

**Н. Н. БЕЛОВ, Д. Г.
КОПАНИЦА, Н. Т. ЮГОВ**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКОЙ
ПРОЧНОСТИ
КОНСТРУКЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ. ТОМ 3.
ФИЗИКА УДАРНЫХ
ВОЛН. ДИНАМИЧЕСКОЕ
РАЗРУШЕНИЕ ТВЕРДЫХ
ТЕЛ

УДК 531.3: 539.3
Б43

Б43 Белов Н.Н., Копаница Д.Г., Югов Н.Т. **Математическое моделирование динамической прочности конструкционных материалов. Том 3. Физика ударных волн. Динамическое разрушение твердых тел.** – Томск : STT, 2010. – 318 с.

ISBN 987-5-93629-394-8

В книге представлен курс лекций по математическому моделированию поведения материалов при взрывном и ударном нагружениях сред сложной структуры с учетом больших деформаций, неупругих эффектов, фазовых превращений (в том числе полиморфных) и разрушения. В первом томе изложены основы тензорного исчисления. Второй том посвящен общим понятиям механики сплошной среды и ее простейшим моделям. Приведены некоторые сведения из решений уравнений в частных производных гиперболического типа. В третьем томе рассмотрены ударно-волновые явления в твердых деформируемых телах и предложены математические модели, позволяющие в рамках механики сплошной среды рассчитывать напряженно-деформированное состояние и разрушение в конструкционных материалах (металлах, сплавах, полимерах, керамике, металлокерамике, бетоне, железобетоне и т.д.) при ударно-волновом нагружении.

Книга предназначена для студентов и аспирантов технических университетов, занимающихся вопросами динамической прочности твердых тел.

УДК 531.3:539.3

Рецензенты:

С.В. Панько, д.ф.-м.н., профессор,
зав. кафедрой общей математики ТГУ;

А.А. Клопотов, д.ф.-м.н.,
профессор ТГАСУ

ISBN 987-5-93629-394-8

© Н.Н. Белов, Д.Г. Копаница, Н.Т. Югов, 2010
© Дизайн. Оформление. STT™, 2010

Оглавление

Предисловие	8
ГЛАВА 1. ОДНОМЕРНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ СРЕД	11
1.1. Уравнения механики сплошной среды в случае малых возмущений	15
1.2. Акустические волны	18
1.3. Простая волна	23
1.4. Волны сжатия и расширения	28
ГЛАВА 2. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ	34
2.1. Основные соотношения на ударном разрыве	34
2.2. Некоторые закономерности сжатия и течения в ударных волнах	39
2.3. Сжатие твердых тел ударными волнами	46
2.4. Изэнтропическое расширение ударно сжатых материалов	58
2.5. Взаимодействие волн. Произвольный разрыв	68
2.6. Полиморфные превращения при ударном сжатии твердых тел. Ударные волны разрежения	80
2.7. Откольное разрушение конструкционных материалов	94
ГЛАВА 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ	100
3.1. Методы и устройства для создания интенсивных ударных нагрузок	101
3.1.1. Взрывные генераторы динамических давлений	102
3.1.2. Баллистические установки для экспериментов с ударными волнами	108
3.1.3. Перспективные источники высоких динамических давлений	110
3.2. Регистрация быстропротекающих процессов в динамических исследованиях	112
3.2.1. Дискретные методы измерения волновых и массовых скоростей	113
3.2.2. Методы регистрации профилей давления	115

3.3.2.1.	Манганиновые пьезорезисторы	115
3.2.2.2.	Кварцевые датчики давления	120
3.2.2.3.	Диэлектрические и сегнетоэлектрические пленочные датчики давления	122
3.2.3.	Методы регистрации профилей скорости движения вещества	124
3.2.3.1.	Емкостные датчики скорости	124
3.2.3.2.	Магнитоэлектрический метод	126
3.2.3.3.	Лазерные доплеровские измерители скорости	128
3.2.4.	Регистрация волновых профилей с применением преград-индикаторов	134
3.2.4.1.	Лазерный измеритель волновых скоростей	135
3.2.4.2.	Оптический метод исследования эволюции ударной волны	136
3.3.	Экспериментальные методы отыскания ударной адиабаты твердого тела	137
3.3.1.	Метод откола	138
3.3.2.	Метод торможения	141
3.3.3.	Метод отражения	143
3.3.4.	Адиабата двукратного сжатия	146
ГЛАВА 4.	МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ПОРИСТОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ ПОЛИМОРФНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ	148
4.1.	Основные уравнения модели	149
4.2.	Кинетическое уравнение, описывающее процесс уплотнения гранулированных материалов при ударно-волновом нагружении	164
4.3.	Уравнения состояния твердого тела	170
4.4.	Математическое моделирование динамического разрушения пластических материалов	182
4.5.	Влияние полиморфного фазового превращения в стали на структуру волн напряжения и откольное разрушение при ударном нагружении	188
4.6.	Влияние начальной пористости на откольное разрушение в материале, испытываемом при деформации полиморфный фазовый переход	201
4.7.	Влияние упрочнения материалов на процессы деформирования и разрушения цилиндрических стержней при одноосном растяжении и сжатии	206

ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ УДАРНО-ВОЛНОВОГО НАГРУЖЕНИЯ	217
5.1. Математическая модель	217
5.2. Разрушение керамик АД-85, TiB_2 и V_4C	223
5.3. Разрушение металлокерамики на основе TiB_2+V_4C	234
5.4. Расчет прочности бетона и железобетонных плит на ударные нагрузки	244
ГЛАВА 6. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕОДНОКРАТНЫХ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ	254
6.1. Исследование особенностей проникания в стальные мишени компактных цилиндрических ударников при последовательном групповом ударе	256
6.2. Прогнозирование последствий высокоскоростного соударения цилиндрических стержней с пространственно-разнесенными оболочками, экранирующими взрывчатое вещество (ВВ)	268
6.3. Разрушение сферических частиц из хрупких материалов при неоднократном ударе по жесткой стенке	278
6.4. Расчет прочности железобетонных колонн на повторный удар	286
6.4.1. Продольный повторный удар	288
6.4.2. Повторный поперечный удар	296
Список литературы	306
Summary	317

1 | Одномерные непрерывные движения сжимаемых сред

Во втором томе курса лекций, в разделе 11.10 приведена замкнутая система уравнений, описывающих пространственное адиабатное движение упруго-пластической среды, занимающей в пространстве некоторый объем, ограниченный поверхностью Σ . Она включает в себя основные законы сохранения (массы, количества движения, энергии) и замыкается определяющими соотношениями теории пластического течения Прандтля–Рейсса и уравнением состояния. Применяя к ним теорему Остроградского–Гауса, выпишем законы сохранения в дифференциальном виде в переменных Эйлера в декартовой системе координат (x, y, z) [1].

Закон сохранения массы можно представить в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{u} = 0 \quad (1.1)$$

или

$$\frac{dv}{dt} - v \operatorname{div} \bar{u} = 0. \quad (1.1a)$$

Введены следующие обозначения:

ρ – плотность вещества;

$v = 1/\rho$ – его удельный объем;

$\bar{u}(u_x, u_y, u_z)$ – вектор массовой скорости;

$\operatorname{div} \bar{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ – его дивергенция;

$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ – полная или субстанциональная производная от удельного объема.

Принимая во внимание, что тензор напряжений представляется как сумма шарового тензора напряжений и девиатора напряжений, закон сохранения количества движения можно преобразовать к виду:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.2)$$

или

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} + \operatorname{grad} p - \left(\frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.2a)$$

где:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_{xx} \bar{i} + \tau_{yx} \bar{j} + \tau_{zx} \bar{k};$$

$$\bar{\sigma}_y = \tau_{xy} \bar{i} + \sigma_{yy} \bar{j} + \tau_{zy} \bar{k};$$

$$\bar{\sigma}_z = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j} + \sigma_{zz} \bar{k};$$

$$\bar{s}_x = s_{xx} \bar{i} + \tau_{yx} \bar{j} + \tau_{zx} \bar{k};$$

$$\bar{s}_y = \tau_{xy} \bar{i} + s_{yy} \bar{j} + \tau_{zy} \bar{k};$$

$$\bar{s}_z = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j} + s_{zz} \bar{k};$$

p – давление;

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zz}$ – компоненты тензора напряжений;

$s_{xx}, \tau_{xy}, \dots, s_{zz}$ – компоненты девиатора напряжений.

Уравнение движение в виде (1.2a) содержит часть уравнения

движения идеальной среды и переходит в него непрерывно при $\bar{s}_x \rightarrow 0, \bar{s}_y \rightarrow 0, \bar{s}_z \rightarrow 0$.

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} + \text{grad } p = 0. \quad (1.26)$$

Удельная энергия E складывается из удельной внутренней энергии e и удельной кинетической энергии $0,5u^2$, где u – модуль вектора массовой скорости.

Закон сохранения энергии для неидеальной среды имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \text{div}(\rho E \bar{u}) - \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} u_x + \tau_{xy} u_y + \tau_{xz} u_z) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} u_x + \sigma_{yy} u_y + \tau_{yz} u_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} u_x + \tau_{zy} u_y + \sigma_{zz} u_z) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \text{div}(\rho E + p) \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x}(s_{xx} u_x + \tau_{xy} u_y + \tau_{xz} u_z) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} u_x + s_{yy} u_y + \tau_{yz} u_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} u_x + \tau_{zy} u_y + s_{zz} u_z) = 0. \end{aligned} \quad (1.3a)$$

В случае равенства нулю дивергенции напряжений уравнение (1.3a) совпадает с уравнением энергии идеальной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \text{div}((\rho E + p) \bar{u}) = 0. \quad (1.36)$$

Если среда идеальная, то для замыкания системы уравнений (1.1), (1.26), (1.36) необходимо добавить калорическое уравнение состояния вида:

$$p = f(\rho, e). \quad (1.4)$$

При решении задач в рамках модели идеального упругопластического тела к основным законам сохранения, выраженным уравнениями (1.1), (1.2a), (1.3a), необходимо добавить уравнение состояния (1.4) и определяющие уравнения теории пластического течения Прандтля–Рейсса, а так же условие текучести Мизеса.

Рассмотрим в начале наиболее простой случай, когда все величины зависят от одной пространственной переменной, например x , а на любой плоскости ортогональной оси x , каждая величина принимает единственное значение. Это дает основание называть такие течения одномерными течениями с плоской симметрией.

Полная производная от какой-либо функции $f(t, \bar{x})$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Вследствие того, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ u_y = u_z = 0, \\ u_x = u, \end{aligned}$$

она примет вид $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x}$.

С учетом этого замечания (1.1a) упростится

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.5a)$$

Прежде чем записать уравнения движения и уравнение энергии для упругопластической среды для одномерного случая с плоской симметрией, рассмотрим компоненты девиатора тензора напряжений. Поскольку оси y и z равноправны, $s_{yy} = s_{zz}$, $\tau_{xy} = \tau_{xz}$.

Из условия, что первый инвариант девиатора тензора напряжений равен нулю ($s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0$), получим $s_{yy} = s_{zz} = -0,5 s_{xx}$.

Из трех уравнений (1.2a), записанных для компонент векторов, вытекает уравнение движения:

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

и условия, которым должны удовлетворять касательные напряжения:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

Поскольку движения вещества в плоскости yOz нет, то:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (1.8)$$

Инварианты тензора девиатора напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0, \\ I_2 &= -1/2(s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -3/4s_{xx}^2, \\ I_3 &= s_{xx}s_{yy}s_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - s_{xx}\tau_{yz}^2 - s_{yy}\tau_{zx}^2 - s_{zz}\tau_{xy}^2 = -1/4s_{xx}^3. \end{aligned}$$

В каждой точке среды существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Направления нормалей к этим площадкам образуют главные направления (главные оси) тензора напряжений. Эти направления не зависят от исходной системы координат (x, y, z) .

Обозначим компоненты девиатора напряжений на этих площадках через s_1, s_2, s_3 . Легко показать [1], что в случае одномерного деформированного состояния $s_{xx} = s_1, s_{yy} = s_2, s_{zz} = s_3$. Тогда уравнения движения и энергии с учетом этого замечания примут вид:

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial s_1}{\partial x} = 0; \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho E + p - s_1)u) = 0. \quad (1.10)$$

1.1. Уравнения механики сплошной среды в случае малых возмущений

Если в некоторой точке сплошной среды изменить хотя бы одну из величин, характеризующих состояние и движение

вещества, то это возмущение с течением времени будет распространяться во все стороны. Рассмотрим дифференциальные уравнения, описывающие малые возмущения в идеальной жидкости. В случае одномерного движения среды уравнения неразрывности и движения принимают вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.5a)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

где давление $p = p(\rho, s)$ – функция плотности ρ и энтропии s .

Производную $\frac{\partial p}{\partial x}$ заменим выражением:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (1.12)$$

а $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ – величиной c^2 . В результате получим:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x} = 0; \quad (1.13)$$

Предположим:

- энтропия s постоянна, т.е. $s = \text{const}$, $\partial s / \partial x = 0$;
- $c^2 = \text{const}$;
- величины ρ и u имеют вид $\rho = \rho_0 + \delta \rho$, $u = \delta u$, где $\rho_0 = \text{const}$, а $\delta \rho$ и δu малы настолько, что их произведениями $\delta \rho \delta u$, $(\delta \rho)^2$, $(\delta u)^2$ можно пренебречь.

Эти допущения являются характеристикой малых возмущений. Если возмущения таковы, что указанные условия выполняются хотя бы приближенно, то эти возмущения можно считать малыми. После сделанных предположений линеаризованные уравнения (1.5a) и (1.13) принимают вид:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} = 0. \quad (1.14)$$

Продифференцируем первое из уравнений (1.14) по t , второе по x и вычтем их друг из друга, получим классическое уравнение колебаний:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0. \quad (1.15)$$

Здесь под δ подразумевается малое возмущение $\delta \rho$, но при ином порядке дифференцирования аналогичное уравнение получается и для δu . Если предположить, что при $t = 0$,

$$\begin{aligned} \delta &= f(x), \\ \partial \delta / \partial t &= 0, \end{aligned}$$

то решение уравнения (1.15) имеет вид:

$$\delta = 0,5(f(x + ct) + f(x - ct)). \quad (1.16)$$

Иными словами, начальное возмущение $f(x)$ при $t > 0$ распадается на две одинаковые волны $f(x + ct)/2$ и $f(x - ct)/2$, которые переносятся вдоль характеристик $x + ct = x_0$ и $x - ct = x_0$ со скоростью равной наклону $dx/dt = \pm c$.

Эта скорость зависит только от свойств среды и не зависит от формы возмущения.

Типичными для сплошных сред малыми возмущениями являются шумы, звуковые сигналы, поэтому величина c называется скоростью звука или скоростью объемных деформаций.

Что касается упругой среды, то выписывая три уравнения движения и рассматривая возмущения, в которых все величины зависят только от x и не зависят от y и z , полагая при этом, что отсутствует вращение частиц тела, можно получить три волновых уравнения типа (1.15) [1], в двух из которых перед второй производной по координате стоит квадрат поперечной скорости звука

$$c_{\text{поп}}^2 = \mu / \rho,$$

а в третьем – продольной

$$c_{\text{прод}}^2 = E(1-\nu) / [\rho(1+\nu)(1-2\nu)],$$

где E – модуль Юнга; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Таким образом, в упругой изотропной среде возможны две плоские независимые волны: продольная и поперечная. В продольной волне смещение совпадает с направлением распространения волны, в ней же происходит изменение плотности. В поперечной волне смещение лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения упругой волны. Изменения плотности в поперечной волне не происходит.

Скорости распространения этих волн связаны со скоростью звука c в идеальной среде следующими зависимостями:

$$c_{\text{прод}}^2 = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} c^2, \quad (1.17)$$

$$c_{\text{поп}}^2 = \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu} c^2. \quad (1.18)$$

В жидкости $\nu = 0,5$ из (1.17) и (1.18) вытекает, что:

$$\begin{aligned} c_{\text{прод}} &= c, \\ c_{\text{поп}} &= 0. \end{aligned}$$

Иными словами, в жидкости волны сдвига существовать не могут, так как скорость распространения слабых (звуковых) поперечных возмущений равна нулю. В то же время продольные волны в жидкости превращаются в волны всестороннего сжатия, распространяющиеся со скоростью звука жидкости.

1.2. Акустические волны

Скорость звука как скорость распространения малых возмущений относительно среды входит в уравнение движения сжимаемой среды. Квадрат скорости звука стоит в виде множителя перед вторыми производными по пространственной координате. Соотношения (1.17), (1.18) между $c_{\text{прод}}$, $c_{\text{поп}}$ и c показывают, что в упругой среде, где $\nu < 0,5$:

$$c_{\text{прод}} > c_{\text{поп}} > c \quad (1.19)$$

Проанализируем свойства волновых уравнений идеальной и упругой сред. В дальнейшем мы будем рассматривать решение уравнения (1.15), поскольку оно одновременно является и решением каждого из волновых уравнений, записанных для упругой среды, при условии, что вместо c берется либо $c_{\text{прод}}$, либо $c_{\text{поп}}$.

Перейдем к новым переменным:

$$\xi = x + ct, \eta = x - ct, \quad (1.20)$$

В новой системе координат преобразованное уравнение (1.15) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.21)$$

Непосредственное интегрирование уравнения (1.21) дает его решение:

$$\delta(\eta, \xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (1.22)$$

где f_1 – функция только переменного ξ , f_2 – функция только переменного η . Функции f_1 и f_2 являются произвольными, их можно определить из начальных условий:

$$\delta|_{t=0} = g_1(x), \quad \frac{\partial \delta}{\partial t}|_{t=0} = g_2(x). \quad (1.23)$$

Из (1.22) и (1.23) следует, что:

$$\begin{aligned} \delta(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = g_1(x), \\ \frac{\partial \delta(x, 0)}{\partial t} &= c \left(\frac{df_1}{d\xi} - \frac{df_2}{d\eta} \right) = g_2(x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Интегрируя второе равенство, получаем:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g_2(\alpha) d\alpha + k, \quad (1.25)$$

где x_0, k – постоянные.

Из первого равенства (1.24) и (1.25) вытекает, что:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} g_1(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g_2(\alpha) d\alpha + \frac{k}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} g_1(x) - \frac{1}{2c} \int_x^{x_0} g_2(\alpha) d\alpha - \frac{k}{2}. \quad (1.26)$$

Из (1.22) и (1.26) следует общее решение в виде:

$$\delta(x, t) = \frac{1}{2} g_1(x - ct) + \frac{1}{2} g_1(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g_2(\alpha) d\alpha.$$

Рассмотрим случай $g_2(x) = 0$. Предыдущее уравнение при этом упрощается:

$$\delta(x, t) = 0,5 [g_1(x - ct) + g_1(x + ct)]. \quad (1.27)$$

Малые возмущения скорости δu , давления δp и плотности $\delta \rho$ в акустической волне связаны уравнениями:

$$\delta u = \pm c \delta \rho / \rho,$$

$$\delta u = \pm \delta p / (\rho c),$$

$$\delta p = c^2 \delta \rho.$$

Предположим, что функция $\delta(x, t)$ равна возмущению плотности $\delta \rho$, умноженному на c/ρ_0 . Постановка (1.27) в эти уравнения дает:

$$\begin{aligned} \delta \rho &= 0,5 \rho_0 [g_1(x - ct) + g_1(x + ct)] / c, \\ \delta p &= 0,5 \rho_0 c [g_1(x - ct) + g_1(x + ct)], \\ \delta u &= 0,5 [g_1(x - ct) - g_1(x + ct)]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Из этих уравнений следует, что при $t = 0$:

$$\delta u = 0,5 [g_1(x, 0) - g_1(x, 0)] = 0.$$

Выразим функцию g_1 через $\delta \rho$ и δu :

$$\begin{aligned} g_1(x - ct) &= (c/\rho_0) \delta \rho(x, t) + \delta u(x, t), \\ g_1(x + ct) &= (c/\rho_0) \delta \rho(x, t) - \delta u(x, t). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Пусть в начальный момент времени задано произвольное распределение плотности: $\delta \rho_0(x, 0)$, а $\delta u_0(x, 0) = 0$. В этом случае из (1.29) вытекает, что:

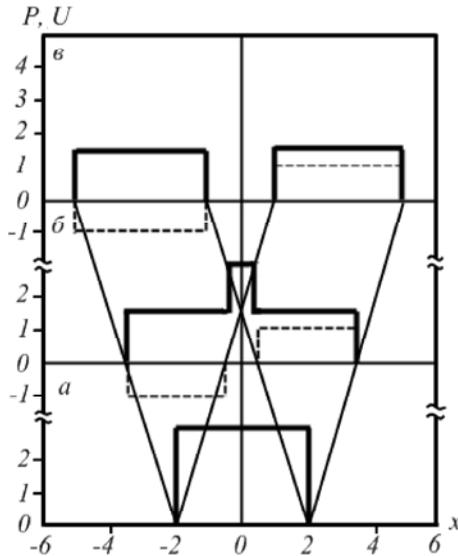


Рис. 1.1. Зависимость $\delta\rho_0(x)$ (сплошные линии) и $\delta u(x)$ (пунктирные) на три момента времени: $t = 0$ (а); 1(б); 2(в). Начальные данные: $\delta\rho_0 = 3; \delta u_0 = 0, -2 \leq x \leq 2; \delta\rho_0 = 0; \delta u_0 = 0, x < -2$ и $x > 2$

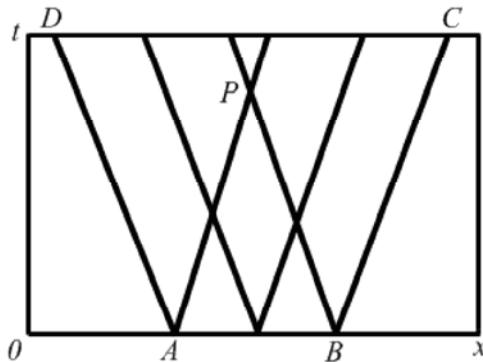


Рис. 1.2. Области зависимости решения АВ и влияния начальных данных ABCD. Линии с положительным наклоном – α -характеристики, с отрицательным – β -характеристики

$$g_1(x) = (c/\rho_0) \delta\rho_0(x).$$

После перехода к новым аргументам функции $g_1(x - ct)$ и $g_1(x + ct)$ принимают вид:

$$\begin{aligned} g_1(x - ct) &= (c/\rho_0) \delta\rho_0(x - ct), \\ g_1(x + ct) &= (c/\rho_0) \delta\rho_0(x + ct). \end{aligned}$$

Подставляя эти функции в формулы (1.28), получаем решение волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= 0,5[\delta\rho_0(x - ct) + \delta\rho_0(x + ct)], \\ \delta p &= 0,5c^2 [\delta\rho_0(x - ct) + \delta\rho_0(x + ct)], \\ \delta u &= 0,5(c/\rho_0) [\delta\rho_0(x - ct) - \delta\rho_0(x + ct)]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Картина возникающего движения показана на рис. 1.1.

Если в начальный момент $t=0$ задаются профили плотности $\delta\rho_0(x,0)$ и скорости $\delta u(x,0)$, то распространение импульса возмущения определяется формулами (1.28), (1.29).

В важном частном случае, когда $\delta u_0 = c\delta\rho_0/\rho_0$, оказывается, что $g_1(x + ct) = 0$, т.е. будет существовать только одна волна, распространяющаяся в положительном направлении оси ox . Решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \delta\rho_0(x - ct); \\ \delta u &= \delta u_0(x - ct); \\ \delta p &= c^2\delta\rho_0(x - ct). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Найдем на оси x область, от которой зависит течение в произвольной точке P плоскости (x,t) . Характеристики, проходящие через точку P , пересекают ось x в точках A и B (см. рис. 1.2).

Состояние среды в точке P полностью определяется заданием начальных условий на отрезке AB и не зависит от исходного состояния среды вне его.

Отрезок AB называется областью зависимости решения в точке $P(x,t)$. Из рисунка 1.2 также видно, что влияние начального состояния среды на отрезке AB на течение в последующие моменты времени ограничивается характеристиками AD слева и BC справа. Область, заключенная между осью x и указанными характеристиками, называется областью влияния начальных возмущений, за-

данных на отрезке АВ оси x . При определении областей зависимости и влияния предполагалось, что характеристики одного семейства не пересекаются друг с другом, что справедливо для непрерывного течения.

1.3. Простая волна

Пусть среда движется с некоторой скоростью u . Движение будем считать плоским и изэнтропическим. Состояние среды описывается функциями $u(x,t)$, $p(x,t)$, $\rho(x,t)$. В начальный момент t_0 зададим малое возмущение в точке x_0 . В лабораторной системе координат возникающие акустические волны будут иметь скорость распространения:

$u + c$ – волна, бегущая вниз по течению или вправо;

$u - c$ – волна, бегущая против течения или влево.

В плоскости x , t пути или траектории распространения волн описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x,t) + c(x,t), \\ \frac{dx}{dt} &= u(x,t) - c(x,t). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Скорость распространения возмущений, как следует из (1.32), будет переменной и пути их распространения в плоскости x , t будут искривляться. В плоском изэнтропическом течении существуют два семейства характеристик: α -характеристики, определяемые первым уравнением, и β -характеристики определяемые вторым уравнением системы (1.32). Таким образом, через каждую точку в плоскости x , t можно провести α - и β -характеристики. В литературе, например [7], их часто называют, соответственно, C_+ и C_- характеристиками.

При адиабатическом течении энтропия различных частиц иная, и возможны возмущения энтропии. Поскольку $ds/dt = 0$, возмущения энтропии связаны с частицей и перемещаются вместе с ней, т.е. пути распространения возмущений энтропии описываются

уравнением $dx/dt = u$. Пути распространения возмущений энтропии носят название C -характеристик. В адиабатическом течении, следовательно, через каждую точку в плоскости x, t проходят три характеристики: α, β, C .

Преобразуем уравнения неустановившегося движения сплошной сжимаемой среды таким образом, чтобы они содержали производные от параметров течения вдоль характеристик. Выпишем для этого исходную систему уравнений адиабатического одномерного движения сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

В системе уравнений (1.33) число уравнений равно числу характеристик. Запишем уравнение состояния в форме $p = p(\rho, s)$. Первые два члена в правой части уравнения неразрывности могут быть преобразованы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (1.34)$$

Используя (1.34) в первом из уравнений (1.33), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.35)$$

Умножим его на произвольный множитель λ и сложим со вторым уравнением (1.33). В результате имеем:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho u + \lambda \rho c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial p}{\partial t} + (1 + \lambda u) \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (1.36)$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при производных по t и по x

были пропорциональны. Решение уравнения пропорциональности коэффициентов дает $\lambda = \pm 1/c$.

При подстановке этих значений в (1.36) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0. \quad (1.38)$$

Уравнение (1.37) содержит полные производные вдоль α -характеристик, а уравнение (1.38) – вдоль β -характеристик. Их можно трактовать следующим образом: по направлению $dx/dt = u + c$ выполняется соотношение:

$$du + dp/(\rho c) = 0; \quad (1.39)$$

по направлению $dx/dt = u - c$ – соотношение:

$$du - dp/(\rho c) = 0. \quad (1.40)$$

Уравнение адиабатичности можно рассматривать как уравнение вдоль S -характеристик, означающее, что по направлению траектории частиц $dx/dt = u$ сохраняется энтропия $ds = 0$. Отметим, что член $dp/(\rho c)$ в адиабатическом течении не есть полный дифференциал, так как скорость звука зависит не только от давления, но и от энтропии. Из формул (1.39) и (1.40) следует, что вдоль характеристик переносятся определенные комбинации величин, характеризующих непрерывное течение сжимаемой среды.

В изэнтропическом потоке сжимаемой среды, когда энтропия постоянна в пространстве и времени, скорость звука и давление зависят только от плотности. В силу изэнтропичности течения дифференциальные уравнения (1.39) и (1.40) будут представлять полные дифференциалы величин:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= u + \int \frac{dp}{\rho c} = u + \int \frac{c}{\rho} d\rho, \\ I_\beta &= u - \int \frac{dp}{\rho c} = u - \int \frac{c}{\rho} d\rho. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Величины I_α и I_β называются инвариантами Римана.

Рассмотрим инварианты Римана в случае простейшего уравнения состояния:

$$P = (\rho_{0k} c_{0k}^2 / m) [f(s)(\rho / \rho_{0k})^m - 1], \quad (1.42)$$

где $\rho_{0k} = 1/v_{0k}$; v_{0k} – удельный объем кристаллического состояния с максимально плотной упаковкой атомов при температуре $T = 0$ °K; c_{0k} – скорость звука при $T = 0$ °K; m – константа материала [1].

Будем считать, что $f(s) = const$. Если положить, что вещество находится под давлением p_0 и имеет плотность ρ_0 , то (1.42) можно переписать в виде:

$$p = \frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{m} \left[\left(1 + \frac{mp_0}{\rho_{0k} c_{0k}^2} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m - 1 \right], \quad (1.43)$$

Дифференцирование p по ρ дает выражение:

$$c^2 = \frac{mp_0 + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{m-1},$$

из которого вытекает, что при $p = p_0$, $\rho = \rho_0$:

$$c_0^2 = \frac{mp_0 + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_0}.$$

Следовательно:

$$c^2 = c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{m-1}. \quad (1.44)$$

Выразим отсюда ρ через c и, подставив в (1.41), получим после интегрирования:

$$I_\alpha = u + \frac{2}{m-1} c, \quad I_\beta = u - \frac{2}{m-1} c. \quad (1.45)$$

Инварианты Римана постоянны вдоль соответствующих характеристик. В общем случае вдоль каждой характеристики одного

семейства значения инвариант имеют свое значение. Инварианты Римана однозначно связаны с u и c , и их можно рассматривать как новые функции, описывающие течение.

Для рассмотренного случая, из формул (1.45) следует:

$$u = (I_\alpha + I_\beta)/2, \quad c = (m-1)(I_\alpha - I_\beta)/4. \quad (1.46)$$

Соответственно, уравнения характеристик будут:

$$\begin{aligned} dx/dt &= (m+1)I_\alpha/4 + (3-m)I_\beta/4, \\ dx/dt &= (3-m)I_\alpha/4 + (m+1)I_\beta/4. \end{aligned} \quad (1.47)$$

В частном случае при $m=3$ оба семейства характеристик в плоскости (x,t) , как следует из (1.47), будут представлять собой прямые линии:

$$dx/dt = I_\alpha, \quad dx/dt = I_\beta. \quad (1.48)$$

Как было показано, малые возмущения, созданные в начальном состоянии среды, распространяются вправо и влево со скоростью звука. Это значит, что в волне, идущей, например, вправо, β -инвариант постоянен, в волне же, идущей влево, постоянен α -инвариант.

Иными словами, если в начальном состоянии среды создать непроизвольное возмущение, а такое в котором один из инвариантов постоянен, то волна будет распространяться лишь в одном направлении.

Кроме того, из (1.48) следует, что в этом случае характеристики противоположного семейства прямолинейны.

Движение сплошной среды, в котором одно из семейств α -, β -характеристик состоит из прямых линий, называется бегущей или простой волной.

Замечание: Поскольку инвариант, постоянный во всем течении, задается начальным распределением $u(x,0)$ и $c(x,0)$, то для существования течения типа простой волны необходимо, чтобы оно граничило с областью покоя или постоянного течения.

Вернемся к течению типа простой волны в общем случае, не делая допущений о малости возмущений. Предположим, что волна распространяется вправо. Для такой волны I_β -инвариант постоянен. Уравнения α -характеристик:

$$dx/dt = F_{\alpha}(I_{\alpha}, I_{\beta}) \quad (1.49)$$

представляет собой прямые линии.

Интегрируя уравнение (1.49), получим:

$$x = F_{\alpha}(I_{\alpha}, I_{\beta})t + \varphi(I_{\alpha}). \quad (1.50)$$

Функция $F_{\alpha} = \text{const}$, так как $I_{\alpha} = \text{const}$ вдоль α -характеристики, а $I_{\beta} = \text{const}$ во всем течении. Постоянная интегрирования $\varphi(I_{\alpha})$ определяется из начальных и граничных условий. Уравнение (1.50) эквивалентно уравнению:

$$x = [u \pm c(u)]t + \varphi(u), \quad (1.51)$$

которое получается из уравнения α -характеристики:

$$dx/dt = u + c(u).$$

Из формулы (1.51) видно, что решение представляет собой волну, бегущую со скоростью $u + c(u)$ в лабораторной системе координат.

Используя результаты предыдущего раздела, решение может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= f(x - [u + c(u)]t), \\ c &= g(x - [u + c(u)]t). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Аналогичным образом может быть построено решение для волны, бегущей влево. Для нее $I_{\alpha} = \text{const}$ во всем течении, и β -характеристики – прямые линии. Решение для такой волны имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= [u - c(u)]t + \varphi_1(u), \\ u &= f_1(x + [c(u) - u]t), \\ c &= g_1(x + [c(u) - u]t). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Вид функций $f, f_1, \varphi(u), c(u), g, g_1$ определяется начальными и граничными условиями.

1.4. Волны сжатия и расширения

Выражения (1.47), (1.51) и (1.53) показывают, что для бегущих волн различные значения термодинамических величин переносятся вдоль характеристик с разными скоростями. Это определяется нелинейностью уравнений движения, и приводит с тече-

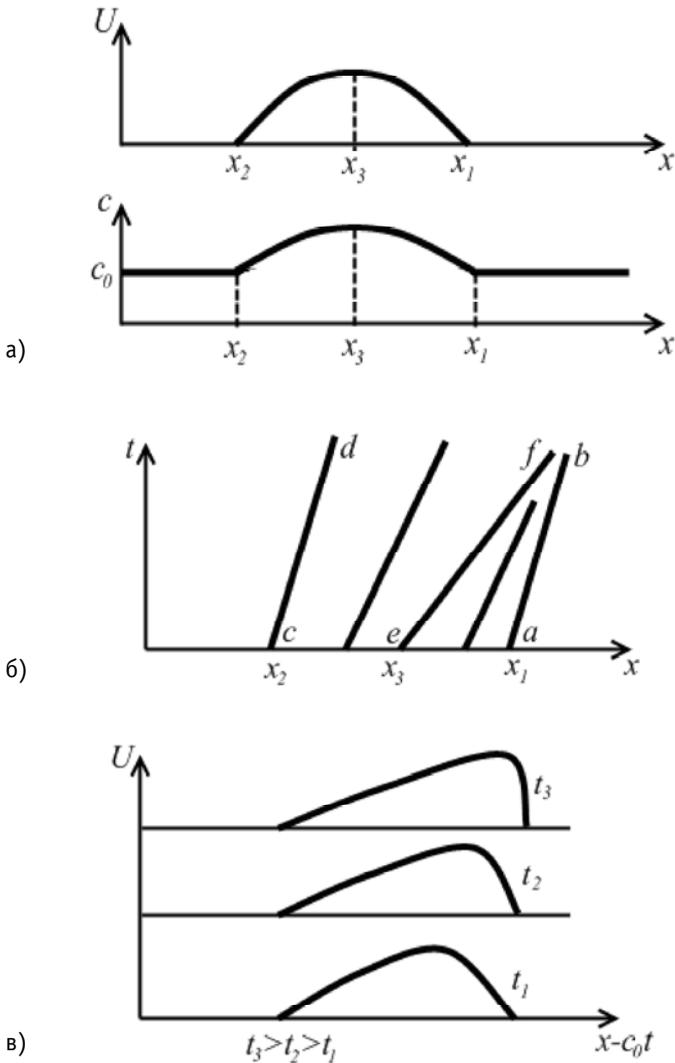


Рис. 1.3. Эволюция простой волны сжатия.

- а) начальное распределение $u(x,0)$ и $c(x,0)$; б) диаграмма $t-x$;
 в) распределение массовой скорости в различные моменты времени

нием времени к искажению начальных профилей $u(x,0)$ и $c(x,0)$. В акустических волнах, являющихся решением линеаризованных уравнений механики сплошной среды, начальные профили $u(x,0)$ и $c(x,0)$ распространяются вдоль характеристик без искажений.

Рассмотрим качественную эволюцию плоской волны, распространяющейся вправо и описываемой уравнениями (1.51), (1.52). Зададим начальные профили $u(x,0)$ и $c(x,0)$ так, как указано на рисунке 1.3а. Картина возникающего течения в плоскости x, t приведена на рисунке 1.3б. Характеристики ab и cd параллельны друг другу, их уравнения — $dx/dt = c_0$. Характеристика ef имеет больший наклон или большую скорость в лабораторной системе координат, по сравнению со всеми другими характеристиками, в том числе с характеристиками ab и cd . Таким образом, с течением времени характеристика ef будет приближаться к характеристике ab и отдаляться от характеристики cd . Ширина волнового пакета не меняется с течением времени, так как точки a и b распространяются с одинаковой скоростью, равной скорости звука. Однако внутри волнового пакета происходит существенное перераспределение u и c : значения максимумов не меняются, но их относительное положение претерпевает значительное изменение. С течением времени профили скорости искажаются все сильнее и сильнее с нарастанием крутизны фронта волны (см. рис. 1.3). Если продолжить решение в область таких больших t , что произойдет пересечение характеристик одного семейства (в рассматриваемом случае α -характеристик), то решение получается неоднозначным. Для ликвидации неоднозначности решения необходимо допустить образование сильных разрывов, т.е. ударной волны. Таким образом, рассмотренное решение типа простой волны имеет смысл в течение ограниченного отрезка времени до образования сильного разрыва. Аналогичным образом изменяются давление и плотность.

Значения скорости, давления и плотности уменьшаются в волне в сторону распространения волны. Такие течения называются простыми волнами сжатия.

Существует, однако, и другой тип простой волны, также описываемой уравнениями (1.51)–(1.53), в которой давление, плотность и

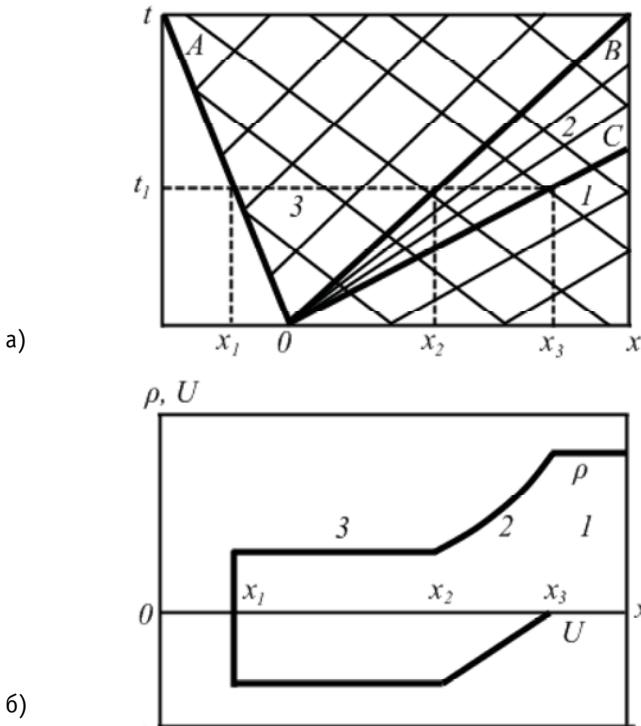


Рис. 1.4. Течение в простой центрированной волне разрежения.
 а) диаграмма t - x течения; б) распределение плотности и скорости частиц по координате и момент t_1

скорость звука возрастают в направлении распространения волны, а увеличение массовой скорости направлено в обратную сторону. О такой простой волне говорят как о простой волне разрежения или расширения. Наибольший прикладной интерес представляет специальный вид простой волны разрежения, когда все характеристики одного из семейств выходят из одной точки, т.е. функция $\varphi(u)$ в уравнении (1.51) или $\varphi_1(u)$ в первом уравнении системы (1.53)

равна нулю. Такая волна называется простой центрированной волной разрежения. На практике указанный тип волны реализуется при выходе ударной волны на свободную поверхность вещества.

Представим, что свободная граница сжатой до давления p_0 неподвижной среды начинает двигаться с постоянной скоростью $u_{\text{ГР}}$ влево. Возникающее течение будет представлять собой простую центрированную волну разрежения (рис. 1.4). Область 1 есть область покоя, область 3 – область постоянного течения, поскольку, в ней оба инварианта Римана постоянны. В области 2 течение обладает свойствами простой центрированной волны разрежения. В этой области в силу равенства нулю $\varphi(u)$ уравнение α -характеристик имеет вид:

$$x/t = u + c. \quad (1.54)$$

Постоянство I_β -инварианта во всем течении приводит к уравнению:

$$u - \frac{2}{m-1}c = -\frac{2}{m-1}c_0. \quad (1.55)$$

Из (1.54) и (1.55) вытекает, что в области 2 u и c зависят от x и t следующим способом:

$$u = \frac{2}{m+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), \quad c = \frac{m-1}{m+1} \frac{x}{t} + \frac{2}{m+1} c_0. \quad (1.56)$$

Зависимости $p(x,t)$ и $\rho(x,t)$ в области простой центрированной волны разрежения получаются из (1.42), (1.44), (1.56):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{m-1}{m+1} \frac{x}{c_0 t} + \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{2}{m-1}},$$

$$p = \frac{\rho_{0\kappa} c_{0\kappa}^2}{m} \left(\left(1 + \frac{m p_0}{\rho_{0\kappa} c_{0\kappa}^2} \right) \left(\frac{m-1}{m+1} \frac{x}{c_0 t} + \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1 \right). \quad (1.57)$$

В области 3 скорость $u = u_{\text{ГР}}$ и в силу (1.55):

$$c = c_{\text{ГР}} = c_0 + u_{\text{ГР}}(m-1)/2. \quad (1.58)$$

Из (1.43), (1.44) и (1.58) следует, что в области 3:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{m-1}{2} \frac{u_{\text{гп}}}{c_0} \right)^{\frac{2}{m-1}},$$

$$p = \frac{\rho_{0\kappa} c_{0\kappa}^2}{m} \left(\left(1 + \frac{mp_0}{\rho_{0\kappa} c_{0\kappa}^2} \right) \left(1 + \frac{m-1}{2} \frac{u_{\text{гп}}}{c_0} \right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1 \right). \quad (1.59)$$

Скорость разлета вещества в вакуум получается из (1.59) при $p = 0$ в виде:

$$u_{\text{гп}} = \frac{2c_0}{m-1} \left(\left(1 + \frac{mp_0}{\rho_{0\kappa} c_{0\kappa}^2} \right)^{\frac{1-m}{2m}} - 1 \right). \quad (1.60)$$

Профили плотности и массовой скорости показаны на рисунке 1.46. Более подробно теория волн сжатия и разряжения излагается в [2–6].