лежала в ее центре. Эта область носит название зоны Бриллюэна.

Три нижние ветви (рис. 1) называют акустическими, остальные ($3r$–3) являются оптическими. Среди них различают также ветви продольных и поперечных колебаний. Итак, колебания сильносвязанных между собой атомов кристаллической решетки сводятся к совокупности слабо связанных волн с волновым вектором $\vec{\kappa}$ и частотой $\omega\left(\vec{\kappa}, s\right)$, распространяющихся во всем объеме кристалла. Каждой такой волне сопоставляют гармонический осциллятор, колеблющийся с частотой $\omega\left(\vec{\kappa}, s\right)$, в движении которого принимают участие все атомы твердого тела. Средняя энергия каждого такого осциллятора равна