УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

А.Ю. Кузьмин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ И ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО Прометей

УДК 330.4:51
ББК 65.050
К 89

Рецензенты:

А.З. Бобылева — д-р экон. наук, профессор, зав. кафедрой финансового менеджмента ФГУ МГУ имени М.В. Ломоносова,

И.В. Трегуб — д-р экон. наук, профессор, профессор ДАДПРиФТ Финансового университета при Правительстве Российской Федерации

К 89 Кузьмин А.Ю.

Математическое моделирование инвестиционных и финансовых решений: Учебное пособие / А.Ю. Кузьмин. — М.: Прометей, 2020. — 176 с.

Учебное пособие предназначено для бакалавров и магистров, обучающихся по экономическим и финансовым специальностям. В нем нашли свое отражение методы математического моделирования финансовых рисков, моделирования инвестиционного портфеля, принятия решений, моделирования ценообразования и рисков финансовых инструментов, включая долговые инструменты, долевые инструменты, опционы. Отдельная глава посвящена моделированию динамики валютных курсов. Определенное внимание уделено инструментальному уровню. Рассмотрены методы множественного регрессионного анализа в инвестиционных и финансовых эконометрических исследованиях с реализацией в EXCEL и R-STUDIO. На основе представленного в пособии теоретического материала выполнено математическое и эконометрическое моделирование практических ситуаций. Пособие может быть использовано как для проведения семинарских занятий, так и для организации самостоятельной работы студентов.

Данное издание также будет полезно широкому кругу практиков инвестиционно-финансовой отрасли: банковским сотрудникам, дилерам, трейдерам, финансовым аналитикам, риск-менеджерам инвестиционных компаний.

ISBN 978-5-907244-79-5

© Кузьмин А.Ю., 2020
© Издательство «Прометей», 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Методы математического программирования в модельных экономических и финансовых исследованиях 4
§ 1.1. Математическая формализация экономических задач в основных разделах математического программирования 5
§ 1.2. Аналитические оптимизационные методы: метод множителей Лагранжа и теорема Куна — Таккера 22
Глава 2. Моделирование финансовых рисков и инвестиционного портфеля 31
§ 2.1. Моделирование доходностей и рисков инвестиций 32
§ 2.2. Моделирование портфельных инвестиций 39
§ 2.3. Портфельная теория Г. Марковица и Дж. Тобина.....46
Глава 3. Моделирование ценообразования и рисков финансовых инструментов 66
§ 3.1. Моделирование ценообразования и рисков долговых инструментов.....67
§ 3.2. Оценка долевых инструментов: модели дисконтирования дивидендов 81
§ 3.3. Моделирование ценообразования опционов.....91
Глава 4. Моделирование динамики валютных курсов 106
§ 4.1. Модель динамики валютного курса рубля.....107
§ 4.2. Многофакторные модели поведения валютных курсов: монетаристский подход.....117
§ 4.3. Современные подходы к моделированию валютных курсов: динамические стохастические модели общего равновесия.....121
Глава 5. Моделирование ценообразования финансовых активов и портфельных инвестиций 130
§ 5.1. Модель ценообразования финансовых активов (CAPM) и рыночная модель.....130
§ 5.2. Модель арбитражного ценообразования 142
Глава 6. Методы множественного регрессионного анализа в инвестиционных и финансовых эконометрических исследованиях (с реализацией в EXCEL и R-STUDIO) .. 153
§ 6.1. Множественная линейная регрессия 153
§ 6.2. Решение в R-STUDIO задач множественного регрессионного анализа.....159
§ 6.3. Выбор факторных признаков для построения итоговой регрессионной модели.....168

ГЛАВА 1. Методы математического программирования в модельных экономических и финансовых исследованиях

Математическое программирование как раздел науки об исследовании операций является научной дисциплиной, занимающейся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (или оптимального) управления различными организационными системами и процессами. Математическое программирование охватывает широкий класс задач управления, и в первую очередь «хорошо структурированные проблемы», математическими оптимизационными моделями которых являются так называемые экстремальные задачи.

Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим оптимальный выбор одной их допустимых альтернатив образов действий при решении многочисленных проблем управления, проектирования и перспективного планирования сложных систем, в первую очередь экономических и финансовых. Примерами таких задач могут служить классические, имеющие важное значение в экономическо-финансовом анализе задачи построения оптимального инвестиционного портфеля, максимизации прибыли, максимизации доходности инвестиционных операций, оптимального потребления, использования финансовых и иных ресурсов, планирования производства, использования мощностей и загрузке оборудования, задачи о смесях и о раскрое материалов, о количестве транспортных средств при распределениях по линиям и другие задачи транспортного типа. Их объединяет то, что требуется найти решение в условиях, когда выбранный критерий эффективности, выраженный в основном какими-либо интегральными финансовыми показателями — затраты, прибыль, выручка — принимает минимальное или максимальное значение при определенных ограничениях на ресурсы.

Как наука математическое программирование в современном виде сформировалась в 1950–1960-х гг., что главным образом обусловлено развитием и широким использованием

электронных вычислительных машин. Это сделало возможным проводить обработку больших объемов информации, недоступных для ручного счёта, на основании математических методов и формализованных моделей. Однако следует отметить, что базовые принципы решения экстремальных задач с ограничениями были разработаны еще на рубеже XVIII–XIX столетий Ж.Л. Лагранжем и Ж.Б.Ж. Фурье (последний предложил метод направленного перебора смежных вершин в направлении возрастания целевой функции — предтечу симплекс-метода), а принципы линейного программирования впервые изложены Л.В. Канторовичем 1939 г.

В формирование и развитие современного аппарата математического программирования значительный вклад также внесли другие советские и российские ученые — В.В. Новожилов, Е.С. Вентцель, Н.П. Бусленко, Н.Н. Воробьев, Н.Н. Моисеев, Д.Б. Юдин, А.Л. Лурье, Е.Г. Гольштейн, и зарубежные ученые — Дж. фон Нейман, Г. Данциг, Б. Эгервари, Г. Кун, Р. Акоф, Р. Беллман, Р. Черчмен, П. Вольф, Г. Марковиц, Дж. Деннис, Дж. Розен, Г. Зонтендейк и многие другие.

§ 1.1. Математическая формализация экономических задач в основных разделах математического программирования

Математическое программирование — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на конечномерных множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями — равенствами и неравенствами (Математическая энциклопедия).

Само наименование «математическое программирование» связано с тем, что целью решения формализованных задач является выбор программы действий (и не только экономическими агентами).

Определение. *Конечномерное пространство* — это векторное пространство, в котором имеется конечный *базис, то есть порождающая полная линейно независимая система векторов данного пространства*. Таким образом, в таком пространстве существует конечная линейно независимая система векторов, линейной комбинацией которых можно представить любой вектор этого пространства.

В общем виде в модельных экономических исследованиях математическая *задача математического программирования* представляет нахождение экстремума (минимума или максимума) скалярной функции $f(x)$ векторного аргумента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на подмножестве D векторного пространства R^n над полем действительных чисел, определяемого ограничениями в виде равенств и неравенств:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min\limits_{x}(\max) \\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m \\ g_i(x) \geq 0,\ i = m+1, \ldots, k \end{cases} \qquad (1.1)$$

Задача оптимизации в *стандартной форме* (1.1), таким образом, формулируется через систему элементов:

1. *Целевая функция* $f(x)$, характеризующая экономическую эффективность управляемой программы действий (операций) и количественно выражающаяся в виде критерия эффективности.

2. *Критерий поиска эффективности* — *min* или *max* в зависимости экономической постановки задачи.

3. *Допустимое множество решений* (*или планов, программ*) $D = \{x\colon h_i(x) = 0,\ g_j(x) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k\}$, где $h_i(x)$ и $g_j(x)$ — также скалярные функции *системы ограничений*. В математическом программировании термины «решение», «программа», «план» рассматриваются как синонимы. При этом первый термин чаще используется, когда говорят о формальном математическом решении задачи оптимизации, а два других — когда речь идет о содержательной экономической интерпретации процесса эффективного управления различными организационными системами. Если допустимое множество $D = R^n$, то такая задача называется задачей безусловной оптимизации, а в противном случае — задачей условной оптимизации.

4. *Оптимальное решение* (*или оптимальный план, программа*) задачи математического программирования — это вектор-решение $x^* \in D$ системы ограничений, при котором целевая функция $f(x)$ принимает оптимальное (минимальное или максимальное) значение в смысле критерия эффективности операции.

Замечание 1. В случае наличия в рассматриваемой задаче неравенств системы ограничений вида $g_j(x) \leqslant 0$ для приведения в стандартную форму (1.1) достаточно умножить данные неравенства на «-1». То же верно для изменения критерия оптимизации (например, с максимизации на минимизацию для поиска экономической эффективности).

Замечание 2. Дополнительно в модельных экономических исследованиях часто является важным условие, что все переменные допустимого множества D неотрицательны ($x_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., n$).

Необходимо отметить, что при построении экономико-математической модели управляемой программы действий сама операция в первую очередь упрощается и схематизируется в целях формализации с помощью аппарата математического программирования, что требует точной формализации целевой функции, систем уравнений и неравенств ограничений. Соответственно все факторы, входящие в описание модели, разделяются на две группы:

А) постоянные факторы-параметры, на которые влияния нет — условия проведения операции, обозначаемые a_1, a_2, ...;

Б) зависимые факторы — элементы решения допустимого множества D: x_1, x_2, ... , x_n, значения которых в определенных пределах по своему усмотрению может выбирать лицо, принимающее решение (ЛПР).

Постановка задачи оптимизации задаёт большое разнообразие классов, от которых зависит выбор метода и его эффективность. Саму классификацию задач определяют целевая функция и допустимое множество решений в смысле системной взаимосвязи постоянных и зависимых факторов экономико-математической модели.

Методы оптимизации классифицируют в соответствии с задачами оптимизации:

- *Локальные методы*: сходятся к какому-нибудь локальному экстремуму целевой функции. В частности, в случае унимодальной целевой функции, этот экстремум единственен. Он же и будет глобальным экстремумом функции $f(x)$.
- *Глобальные методы:* имеют дело с многоэкстремальными целевыми функциями. При глобальном

поиске основной задачей является выявление тенденций глобального поведения целевой функции $f(x)$ на всем множестве допустимых планов.

Когда целевая функция и функции, определяющие допустимое множество планов D, в задаче оптимизации (1.1) хотя бы дважды дифференцируемы — $f(x)$, $h_i(x)$, $g_j(x) \in C^{(2)}(D)$ — можно применять классические методы дифференциального исчисления. Однако применение этих методов даже в этих случаях исследования операций значительно ограниченно, так как задача определения условного экстремума функции n переменных технически в общем виде достаточно трудна. Дифференциальное исчисление дает возможность определить локальный экстремум, но из-за многомерности функций $f(x)$, $h_i(x)$, $g_j(x)$ определение глобального экстремума целевой функции $f(x)$ может оказаться очень трудоемким. Более того, этот экстремум возможен на границе области решений D, а также классические методы дифференциального исчисления фактически не работают, если, например, целевая функция $f(x)$ задана таблично, множество допустимых значений аргумента x дискретно или факторы-параметры a_i имеют стохастическую природу. Тогда для решения задачи оптимизации (1.1) применяются специальные методы математического программирования, в котором принято выделять следующие основные разделы.

Линейное программирование. Целевая функция $f(x)$ и система ограничений $h_i(x)$, $g_j(x)$ линейны. Тогда задача оптимизации (1.1) формализуется в виде задачи линейного программирования (ЗЛП)

$$\begin{cases} F = f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\limits_{x} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = m+1, \ldots, k \end{cases} \tag{1.2}$$

В случае наличия в рассматриваемой задаче только неравенств системы ограничений, используя методы матричной алгебры, задача (1.2) представляется как:

$$\begin{cases} \vec{c} \times x^{\downarrow} \to \min \\ A \times x^{\downarrow} \geq b^{\downarrow}, \\ A \in R^{k \times n},\ \vec{c} \in R^{1 \times n},\ x^{\downarrow} \in R^{n \times 1} \end{cases} \quad (1.3)$$

где целевая функция $f(x)$ представляет скалярное произведение векторов c и x, A — элемент кольца матриц (размером $r \times n$) над полем действительных чисел. Элементы матрицы A, векторов c и b являются постоянными параметрами задачи (1.3).

Замечание 3. К такой форме (1.3) от (1.2) можно привести всегда, так как равенство $g_j(x) = 0$ эквивалентно системе двух неравенств $\{g_j(x) \leqslant 0,\ g_j(x) \geqslant 0\}$. При этом последнее верно и для задачи математического программирования (1.1) в общем виде.

Если все переменные допустимого множества D неотрицательны $x_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$ и система ограничений (1.3) состоит лишь из одних неравенств — то такая задача линейного программирования называется *стандартной* (или *симметричной*).

При условии, что система ограничений $h_j(x)$ состоит только из одних уравнений, то задача линейного программирования называется *канонической* (или *основной*).

Как известно, любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, для чего в каждое из k неравенств системы ограничений задачи (1.3) введем дополнительные отрицательные переменные x_{n+1}, …, x_{n+i}, …, x_{n+k}, выполняющие в данном случае чисто техническую роль, со знаком «−». В этом случае задача линейного программирования (1.3) примет соответствующий вид:

$$\begin{cases} F = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\limits_{x} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,\ldots,k \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n+k \end{cases}$$

Аналогичный канонический матричный вид (с коррекцией вектора c путем добавления нулевых элементов для введен-

ных дополнительных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+k}$ и матрицы A путем приписывания единичной матрицы размером $k \times k$ справа):

$$\begin{cases} \vec{c} \times x^{\downarrow} \to \min \\ A \times x^{\downarrow} = b^{\downarrow}, \\ x^{\downarrow} \geq 0^{\downarrow}, \\ A \in R^{k \times (n+k)},\ \vec{c} \in R^{1 \times (n+k)},\ x^{\downarrow} \in R^{(n+k) \times 1} \end{cases} \tag{1.4}$$

Замечание 4. В случае неравенств системы ограничений задачи (1.3) вида «$\leqslant$», соответствующие дополнительные технические переменные x_{n+i} вводятся со знаком «+».

Пример 1.1. *Задача планирования производства* (*задача об использовании ресурсов*). Компания «Свет» производит 3 типа комплектов окон для продажи. В таблице приведены временные затраты и прибыль от продажи одного комплекта каждого типа:

Типы окон	Первый этап, ч.	Второй этап, ч.	Прибыль, тыс. руб.
«эконом»	1	0,5	3,5
«стандарт»	2	0,5	7,5
«элит»	2	2	11,0

В компании «Свет» 5 дней в неделю работают 15 рабочих (в одну смену) по 8 рабочих часов, рабочее время которых поделено между двумя различными этапами технологического процесса. Первый этап связан с производством комплектующих и полуфабрикатов для конечного этапа и занимает 55% всего рабочего времени технологического процесса производства. Собственно сборка и доработка окон (второй этап) занимает 45% времени.

Составить план производства продукции, который был бы наиболее прибыльным. Положим, что репутация компании позволяет продавать всю производимую продукцию на рынке.

Решение: составим экономико-математическую модель задачи оптимизации (здесь, как убедимся в дальнейшем, — задачи линейного программирования).

Размерность искомого векторного аргумента $x \in R^3$: $n = 3$. Обозначим x_1, x_2, x_3 — число единиц продукции запланированных к производству соответственно типу комплектов окон.

Целевая функция характеризует экономическую эффективность производства в виде общей прибыли от продажи (в тыс. руб.) и имеет линейный вид (вектор $c = (3{,}5;\ 7{,}5;\ 11)$):

$$f(x) = 3{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + 11x_3.$$

Критерий поиска эффективности — max, так как необходимо максимизировать прибыль.

В компании работают 15 рабочих 5 дней в неделю по 8 рабочих часов, что дает 600 ч в неделю.

Функции системы ограничений ($k = 2$) также имеют линейный вид, так как временные затраты для изготовления x_1, x_2, x_3 единиц по первому этапу не должны превышать $330 \cdot (600 \times 55\%)$ и $270 \cdot (600 \times 45\%)$ по второму этапу. Таким образом, вектор $b = (330;\ 270)^{\mathrm{T}}$ характеризует *запасы (временные) ресурсов,* и связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 330, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 \le 270. \end{cases}$$

Таким образом, матрица A *затрат ресурсов* (элементы которой называют также *технологическими коэффициентами*)

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}.$$

В данной задаче к постоянным факторам относятся временные ограничения каждого этапа, технологические коэффициенты и прибыль от продажи одного комплекта каждого типа.

Также по экономическому смыслу задачи переменные допустимого множества планов D неотрицательны:

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$$

Тогда в данной ситуации задача оптимизации типа (1.3) формализуется в виде ЗЛП:

$$\begin{cases} f(x) = 3{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + 11x_3 \to \max \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 330, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 \le 270. \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальный план-решение возможно найти с помощью процессора EXCEL с использованием функциональной надстройки *Поиск решения*, реализующей *симплекс-метод*.

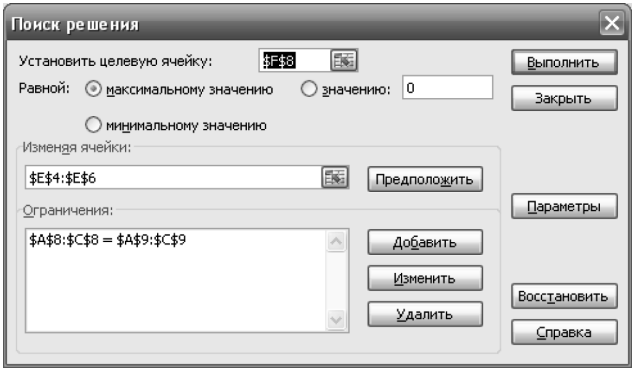
Первоначально организуем данные, как указано в таблице EXCEL.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2								
3	**Первый этап, ч.**	**Второй этап, ч.**	**Прибыль**		*Оптимальный план*			
4	1	0,5	3,50		0,00			
5	2	0,5	7,50		0,00			
6	2	2	11,00		0,00			
7						***Прибыль от продаж***		
8	0	0	0,00			0,00		
9	330	270	600,00					

В ячейках E4:E6 содержится искомое решение оптимального плана. Зададим опорное решение равным 0.

В ячейках A8 и B8 содержатся временные затраты по этапам в виде функции =СУММПРОИЗВ($E$4:$E$6;A4:A6) и =СУММПРОИЗВ($E$4:$E$6;B4:B6).

В ячейке F8 находится общая прибыль от реализации, реализованная функцией =СУММПРОИЗВ($E$4:$E$6;C4:C6). Именно эту ячейку с использованием функциональной надстройки *Поиск решения* необходимо максимизировать как целевую для нахождения решения при изменении ячеек E4:E6 и реализованных временных поэтапных и совокупных ограничениях в ячейках A9, B9 и C9.



Оптимальный план данной задачи $x^* = (0; 40; 125)$: нужно произвести 40 комплектов окон типа «стандарт» и 125 комплектов окон типа «элит», отказавшись от производства окон типа «эконом». Это даст $7{,}5 \cdot 40 + 11 \cdot 125 = 1675$ тыс. руб. общей прибыли от продаж.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2								
3	**Первый этап, ч.**	**Второй этап, ч.**	**Прибыль**		*Оптимальный план*			
4	1	0,5	3,50		0,00			
5	2	0,5	7,50		40,00			
6	2	2	11,00		125,00			
7						***Прибыль от продаж***		
8	330	270	600,00			1675,00		
9	330	270	600,00					

■

Симплекс-метод, позволяющий решить фактически любую задачу линейного программирования, основан на следующей теореме.

Определение. *Симплекс* (лат. *simplex* — простой) — простейший выпуклый полиэдр (многогранник) в n-мерном векторном пространстве, имеющий $n+1$ вершину.

Теорема (без доказательства). Множество решений совместной системы k линейных неравенств с n переменными является выпуклой многогранной областью (выпуклым полиэдром, многогранником) в n-мерном векторном пространстве.

Таким образом, симплексный метод представляет алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования в каноническом виде (1.4) путём перебора вершин выпуклого многогранника множества планов D в n-мерном пространстве с последовательным улучшением решения целевой функции $f(x)$.

Симплекс-метод предложен Дж. Данцигом (1949 г.). Однако еще в работе Л. В. Канторовича[1] «Математические методы организации и планирования производства» (1939 г.) был впервые сформулирован новый класс экстремальных задач с ограничениями (в том числе, *задачи о раскрое с наименьшими потерями материалов, о наилучшей загрузке*

[1] Леонид Витальевич Канторо́вич (1912–1986) — советский математик и экономист, в 1975 году стал лауреатом Нобелевской премии по экономике (совместно с Тьяллингом Купмансом) «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

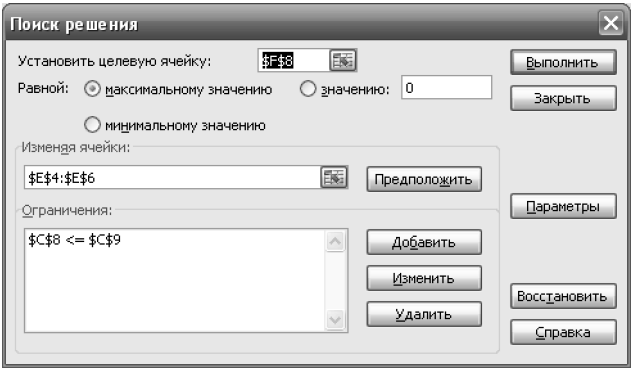
оборудования, о распределении грузов по нескольким видам транспортных средств) и разработан эффективный метод их решения, и, таким образом, были изложены принципы линейного программирования.

Пример 1.1 (продолжение). С позиций лица, принимающего решение (ЛПР) в данной ситуации необходимо уделить внимание самому процессу: оптимально ли распределение рабочего времени между двумя этапами технологического процесса производства? *Как изменится прибыль и оптимальный план производства, если распределить рабочее время правильно между этими этапами* (путем, например, универсализации функций рабочих компании)?

Решение. В данной задаче оптимизации изменятся лишь функции системы ограничений ($k = 1$), также имея линейный вид, так как временные затраты для изготовления x_1, x_2, x_3 единиц по всем этапам не должны превышать 600 ч. Таким образом, вектор $b = (600)$ является скаляром, и связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится неравенством:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 \leqslant 600.$$

Таким образом, надо лишь незначительно скорректировать реализацию ограничений в поиске решения.



Оптимальный план в данной ситуации $x^* = (0; 240; 0)$: нужно произвести 240 комплектов окон только типа «стандарт», отказавшись от производства не только окон типа «эконом», но и от окон типа «элит». Зато это увеличит прибыль компании до $7{,}5 \cdot 240 = 1800$ тыс. руб.

При этом действительно изменится распределение рабочего времени между двумя этапами технологического процесса: 480 ч по первому этапу и 120 ч по второму этапу.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2								
3	**Первый этап, ч.**	**Второй этап, ч.**	**Прибыль**		*Оптимальный план*			
4	1	0,5	3,50		0,00			
5	2	0,5	7,50		240,00			
6	2	2	11,00		0,00			
7						***Прибыль от продаж***		
8	480	120	600,00			1800,00		
9	330	270	600,00					

■

Задание 1.1. Если в целях диверсификации производства необходимо производить минимум по 30 комплектов окон каждого типа, *как изменится прибыль и оптимальный план производства?*

Целочисленное программирование. В задачах оптимизации данного раздела математического программирования на все (или в некоторых условиях часть) переменные множества D дополнительно накладывается ограничение целочисленности. В модельных экономических исследованиях задача оптимизации (1.1) часто формализуется в каноническом виде задачи линейного целочисленного программирования (ЗЛЦП):

$$\begin{cases} F = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\limits_{x}(\max) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, k \\ \exists x_j \in Z,\ \forall x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \end{cases} \qquad (1.5)$$

Задачи целочисленного программирования относятся к задачам ***дискретного программирования*** (или ***комбинаторной оптимизации***) — если множество планов D счётно или конечно. Наиболее известные из них: *задача о назначениях работников на соответствующую работу, задача выбора маршрута коммивояжером или почтальоном, задача оптимизации развития компании при покупке какого-либо типа оборудования*. К частному случаю относятся задачи,

где переменные x могут принимать всего лишь два значения — 0 и 1, называемыми задачами ***булевского программирования***.

Накладываемое ограничение целочисленности на переменные x может означать количество единиц физически неделимого объекта или число альтернатив технологического процесса производства: видов продукции, количества турбин в энергосистеме, количества станков при оптимальной загрузке оборудования, количества транспортных средств при распределениях по линиям и другие *задачи транспортного типа*, а также:

Задача о раскрое материалов. В общем виде данная задача формализуется следующим образом.

Положим, что существует m различных материалов и запас j-го материала равен a_j единиц ($j = 1, \ldots, m$). Надо изготовить из него k разных комплектующих видов продукции в количествах, пропорциональных числам $b_1, \ldots, b_k$ — требование комплектности.

При этом если каждая единица j-го материала может быть раскроена n различными способами, то использование i-го способа дает a_{ijl} единиц l-го вида продукции ($l = 1, \ldots, k$).

Пусть x_{ij} — число единиц j-го материала, раскроенного i-м способом. Обозначим z — количество изготавливаемых комплектов.

Требуется найти оптимальный план раскроя, максимизирующий количество комплектов.

Тогда экономико-математическая модель задачи линейного целочисленного программирования: найти решение

$$x^* = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm})$$

$$\begin{cases} F = z \to \max\limits_{x} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_j,\ j = 1, \ldots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ijl} x_{ij} = b_l z,\ l = 1, \ldots, k \\ \forall x_{ij} \in Z,\ \forall x_{ij} \ge 0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Первые неравенства системы ограничений характеризует ограничения запасов j-го материала a_j, так как необхо-

димое общее количество материала равно сумме его единиц x_{ij}, раскраиваемых различными способами.

Вторая часть системы ограничений-уравнений выражает условие комплектности.

Пример 1.2. Рассмотрим, например, случай однородного материала ($j = 1$). Пусть на обработку и раскрой (здесь — разрез) поступают 101 металлическая заготовка длиной 2,1 м. Из них в соотношении 2:1:1 изготавливаются комплекты брусков длиной 0,3 м, 1 м и 1,9 м. *Определить оптимальный план резки, максимизирующий количество комплектов.*

Решение. Составим и конкретизируем экономико-математическую модель задачи целочисленной оптимизации (1.6). Так как $j = 1$, то индекс j возможно далее опустить.

Определим возможные варианты резки заготовок и соответствующее количество получаемых при этом брусков (табл. 1.1).

Таблица 1.1.

Варианты резки (i)	**Количество получаемых при этом брусков (размер в м)**		
	0,3	1	1,9
1	0	0	1
2	0	2	0
3	3	1	0
4	7	0	0

В обозначениях примера 1.2 x_i — число единиц металлических заготовок, раскроенных i-м способом.

При условии, что не все 101 металлические заготовки должны быть разрезаны, но число брусков каждой длины действительно должно в точности удовлетворять требованию комплектности, в данной ситуации задача оптимизации (1.6) конкретизируется в виде ЗЛЦП (на все переменные накладывается ограничение целочисленности):

$$\begin{cases} f(x) = z \to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 101, \\ x_1 = z, \\ 2x_2 + x_3 = z, \\ 3x_3 + 7x_4 = 2z, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальный план данной задачи $x^* = (56; 28; 0; 16)$, что в итоге даст 56 комплектов брусков. При этом только 100 заготовок должны быть разрезаны. План-решение возможно найти с использованием функциональной надстройки *Поиск решения* процессора EXCEL, задав дополнительно ограничение целочисленности.

С практических позиций интерес представляет ситуация, когда в плане технологического процесса производства стоит требование полного использования запасов материала. Тогда при условии, что уже все 101 металлические заготовки должны быть разрезаны, неравенство системы ограничений станет уравнением:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 101.$$

В ячейках B3:B6 содержится искомое решение оптимального плана, заданное в обратном порядке для соответствия вышеуказанной системе. В ячейке C1 содержится сумма заготовок в виде =СУММ(B3:B6). В ячейках C4:C6 содержатся запрограммированные ограничения системы неравенств. *Оптимальный план* задачи в данной ситуации изменится: $x^* = (56; 21; 14; 10)$, но в итоге также даст 56 комплектов брусков. При этом одна заготовка будет разрезана дополнительно и, таким образом, «зря загублена».

D8 | =СУММПРОИЗВ($B$3:$B$7;F3:F7)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x_i	условие комплектности			
3		10	101	101		0
4		14	-1,3E-08	0		0
5		21	-4,4E-09	0		0
6		56	0	0		0
7	**комплектов изделий**	56				1
8				56		

В ограничениях *Поиска решения* необходимо указать требование целочисленности оптимального плана.